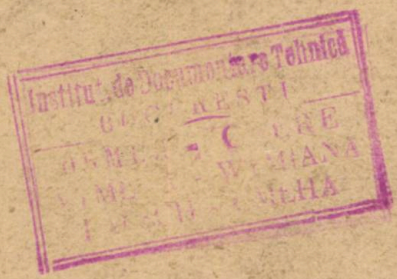
Anul 6. 1-2 F 979 Fi

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE FIZICĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI DE FIZICĂ



1

ANUL VI

IANUARIE—MARTIE 1955

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE FIZICĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI DE FIZICĂ

1

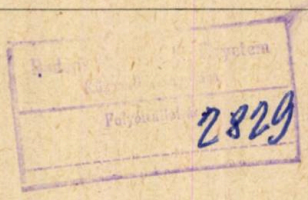
ANUL VI

IANUARIE—MARTIE 1955

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACȚIE

V. NOVACU, membru corespondent al Academiei R.P.R. — redactor responsabil; T. TĂNĂSESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R.; GH. ATANASIU, membru corespondent al Academiei R.P.R.; H. HULUBEI; A. GELBERG; M. GIURGEA; D. BALLY.



ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE FIZICĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI DE FIZICĂ

Tomul VI, nr. 1 Ianuarie-martie 1955

SUMAR

	Pag.
A. HRISTEV, În legătură cu problema cîmpului gravitaţional static cu simetrie sferică	7
ELENA LĂBUŞCĂ şi TEODOR TEITEL, Cercetări experimentale asupra proprietăţilor magnetice ale aliajelor sinterizate Al—Ni—Fe	25
C. POPOVICI şi E. ROGAY, Densitatea curenţilor energetici în cîmpul electromagnetic al liniilor de transport de energie	45
E. FRIEDLÄNDER, Generarea multiplă de mezoni la ciocnirea unor particule de mare energie cu nuclee atomice	63
NOTE	91
ACTUALITĂŢI ŞI DISCUŢII ÎN FIZICĂ	111
ACTIVITATEA INSTITUTULUI DE FIZICĂ	131
RECENZII	133

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE PHYSIQUE

ÉTUDES ET RECHERCHES DE PHYSIQUE

Tome VI, n°. 1 Janvier-mars 1955

SOMMAIRE

Page

A. HRISTEV, Au sujet du problème du champ gravitationnel statique à symétrie sphérique 7

ELENA LĂBUȘCĂ et TEODOR TEITEL, Recherches expérimentales sur les propriétés magnétiques des alliages synthérisés Al—Ni—Fe 25

C. POPOVICI et E. ROGAY, La densité des courants énergétiques dans le champ électromagnétique des lignes de transport d'énergie 45

E. FRIEDLÄNDER, Génération multiple de mésons dans les collisions des particules de grande énergie avec des noyaux atomiques 63

NOTES 91

ACTUALITÉS ET DISCUSSIONS DE PHYSIQUE 111

L'ACTIVITÉ DE L'INSTITUT DE PHYSIQUE 131

COMPTES RENDUS 133

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ФИЗИКЕ

Том VI, № 1 Январь-март 1955

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

А. ХРИСТЕВ, К задаче о статическом центрально-симметрическом гравитационном поле 7
Е. ЛЭБУШКЭ и Т. ТЕЙТЕЛЬ, Экспериментальные исследования магнитных свойств синтеризированных сплавов Al—Ni—Fe.... 25
К. ПОПОВИЧ и Е. РОГАЙ, Плотность энергических токов в электромагнитном поле линий передачи энергии..... 45
Е. ФРИДЛЕНДЕР, Множественное образование мезонов при столкновении с атомными ядрами частиц, с большой энергией..... 63
ЗАМЕТКИ 91
ДИСКУССИИ И ОБСУЖДЕНИЯ..... 111
В ИНСТИТУТЕ ФИЗИКИ 131
РЕЦЕНЗИИ 133

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

STUDII ŞI CERCETĂRI DE FIZICĂ
Tomul VI, nr. 1, 1955

ÎN LEGĂTURĂ CU PROBLEMA CÎMPULUI GRAVITAŢIONAL STATIC CU SIMETRIE SFERICĂ *)

DE

A. HRISTEV

I

1. Simetria centrală a cîmpului înseamnă că metrica spaţiului-timp, adică expresia intervalului ds, trebuie să fie aceeaşi în toate punctele situate la aceeaşi distanţă de centru. În spaţiul euclidian, această distanţă este egală cu raza vectoare; în spaţiul neeuclidian (în prezenţa cîmpului gravitaţional), nu există o mărime care să aibă toate proprietăţile razei vectoare euclidiene (de pildă egală cu distanţa pînă la centru şi în acelaşi timp egală cu lungimea unui cerc împărţită cu 2π). Alegerea «razei vectoare» rămîne de aceea acum arbitrară.

Dacă folosim coordonate «sferice» r, θ, φ, expresia cea mai generală a lui ds^2 cu simetrie sferică va fi

$$ds^2 = g_{11}(r,t)\,dr^2 + g_{22}(r,t)\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2) + g_{44}(r,t)\,dt^2 + g_{14}(r,t)\,dr dt, \quad (1)$$

unde g_{ik} sînt funcţii de «raza vectoare» r şi «timpul» t. Datorită posibilităţii de a alege arbitrar sistemul de referinţă în teoria generală a relativităţii, mai putem supune coordonatele unei transformări care nu strică simetria centrală a lui ds^2, adică putem transforma coordonatele r şi t cu ajutorul formuleler $r = f_1(r', t')$, $t = f_2(r', t')$, unde f_1, f_2 sînt funcţii arbitrare de coordonatele noi r', t'. Folosind această posibilitate vom alege, în primul rînd, coordonata r şi timpul t astfel încît coeficientul $g_{14}(r, t)$ care înmulţeşte produsul $dr dt$ în expresia lui ds^2, să se anuleze [1]. Ulterior vom impune încă o condiţie: $g_{11}(r, t)$ să fie egal cu -1, adică dr să ne dea deplasarea în direcţia radială, sau $g_{22}(r, t)$ să fie egal cu $-r^2$, adică raza vectoare r să fie astfel definită încît lungimea unui cerc cu centrul în origine să fie egală cu $2\pi r$ (elementul de arc de cerc în planul $\theta = \pi/2$ este $dl = r\,d\varphi$). Trebuie observat că această alegere a sistemului de coordonate nu determină în mod univoc alegerea coordonatei temporale. Anume, ea poate fi încă supusă unei transformări arbitrare de forma $t = f(t')$, care nu conţine r. In consideraţiile de mai sus am ţinut seama numai de simetria sferică. Dacă acum luăm în considerare caracterul *static* al cîmpului (pe care vrem să-l studiem), va rezulta că printr-o alegere adecvată a timpului t, mărimile g_{ik} vor fi funcţii numai de r. (Observăm că în cazul Schwarzschild cîmpul gravitaţional cu simetrie sferică în vacuum iese automat static).

---

*) Lucrare prezentată Institutului de fizică la data de 1 martie 1954.

După aceste considerații, metrica spațiului nostru o vom scrie astfel:

$$ds^2 = g_i\,(dx^i)^2 \tag{2}$$

(se face sumarea după indici identici așezați la etaje diferite; literele latine parcurg valorile 1, 2, 3, 4),

$$g_i = g_{ii} = f_i(r), \quad (i \neq 3) \tag{3}$$

$$g_3 = g_2 \sin^2\theta. \tag{4}$$

Putem calcula și celelalte mărimi

$$\begin{aligned} &\text{Det}\ \|g_{ik}\| = \prod_i g_i, \\ &g^i = \frac{1}{g_i}. \end{aligned} \tag{5}$$

2. Să calculăm tensorul curbură (contractat) R_{ik}

$$R_{ik} = R^l_{ilk} = \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^l_{il}}{\partial x^k} + \Gamma^l_{ik}\,\Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{il}\,\Gamma^l_{km}, \tag{6}$$

unde Γ^i_{kl} este

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}\,g^{is}\left(\frac{\partial g_{sk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{sl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^s}\right). \tag{7}$$

Avînd forma lui g_{ik} (a se vedea (3), (4) și (5)), putem calcula Γ^i_{kl} după (7), iar apoi R_{ik} după (6). Efectuînd calculele găsim [2] *)

$$\begin{aligned} R_{11} = {} & \frac{d^2}{dr^2}\ln\left(g_2\sqrt{g_4}\right) - \frac{d}{dr}\ln\sqrt{g_1}\,\frac{d}{dr}\ln\left(g_2\sqrt{g_4}\right) + \\ & + \frac{1}{2}\left(\frac{d\ln g_2}{dr}\right)^2 + \left(\frac{d\ln\sqrt{g_4}}{dr}\right)^2, \end{aligned} \tag{8}$$

$$R_{22} = -1 + \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{2g_1}\,\frac{dg_2}{dr}\right) + \frac{1}{4g_1^2}\,\frac{dg_1}{dr}\,\frac{dg_2}{dr} + \frac{1}{4g_1 g_4}\,\frac{dg_2}{dr}\,\frac{dg_4}{dr}, \tag{9}$$

$$R_{33} = R_{22}\,\frac{g_3}{g_2}, \tag{10}$$

$$R_{44} = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{2g_1}\,\frac{dg_4}{dr}\right) - \frac{1}{4g_1 g_4}\left(\frac{dg_4}{dr}\right)^2 + \frac{1}{4g_1^2}\,\frac{dg_4}{dr}\,\frac{dg_1}{dr} + \frac{1}{2g_1 g_2}\,\frac{dg_2}{dr}\,\frac{dg_4}{dr}. \tag{11}$$

3. Pentru a determina cîmpul gravitațional în cazul nostru (cîmp static cu simetrie sferică), vom aplica sistemul de ecuații al lui Rumer [3] **). În această teorie se face o legătură între tensorul energie-impuls T_{ik} din teoria relativității și coeficienții $\overset{\alpha}{H}_{ik}$ ai

*) Vezi recenzia acestei lucrări în Studii și cercetări de fizică, t. III, 1952, p. 191.

**) Vezi recenzia acestei lucrări în Studii și cercetări de fizică, t. II, nr. 3—4, iulie—decembrie 1951, p. 448.

formelor diferențiale de ordinul doi. Se consideră prin urmare scufundarea spațiului-timp riemannian cvadridimensional într-un spațiu euclidian de un număr mai mare de dimensiuni. Ecuațiile lui Einstein

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \varkappa T_{ik} \tag{12}$$

($\varkappa$-constantă gravitațională) leagă metrica spațiului (tensorul metric fundamental g_{ik}) de distribuția și miscarea materiei (tensorul energie-impuls T_{ik}). Prin aceasta se consideră numai proprietățile intrinseci (locale) (geodezicele, curbura suprafeței etc.) legate de prima formă diferențială

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k . \tag{13}$$

Aceste proprietăți rămîn invariant legate de suprafață, chiar cînd aceasta suferă o deformare fără dilatarea sau contractarea fibrelor. De pildă, două suprafețe desfășurabile, cum sînt planul și conul, au aceeași metrică, deci se vor bucura de aceleași proprietăți intrinseci.

În afara acestor proprietăți intrinseci există așa-zisele proprietăți rigide (globale) (legate de forma suprafeței așa cum apare ea unui observator din spațiul euclidian, în care este scufundată suprafața riemanniană considerată).

Spre deosebire de proprietățile intrinseci, cele rigide se schimbă odată cu deformarea pe care o suferă suprafața. Ele depind direct de forma suprafeței scufundate în spațiul euclidian respectiv (de pildă liniile asimptotice sau liniile de curbură). Analitic, proprietățile rigide depind atît de coeficienții primei forme diferențiale, cît și de coeficienții așa-ziselor forme diferențiale de ordinul doi, atașate suprafeței,

$$d\overset{\alpha}{\sigma}{}^2 = \overset{\alpha}{H}_{ij}\, dx^i\, dx^j . \tag{14}$$

În cazul unui spațiu riemannian V_n cu n dimensiuni, scufundat într-un spațiu euclidian E_N, prima formă fundamentală (metrica spațiului) rămîne tot unică, însă în locul celei de a doua forme fundamentale (în cazul $n = 2$) apare un număr de forme pătratice, egal cu clasa spațiului considerat. Clasa K a spațiului este dată de diferența dintre numărul N minim de dimensiuni ale spațiului euclidian E_N în care poate fi scufundat spațiul riemannian V_n și numărul de dimensiuni n ale acestui spațiu V_n. In general, numărul dimensiunilor spațiului euclidian E_N este dat de

$$N = \frac{n\,(n+1)}{2} \tag{15}$$

și deci clasa spațiului V_n este

$$K = N - n = \frac{n\,(n-1)}{2} . \tag{16}$$

În cazul spațiului-timp al relativității generale, avem

$$n = 4,\ K = N - n = 10 - 4 = 6. \tag{17}$$

Deci, în general, avem un spațiu euclidian de scufundare de 10 dimensiuni și 6 forme diferențiale de ordinul doi.

Între coeficienții acestor forme diferențiale I și II există relațiile date de Gauss, Codazzi și Ricci-Kühne (care exprimă condițiile de rigiditate ale spațiului):

1) ecuațiile lui Gauss

$$R_{iklm} = \overset{\alpha}{H}_{il}\,\overset{\alpha}{H}_{km} - \overset{\alpha}{H}_{kl}\,\overset{\alpha}{H}_{im}, \tag{18}$$

(după indici greci întîlniți de două ori se face sumarea de la 1 la 6),

2) ecuațiile lui Codazzi

$$\overset{\alpha}{H}_{ik;l} - \overset{\alpha}{H}_{il;k} = \overset{\alpha\beta}{T}_{l}\,\overset{\beta}{H}_{ik} - \overset{\alpha\beta}{T}_{k}\,\overset{\beta}{H}_{il} \tag{19}$$

(; înseamnă derivata covariantă), unde cantitățile cu caracter vectorial $\overset{\alpha\beta}{T}_{i}$ satisfac relația

$$\overset{\alpha\beta}{T}_{i} = -\overset{\beta\alpha}{T}_{i} \tag{20}$$

și apar numai pentru $n > 2$,

3) ecuațiile lui Ricci-Kühne

$$\frac{\partial \overset{\alpha\beta}{T}_{i}}{\partial x^{k}} - \frac{\partial \overset{\alpha\beta}{T}_{k}}{\partial x^{i}} + g^{rs}\left(\overset{\alpha}{H}_{kr}\,\overset{\beta}{H}_{is} - \overset{\alpha}{H}_{ir}\,\overset{\beta}{H}_{ks}\right) + \overset{\gamma\alpha}{T}_{i}\,\overset{\gamma\beta}{T}_{k} - \overset{\gamma\alpha}{T}_{k}\,\overset{\gamma\beta}{T}_{i} = 0. \tag{21}$$

Conform teoriei lui Rumer, coeficienții $\overset{\alpha}{H}_{ik}$ ai formelor diferențiale de ordinul doi sînt legați de tensorul energie-impuls T_{ik}. Pentru a găsi relația necesară se contractă ecuațiile lui Gauss (18), astfel încît să se obțină membrul I al ecuațiilor lui Einstein (12),

$$R_{ik} - \frac{1}{2}\,g_{ik}\,R = \left(\overset{\alpha}{H}_{ik}\,\overset{\alpha}{H} - \overset{\alpha}{H}_{is}\,\overset{\alpha}{H}^{s}_{k}\right) - \frac{1}{2}\,g_{ik}\left(\overset{\alpha}{H}^{2} - \overset{\alpha}{H}_{sr}\,\overset{\alpha}{H}^{sr}\right), \tag{22}$$

unde

$$\overset{\alpha}{H} = \overset{\alpha}{H}^{i}_{i}.$$

Comparînd ecuațiile (22) cu ecuațiile lui Einstein (12) găsim

$$\varkappa\, T_{ik} = \left(\overset{\alpha}{H}_{ik}\,\overset{\alpha}{H} - \overset{\alpha}{H}_{is}\,\overset{\alpha}{H}^{s}_{k}\right) - \frac{1}{2}\,g_{ik}\left(\overset{\alpha}{H}^{2} - \overset{\alpha}{H}_{sr}\,\overset{\alpha}{H}^{sr}\right). \tag{23}$$

Contractînd acum ecuațiile lui Codazzi obținem încă următoarele două sisteme de ecuații

$$\overset{\alpha}{H}^{s}_{i;s} - \overset{\alpha}{H}_{;i} = \overset{\alpha\beta}{T}_{s}\,\overset{\beta}{H}^{s}_{i} - \overset{\alpha\beta}{T}_{i}\,\overset{\beta}{H}, \tag{24}$$

$$\overset{\alpha}{H}^{is}\left(\overset{\alpha}{H}_{ir;s} - \overset{\alpha}{H}_{is;r}\right) = \overset{\alpha\beta}{T}_{s}\,\overset{\beta}{H}_{ir}\,\overset{\alpha}{H}^{is} - \overset{\alpha\beta}{T}_{r}\,\overset{\beta}{H}_{is}\,\overset{\alpha}{H}^{is}. \tag{25}$$

Ecuațiile Codazzi contractate (24) și (25) sînt suficiente pentru a arăta că divergența covariantă a membrului I din ecuațiile lui Einstein (12) sau (22) este nulă.

Sistemul de ecuații diferențiale (22), (24) și (25) constituie sistemul fundamental de ecuații în teoria lui Rumer și înlocuiește sistemul de ecuații ale lui Einstein (12).

Putem da o altă formă acestui sistem, introducînd pentru aceasta relația

$$\overset{\alpha}{D}_{ik} = \overset{\alpha}{H}_{ik} - g_{ik}\,\overset{\alpha}{H}. \tag{26}$$

Atunci sistemul nostru (22), (24 și (25) se scrie

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \overset{\alpha}{D}_{is} \overset{\alpha}{H}{}^{s}_{k} - \frac{1}{2} g_{ik} \overset{\alpha}{D}_{rs} \overset{\alpha}{H}{}^{rs}, \tag{27}$$

$$\overset{\alpha}{D}{}^{s}_{i;\,s} = \overset{\alpha\beta}{T}_{s} \overset{\beta}{D}{}^{s}_{i}, \tag{28}$$

$$\overset{\alpha}{H}{}^{ik} \left(\overset{\alpha}{H}_{ir;\,k} - \overset{\alpha}{H}_{ik;\,r} \right) = \overset{\alpha\beta}{T}_{k} \overset{\beta}{H}_{ik} \overset{\alpha}{H}{}^{ik} - \overset{\alpha\beta}{T}_{r} \overset{\beta}{H}_{ik} \overset{\alpha}{H}{}^{ik}. \tag{29}$$

Sub această formă teoria devine analogă cu teoria (simetrică) a elasticității. Formele $\overset{\alpha}{H}_{ik}$ sînt analoge cu deformări cuadridimensionale, iar $\overset{\alpha}{D}_{ik}$ — cu tensiuni cuadridimensionale; relația (26) înlocuiește legea lui Hooke. Tensorul hidrodinamic clasic T^{ik} este o aproximație fenomenologică a acestei teorii elastice a tensorului energie-impuls și a interpretării sale geometrice.

Sistemul fundamental de ecuații nu constituie însă un sistem complet, întrucît el este satisfăcut de orice spațiu riemannian cuadridimensional, scufundat într-un spațiu euclidian de 10 dimensiuni. Pentru determinarea completă a necunoscutelor g_{ik} și $\overset{\alpha}{H}_{ik}$, Rumer adaugă la sistemul de sus, noi ecuații în $\overset{\alpha}{H}_{ik}$ deduse din principiul fizic al minimei acțiuni. Drept densitate de acțiune se ia

$$R = \overset{\alpha}{H}_{sr} \overset{\alpha}{H}{}^{sr} - \overset{\alpha}{H}{}^{2} = \overset{\alpha}{D}_{sr} \overset{\alpha}{H}{}^{sr}, \tag{30}$$

atunci principiul minimei acțiuni se va scrie

$$\delta \int \overset{\alpha}{D}_{sr} \overset{\alpha}{H}{}^{sr} \, d\tau = 0, \tag{31}$$

la care se adaugă condiția (28). De aici rezultă noi ecuații în $\overset{\alpha}{H}_{ik}$, care, împreună cu ecuațiile fundamentale, determină complet spațiul din punct de vedere geometric.

II

4. Pentru a aplica sistemul lui Rumer în cazul nostru, vom presupune că

1) clasa spațiului nostru (caz simetric-sferic și static cu metrica (2)) este egală cu 1, adică spațiul euclidian de scufundare are 5 dimensiuni și deci avem o singură formă diferențială II;

2) coeficienții formei II sînt diagonali și depind de coordonate la fel ca și g_{ik} ((2), (3), (4))

$$\begin{aligned} &d\sigma^2 = H_i (dx^i)^2, \\ &H_i = \varphi_i (r) \qquad (i \neq 3), \\ &H_3 = H_2 \sin^2 \theta. \end{aligned} \tag{32}$$

În cazul cîmpului electromagnetic, tensorul energie-impuls contractat $T = T^{i}_{i}$ este nul. Scriind ecuațiile lui Einstein

$$R^{k}_{i} - \frac{1}{2} \delta^{k}_{i} R = \varkappa T^{k}_{i}$$

și contractînd, găsim că

$$R = -\varkappa\, T_i^i = 0$$

(scalarul curbură R este nul).

Avînd în vedere ipotezele făcute, sistemul lui Rumer (26)—(29) devine

$$D_i = H_i - g_i H, \tag{33}$$

$$R_i = D_i H_{\bar{i}}^{\bar{i}}, \tag{34}$$

$$D_{i;i}^{\bar{i}} = 0, \tag{35}$$

$$H^i (H_{i;i} - H_{i;i}) = 0 \tag{36}$$

(am notat în general $S_{\bar{i}\bar{i}} = S_{\bar{i}}$) (cînd nu se face sumare după indici muți așezați la etaje diferite, unul din ei va fi subliniat).

Se vede că ultima ecuație (36) este satisfăcută identic, iar penultima (35) ne dă

$$D_{\bar{i}}^{\bar{i}} = \beta_i = \text{const.} \tag{37}$$

și mai departe

$$D_i = \beta_i g_i, \tag{38}$$

$$D_{\bar{i}}^{\bar{i}} = D = \sum_i \beta_i = \beta = \text{const.} \tag{39}$$

Folosind relația (33) găsim următoarele relații:

$$D_{\bar{i}}^{\bar{i}} = H_{\bar{i}}^{\bar{i}} - H, \tag{40}$$

$$D = -3\, H. \tag{41}$$

Putem exprima, invers, mărimile H în funcție de mărimile D:

$$H = -\frac{1}{3} D,$$

$$H_i = D_i - \frac{1}{3} g_i D, \tag{42}$$

$$H_{\bar{i}}^{\bar{i}} = D_{\bar{i}}^{\bar{i}} - \frac{1}{3} D.$$

Ecuațiile (34) devin atunci

$$R_i = D_i \left(D_{\bar{i}}^{\bar{i}} - \frac{1}{3} D \right) = \beta_i g_i \left(\beta_i - \frac{1}{3} \beta \right) \tag{43}$$

sau notînd

$$\chi_i = \beta_i \left(\beta_i - \frac{1}{3} \beta \right) = \text{const}$$

avem

$$R_i = \chi_i g_i, \tag{44}$$

unde bineînțeles trebuie să avem $\sum_i \chi_i = \chi = 0$ (condiția $R = 0$), adică

$$\sum_i (\beta_i)^2 - \frac{1}{3}\left(\sum_i \beta_i\right)^2 = 0.$$

Din expresia (10) se vede că $\chi_3 = \chi_2$ și deci

$$2\,\chi_2\ (=2\,\chi_3) = -(\chi_1 + \chi_4). \tag{45}$$

Am redus astfel sistemul nostru inițial la sistemul (44), unde bineînțeles membrul I reprezintă expresiile diferențiale în g_i (8)—(11). Urmează acum să integrăm acest sistem (44) pentru a găsi expresiile lui g_{ik} în funcție de coordonate.

În lucrarea lui Reissner [2], bazată pe ecuațiile lui Einstein, s-a rezolvat sistemul diferențial de forma

$$R_i = \varepsilon_i \lambda^2 \frac{g_i}{g_2^2} \cdot \left(\varepsilon_i = \pm 1,\ \sum_i \varepsilon_i = 0\right) \tag{46}$$

Sistemul nostru (44) diferă de (46) în membrul II prin factorul $1/g_2{}^2$.

5. De asemenea, putem ajunge la sistemul (44), adică la expresia tensorului energie-impuls T_{ik} dată de

$$T_{ik} = \chi_i g_i, \tag{47}$$

pe baza următoarelor considerații.

În lucrarea lui Reissner [2] se stabilește următoarea expresie a tensorului energie-impuls (cazul electrostatic cu simetrie sferică) (vezi 46)).

$$\varkappa\, T_i = \varepsilon_i \lambda^2 \frac{g_i}{g_2^2} \cdot (\varepsilon_i = \pm 1). \tag{48}$$

Expresia generală a lui T_i trebuie să fie însă

$$\varkappa\, T_i = \varepsilon_i \lambda^2 \frac{W g_i}{(W g_2)^2} = \varepsilon_i \lambda^2 \frac{g_i}{W g_2^2}, \tag{49}$$

întrucît ecuațiile lui Maxwell sînt conform covariante și deci rămîn aceleași dacă înmulțim metrica g_i cu un factor arbitrar W.

Putem folosi acum expresia (49) pentru a înlocui membrul I al ecuațiilor lui Rumer (22) — adică R_i, care reprezintă expresii diferențiale — reducînd astfel aceste ecuații la ecuații algebrice. Într-adevăr, sistemul lui Rumer (22), (24), (25) se scrie în cazul nostru (avînd în vedere ipotezele făcute)

$$R_i = H_i H - H_i H_i^i, \tag{50}$$

$$H_{i;i}^i - H_{;i} = 0, \tag{51}$$

$$H^i\ (H_{i;i} - H_{i;i}) = 0 \tag{52}$$

(reamintim că nu se sumează după indice subliniat). Ultima ecuație este satisfăcută identic.

Înlocuind în prima ecuație (50) membrul I, adică R_i (expresie diferențială în g_i) prin membrul II al expresiilor (49), obținem

$$\varepsilon_i \lambda^2 \frac{g_i}{W g_2^2} = H_i H - H_i H_{\underline{i}}^{\underline{i}} \quad . \tag{53}$$

Această ecuație algebrică se poate rezolva astfel (după indicația prof. A. Popovici):

$$\lambda^2 \frac{\varepsilon_i g_i}{W g_2^2} = H_i H - g_{\underline{i}}^{\underline{i}} (H_i)^2,$$

$$\lambda^2 \frac{\varepsilon_i}{W} \left(\frac{g_i}{g_2}\right)^2 = g_i H_i H - (H_i)^2,$$

de unde

$$H_i = \frac{g_i H}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\lambda^2 \varepsilon_i}{W H^2 g_2^2}}\right). \tag{54}$$

Mai departe avem

$$H_i^{\underline{i}} = \frac{H}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\lambda^2 \varepsilon_i}{W H^2 g_2^2}}\right).$$

Sumînd după $\underline{i}$

$$H = \frac{H}{2} \left(4 \pm 2 \sqrt{1 - \frac{4\lambda^2}{W H^2 g_2^2}} \pm 2 \sqrt{1 + \frac{4\lambda^2}{W H^2 g_2^2}}\right).$$

Rezultă

$$1 = 4 \left(1 - \frac{16 \lambda^4}{W^2 H^4 g_2^4}\right),$$

de unde

$$H = \frac{4\lambda}{\sqrt[4]{12}} \frac{1}{\sqrt{W} . g_2} \tag{55}$$

și deci după (54)

$$H_i = \frac{\lambda}{\sqrt[4]{12}} (1 + \sqrt{3}\, \varepsilon_i) \frac{1}{\sqrt{W}} \frac{g_i}{g_2} . \tag{56}$$

Introducînd notația

$$\alpha_i = \frac{1 + \sqrt{3}\, \varepsilon_i}{\sqrt[4]{12}} = \text{const.} \left(\sum_i \alpha_i = \frac{4}{\sqrt[4]{12}}\right), \tag{57}$$

(56) se scrie

$$H_i = \frac{\lambda \alpha_i g_i}{g_2 \sqrt{W}} . \tag{58}$$

Să rezolvăm acum sistemul (51), care se scrie

$$\frac{\partial}{\partial x^{\underline{i}}} (H_i^{\underline{i}} - H) = 0,$$

de unde

$$H_i^{\,i} - H = \gamma_i = \text{const.} \tag{59}$$

Sumînd după i găsim

$$H = -\frac{1}{3}\gamma = \text{const.} \qquad \left(\gamma = \sum_i \gamma_i\right) \tag{60}$$

Comparînd acum acest rezultat cu expresia (55) a lui H, găsită mai înainte, deducem că

$$\frac{1}{\sqrt{W}\, g_2} = \sigma = \text{const.}$$

Prin aceasta, factorul arbitrar din expresia generală (49) a tensorului energie-impuls este precizat (cu aproximația unei constante σ)

$$W = \frac{1}{\sigma^2 g_2^2}. \tag{61}$$

Expresia lui T devine atunci

$$\varkappa\, T_i = \lambda^2 \sigma^2\, \varepsilon_i\, g_i, \tag{62}$$

iar tensorul al doilea fundamental H_i va fi

$$H_i = \lambda\, \alpha_i\, \sigma\, g_i. \tag{63}$$

Ecuațiile lui Einstein, avînd în membrul II pentru T_{ik} expresia găsită (62)

$$R_i = \varkappa\, T_i = \lambda^2 \sigma^2\, \varepsilon_i\, g_i \quad \left(\sum_i \varepsilon_i = 0\right), \tag{64}$$

sînt de aceeași formă ca și sistemul nostru (44), găsit direct din sistemul de ecuații al lui Rumer.

6. Să scriem explicit sistemul (44) la care am ajuns:

$$\frac{d^2}{dr^2} \ln\left(g_2 \sqrt{g_4}\right) - \frac{d}{dr} \ln \sqrt{g_1}\, \frac{d}{dr} \ln\left(g_2 \sqrt{g_4}\right) + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{d \ln g_2}{dr}\right)^2 + \left(\frac{d \ln \sqrt{g_4}}{dr}\right)^2 = \chi_1\, g_1, \tag{65}$$

$$-1 + \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{2g_1}\frac{dg_2}{dr}\right) + \frac{1}{4g_1^2}\frac{dg_1}{dr}\frac{dg_2}{dr} + \\ + \frac{1}{4\, g_1\, g_4}\frac{dg_2}{dr}\frac{dg_4}{dr} = \chi_2\, g_2, \tag{66}$$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{2g_1}\frac{dg_4}{dr}\right) - \frac{1}{4g_1 g_4}\left(\frac{dg_4}{dr}\right)^2 + \frac{1}{4g_1^2}\frac{dg_4}{dr}\frac{dg_1}{dr} + \\ + \frac{1}{2g_1\, g_2}\frac{dg_2}{dr}\frac{dg_4}{dr} = \chi_4\, g_4. \tag{67}$$

Prin transformări simple putem aduce sistemul de mai sus la forma:

$$\frac{g_2''}{g_2} - \frac{1}{2}\left(\frac{g_2'}{g_2}\right)^2 + \frac{g_4''}{2g_4} - \frac{1}{4}\left(\frac{g_4'}{g_4}\right)^2 -$$

$$- \frac{1}{2}\frac{g_1'}{g_1}\left(\frac{g_2'}{g_2} + \frac{1}{2}\frac{g_4'}{g_4}\right) = \chi_1 g_1, \tag{68}$$

$$\frac{g_2''}{2g_2} - \frac{g_1'}{4g_1}\frac{g_2'}{g_2} + \frac{g_2'}{4g_2}\frac{g_4'}{g_4} - \frac{g_1}{g_2} = \chi_2 g_1, \tag{69}$$

$$\frac{g_4''}{2g_4} - \frac{g_1'}{4g_1}\frac{g_4'}{g_4} + \frac{g_2'}{2g_2}\frac{g_4'}{g_4} - \frac{1}{4}\left(\frac{g_4'}{g_4}\right)^2 = \chi_4 g_1, \tag{70}$$

unde accentul înseamnă derivare după coordonata r.

Acum fixăm alegerea sistemului de coordonate punînd

$$g_1 = -1 \tag{71}$$

(adică deplasarea în direcția radială este egală cu dr). După această alegere sistemul se scrie

$$\frac{g_2''}{g_2} - \frac{1}{2}\left(\frac{g_2'}{g_2}\right)^2 + \frac{g_4''}{2g_4} - \frac{1}{4}\left(\frac{g_4'}{g_4}\right)^2 = -\chi_1, \tag{72}$$

$$\frac{g_2''}{2g_2} + \frac{g_2'}{4g_2}\frac{g_4'}{g_4} + \frac{1}{g_2} = -\chi_2, \tag{73}$$

$$\frac{g_4''}{2g_4} + \frac{g_2'}{2g_2}\frac{g_4'}{g_4} - \frac{1}{4}\left(\frac{g_4'}{g_4}\right)^2 = -\chi_4. \tag{74}$$

De aici putem găsi ușor ecuația diferențială pentru g_2. Pentru aceasta adunăm la prima ecuație (72) ecuația a doua (73) înmulțită cu 2 și scădem ecuația a treia (74) schimbată de semn. Obținem

$$\frac{g_2''}{g_2} - \frac{1}{4}\left(\frac{g_2'}{g_2}\right)^2 + \frac{1}{g_2} + \tau = 0, \tag{75}$$

unde am notat (a se vedea (45))

$$\tau = \chi_2 - \frac{1}{2}(\chi_4 - \chi_1) = -\chi_4. \tag{76}$$

Prima integrare a ecuației (75) se face ușor, dacă observăm că

$$\frac{g_2''}{g_2} - \frac{1}{4}\left(\frac{g_2'}{g_2}\right)^2 = \frac{4}{3}\frac{\left(g_2^{3/4}\right)''}{g_2^{3/4}},$$

transcriem ecuația astfel:

$$\frac{4}{3}\, g_2^{-3/4}\left(g_2^{3/4}\right)'' + \frac{1}{g_2} + \tau = 0$$

sau înmulțind cu $(g_2^{3/4})'$

$$2\,(g_2^{3/4})'\,(g_2^{3/4})'' = -\frac{3}{2}\left(\tau+\frac{1}{g_2}\right) g_2^{3/4}\,(g_2^{3/4})',$$

adică

$$\mathrm{d}\left[(g_2^{3/4})'\right]^2 = -\frac{3}{2}\left(\tau+\frac{1}{g_2}\right) g_2^{3/4}\,\mathrm{d}\,(g_2^{3/4}).$$

Aceasta ne dă după integrare

$$\left[(g_2^{3/4})'\right]^2 = -\frac{3}{4}\tau\,(g_2^{3/4})^2 - \frac{9}{4}\,(g_2^{3/4})^{2/3} + \frac{9i\gamma}{2}$$

$$(\gamma = \text{const},\ i = \sqrt{-1})$$

sau

$$(g_2^{3/4})' = \pm\frac{3}{2}\sqrt{-\frac{\tau}{3}\,g_2^{3/2} - g_2^{1/2} + 2i\gamma}, \tag{77}$$

adică

$$I(g_2) = \pm\int \frac{g_2^{1/2}\,\mathrm{d}g_2^{1/2}}{\sqrt{-\frac{\tau}{3}\,g_2^2 - g_2 + 2i\gamma\,g_2^{1/2}}} = r + r_0 \tag{78}$$

(constanta r_0 se găsește din condiția pentru g_2 în centru). Pentru a efectua integrala, vom face schimbarea de variabilă

$$s = \frac{6\gamma}{\sqrt{-g_2}} + 1,\quad g^{1/2} = \frac{6i\gamma}{1-s},\quad \mathrm{d}g^{1/2} = \frac{6i\gamma}{(1-s)^2}\,\mathrm{d}s. \tag{79}$$

Prin aceasta, integrala din (78) se aduce la forma

$$I(g_2) = \pm\int \frac{12\,\gamma\sqrt{3}\,\mathrm{d}s}{(s-1)\sqrt{4s^3 - 12s - 8\,(18\,\tau\gamma^2 - 1)}}. \tag{80}$$

Aceasta este o integrală eliptică de speța a treia. Am adus-o la această formă pentru a putea aplica teoria funcțiilor eliptice sub forma lui Weierstrass (funcțiile eliptice ale lui Weierstrass [1]) $\mathcal{S}$, σ și ζ) [4].

Introducem notația obișnuită a invarianților (a nu se confunda cu potențialele)

$$g_2 = 12,\quad g_3 = 8\,(18\,\tau\gamma^2 - 1). \tag{81}$$

Dacă discriminantul

$$\Delta = g_2^3 - 27\,g_3^2 \neq 0,$$

adică

$$\Delta = 3\cdot 12^4\cdot\,\tau\gamma^2\,(1 - 9\tau\gamma^2) \neq 0,$$

[1]) Din motive tehnice notăm funcția lui Weierstrass cu $\mathcal{S}$.

ceea ce înseamnă că

$$\gamma \neq 0, \quad \tau \neq 0 \text{ și } 9\tau\gamma^2 \neq 1, \tag{82}$$

putem face schimbarea de variabilă

$$s = \mathfrak{S}(t), \; ds = \gamma'(t)\, dt, \; \sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3} = -\gamma'(t). \tag{83}$$

Integrala noastră (80) se va scrie

$$I(g_2) = \pm \int \frac{12\gamma\sqrt{3}\, dt}{\gamma(t) - 1}$$

și se integrează imediat [5]

$$I(g_2) = \pm \int \frac{12\gamma\sqrt{3}\, dt}{\mathfrak{S}(t) - 1} = \pm \frac{12\gamma\sqrt{3}}{\gamma'(t_0)} \left[\ln \frac{\sigma(t - t_0)}{\sigma(t + t_0)} + 2t\zeta(t_0) \right], \tag{84}$$

unde

$$\mathfrak{S}(t_0) = 1,$$

$$\mathfrak{S}'(t_0) = -\sqrt{4[\mathfrak{S}(t_0)]^3 - 12\mathfrak{S}(t_0) - 8(18\tau\gamma^2 - 1)} = -12\gamma\sqrt{-\tau}. \tag{85}$$

Așa dar avem

$$I(g_2) = \pm \sqrt{-\frac{3}{\tau}} \left[\ln \frac{\sigma(t - t_0)}{\sigma(t + t_0)} + 2t\zeta(t_0) \right], \tag{86}$$

sau încă (prin două integrale eliptice de speța a treia sub formă normală):

$$\begin{aligned} I(g_2) &= \pm \sqrt{-\frac{3}{\tau}} \left[\ln \frac{\sigma(t - t_0)}{\sigma(t)} + t\zeta(t_0) - \ln \frac{\sigma(t + t_0)}{\sigma(t)} - t\zeta(-t_0) \right] = \\ &= \pm \sqrt{-\frac{3}{\tau}} \left[\frac{1}{2} \int \frac{R - 12\gamma\sqrt{-\tau}}{s - 1} \cdot \frac{ds}{R} - \frac{1}{2} \int \frac{R + 12\gamma\sqrt{-\tau}}{s - 1} \frac{ds}{R} \right], \end{aligned} \tag{87}$$

unde

$$R = \sqrt{4s^3 - 12s - 8(18\tau\gamma^2 - 1)}.$$

7. Putem exprima ușor rezultatul și sub forma normală a integralei eliptice de speța a treia, din teoria lui Jacobi. Pentru aceasta trecem mai întîi de la (80) la forma lui Riemann, făcînd substituția

$$p = \frac{e_1 - e_3}{s - e_3}, \; s = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{p}, \; ds = -\frac{(e_1 - e_3)\, dp}{p_2},$$

unde e_i sînt rădăcinile polinomului

$$R^2 = 4s^3 - 12s - 8(18\tau\gamma^2 - 1),$$

avînd proprietățile

$$\begin{aligned} &e_1 + e_2 + e_3 = 0, \; e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1 = -\frac{1}{4} g_2 = -3, \\ &e_1e_2e_3 = \frac{1}{4} g_3 = 2(18\tau\gamma^2 - 1), \end{aligned} \tag{88}$$

și obținem

$$I(g_2) = \pm \int \frac{12\gamma\sqrt{3}}{s-1}\frac{ds}{R} = \pm \frac{6\gamma\sqrt{3}}{\sqrt{e_1-e_3}} \int \frac{p\,dp}{[e_1-e_3-(1-e_3)p]\sqrt{p(1-p)(1-k^2p)}},$$

unde modulul k este

$$k^2 = \frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}.$$

Făcînd în sfîrșit substituția $p = z^2$, ajungem la expresia

$$I(g_2) = \pm \frac{12\gamma\sqrt{3}}{(e_1-e_3)^{3/2}} \int \frac{z^2dz}{(1-k^2b^2z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

unde

$$b^2 = \frac{1-e_3}{e_2-e_3}. \tag{89}$$

Pentru a aduce integrala la forma normală Jacobi a funcției eliptice de speța a treia, introducem sub semnul integralei expresia

$$k^2b\sqrt{(1-b^2)(1-k^2b^2)} = \frac{6\gamma\sqrt{-\tau}}{(e_1-e_3)^{3/2}}.$$

Ajungem astfel la forma normală Jacobi a unei funcții eliptice de speța a treia:

$$I(g_2) = \pm 2\sqrt{-\frac{3}{\tau}} \int \frac{k^2b\sqrt{(1-b^2)(1-k^2b^2)}}{1-k^2b^2z^2} \cdot \frac{z^2dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \tag{90}$$

unde b^2 este dat de relația (89).

Integrala care figurează în membrul II al relației (90) poate fi exprimată ca o funcție de integrala eliptică de speța întîia (sub forma Jacobi)

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \tag{91}$$

și anume, Jacobi notează această funcție cu $\Pi(u; a)$, dacă

$$b = \mathrm{sn}\,(a; k). \tag{92}$$

Prin urmare

$$\Pi(u; a) = \int_0^z \frac{k^2b\sqrt{(1-b^2)(1-k^2b^2)}}{1-k^2b^2z^2} \cdot \frac{z^2dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} =$$

$$= \int_0^u \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\cdot\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\cdot\mathrm{sn}^2\,v}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,a\cdot\mathrm{sn}^2\,v}\,dv = \frac{1}{2}\ln\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)} + u\,Z(a),$$

unde $Z(w)$ este funcția lui Jacobi, analogă cu funcția lui Weierstrass $\zeta(u)$, și este legată de Θ prin relația

$$Z(w) = \frac{\Theta'(w)}{\Theta(w)},$$

analog cu relația

$$\zeta(u) = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}$$

din teoria lui Weierstrass.
Funcția

$$\Pi(u; a) = \frac{1}{2} \ln \frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)} + u Z(a)$$

joacă în teoria lui Jacobi rolul funcției

$$\frac{1}{2} \ln \frac{\sigma(u-a)}{\sigma(u+a)} + u \zeta(a)$$

din teoria lui Weierstrass vezi (87).

Rezultatul nostru poate fi scris deci astfel:

$$I(g_2) = \pm 2 \sqrt{-\frac{3}{\tau}}\, \Pi(u; a). \tag{93}$$

8. Am obținut astfel pentru g_2 relația implicită (86) (cu funcțiile lui Weierstrass)

$$\pm \sqrt{-\frac{3}{\tau}} \left[\ln \frac{\sigma(t-t_0)}{\sigma(t+t_0)} + 2t\zeta(t_0) \right] = r + r_0, \tag{94}$$

unde

$$t = \mathfrak{S}^{-1}\left(\frac{6\gamma}{\sqrt{-g_2}} + 1\right) = \int_{\frac{6\gamma}{\sqrt{-g_2}}+1}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - 12s - 8(18\tau\gamma^2 - 1)}}, \quad \mathfrak{S}(t_0) = 1, \tag{95}$$

sau relația (93) (cu funcția lui Jacobi)

$$\pm 2 \sqrt{-\frac{3}{\tau}}\, \Pi(u; a) = r + r_0, \tag{96}$$

unde

$$\operatorname{sn}(a; k) = \sqrt{\frac{1-e_3}{e_2-e_3}}, \tag{97}$$

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

$$z^2 = \frac{e_1 - e_3}{\dfrac{6\gamma}{\sqrt{-g_2}} + 1 - e_3}. \tag{98}$$

9. Ținînd seama că

$$\frac{g_2''}{g_2} - \frac{1}{2}\left(\frac{g_2'}{g_2}\right)^2 = 2\frac{(\sqrt{g_2})''}{\sqrt{g_2}},$$

transcriem ecuația (72) astfel

$$\frac{(\sqrt{g_4})''}{\sqrt{g_4}} + 2\frac{(\sqrt{g_2})''}{\sqrt{g_2}} = -\chi_1. \tag{99}$$

Din (78) sau (77) avem

$$(\sqrt{g_2})' = \pm\sqrt{-\frac{\tau}{3}g_2 - 1 + 2i\gamma\, g_2^{-1/2}}, \tag{100}$$

de unde (folosind din nou relația precedentă)

$$(\sqrt{g_2})'' = -\frac{1}{3}\tau\sqrt{g_2} - \frac{i\gamma}{g_2} \tag{101}$$

și

$$\frac{(\sqrt{g_2})''}{\sqrt{g_2}} = -\frac{\tau}{3} - \frac{\gamma}{g_2\sqrt{-g_2}}.$$

Introducînd în (99) avem

$$\frac{(\sqrt{g_4})''}{\sqrt{g_4}} - \frac{2\gamma}{g_2\sqrt{-g_2}} - \frac{2\tau}{3} + \chi_1 = 0. \tag{102}$$

10. Din ecuațiile (72) și (74) obținem prin scădere

$$\frac{g_2''}{g_2} - \frac{1}{2}\left(\frac{g_2'}{g_2}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{g_2'}{g_2}\frac{g_4'}{g_4} = \chi_4 - \chi_1,$$

de unde

$$\left(\ln\frac{g_2'}{\sqrt{g_2 g_4}}\right)' = \frac{\chi_1 - \chi_4}{(\ln g_2)'}. \tag{103}$$

Dacă (a se vedea și (76))

$$\chi_1 = \chi_4 = -\chi_2 = -\chi_3 = -\tau, \tag{104}$$

ecuația (103) ne dă

$$\sqrt{g_4} = \text{const.}\,\frac{g_2'}{\sqrt{g_2}} = 2\ \text{const.}\ (\sqrt{g_2})'.$$

Constanta se găsește din condiția ca la infinit să avem metrica galileană

$$(g_4 = c^2,\ g_2 = -r^2).$$

Aceasta ne dă

$$\sqrt{g_4} = -ic\,(\sqrt{g_2})' = c\,(\sqrt{-g_2})'. \tag{105}$$

Folosind relaţia (100) putem astfel exprima g_4 în funcţie de g_2

$$g_4 = c^2\left(1 - \frac{2\gamma}{\sqrt{-g_2}} + \frac{\tau}{3} g_2\right), \tag{106}$$

unde g_2 este dat implicit de expresiile găsite mai sus (93) sau (95). Observăm că această relaţie între g_4 şi g_2 (în cazul (104)) rămîne valabilă nu numai pentru $g_1 = -1$ (aşa cum am stabilit-o aici), ci şi în cazul alegerii $g_2 = -r^2$, cînd ne dă direct expresia lui g_4 în funcţie de r (vezi mai jos (116)).

Metrica se poate scrie

$$ds^2 = -dr^2 + g_2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) + c^2\left(1 - \frac{2\gamma}{\sqrt{-g_2}} + \frac{\tau}{3} g_2\right) dt^2 \tag{107}$$

unde nu figurează decît g_2.

11. Dacă în sistemul de ecuaţii (68), (69), (70) fixăm alegerea sistemului de coordonate punînd

$$g_2 = -r^2, \tag{108}$$

obţinem

$$\frac{g_4''}{g_4} - \frac{1}{2}\left(\frac{g_4'}{g_4}\right)^2 - \frac{g_1'}{g_1}\left(\frac{2}{r} + \frac{1}{2}\frac{g_4'}{g_4}\right) = 2\chi_1 g_1, \tag{109}$$

$$\frac{1}{r}\left(\frac{g_4'}{g_4} - \frac{g_1'}{g_1}\right) + \frac{2(g_1+1)}{r^2} = 2\chi_2 g_1, \tag{110}$$

$$\frac{g_4''}{g_4} - \frac{1}{2}\left(\frac{g_4'}{g_4}\right)^2 + \frac{2}{r}\frac{g_4'}{g_4} - \frac{1}{2}\frac{g_1'}{g_1}\frac{g_4'}{g_4} = 2\chi_4 g_1. \tag{111}$$

Putem găsi ecuaţia diferenţială pentru g_1 în modul următor. Scădem prima ecuaţie din ultima:

$$\frac{1}{r}\left(\frac{g_4'}{g_4} + \frac{g_1'}{g_1}\right) = (\chi_4 - \chi_1)\, g_1. \tag{112}$$

Eliminăm acum g'_4/g_4 de aici şi din a doua ecuaţie (110)

$$\frac{g_1'}{g_1} = \frac{g_1+1}{r} - \tau g_1 r. \tag{113}$$

Făcînd schimbarea de variabilă

$$g_1 = -\frac{1}{\rho},$$

avem ecuaţia

$$\rho' = \frac{1-\rho}{r} - \tau r$$

a cărei soluție se găsește ușor

$$\rho = 1 - \frac{2\gamma}{r} - \frac{\tau r^2}{3}, \quad (\gamma = \text{const.}).$$

Prin urmare, soluția ecuației (113), adică g_1, este

$$g_1 = -\frac{1}{1 - \frac{2\gamma}{r} - \frac{\tau r^2}{3}}. \tag{114}$$

Integrînd ecuația (113) putem exprima g_4:

$$g_4 = -\frac{c^2}{g_1} e^{\int (\chi_4 - \chi_1) r g_1 \, dr}, \quad (c = \text{const}) \tag{115}$$

unde g_1 este dat de (114) și integrala se poate scrie mai explicit, de pildă astfel:

$$-\int \frac{(\chi_4 - \chi_1) r \, dr}{1 - \frac{2\gamma}{r} - \frac{\tau r^2}{3}} = \frac{(\chi_4 - \chi_1)}{\tau} \ln (\tau r^3 - 3r + 6\gamma) +$$

$$+ \frac{3 (\chi_4 - \chi_1)}{\tau} \int \frac{dr}{\tau r^3 - 3 r + 6\gamma}.$$

Dacă (a se vedea (104))

$$\chi_4 = \chi_1 = -\chi_2 = -\chi_3 = -\tau,$$

avem

$$g_4 = c^2 \left(1 - \frac{2\gamma}{r} - \frac{\tau r^2}{3}\right). \tag{116}$$

Observăm că această expresie a lui g_4 se obține imediat din expresia (106) a lui g_4 găsită mai sus, punînd acolo $g_2 = -r^2$.

Metrica se poate scrie prin urmare astfel

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{1 - \frac{2\gamma}{r} - \frac{\tau r^2}{3}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta \, d\varphi^2) +$$

$$+ c^2 \left(1 - \frac{2\gamma}{r} - \frac{\tau r^2}{3}\right) dt^2. \tag{117}$$

Pentru $\tau = 0$, formulele (114), (116), (117) ne dau soluția Schwarzschild ($\gamma > 0$), după cum era și de așteptat.

Din (117) se vede că dim $\tau = [L^{-2}]$. Dacă punem $\tau = 1/\varepsilon^2$, ε poate fi interpretat ca o «rază» a particulei considerate.

În cazul $\tau > 0$, maximul lui g_4 este

$$\max g_4 = 1 - \sqrt[3]{9 \tau \gamma^2} \tag{118}$$

și are loc pentru

$$r_m = \sqrt[3]{\frac{3\gamma}{\tau}}. \tag{119}$$

Pentru ca să avem $g_4 > 0$ trebuie satisfăcută condiția

$$9\,\tau\,\gamma^2 < 1 \tag{120}$$

(a se compara cu ultima inegalitate din (82)) și în acest caz avem $g_4 > 0$ pentru $r_1 < r < r_2$ (unde r_1 și r_2 sînt atunci cele două rădăcini pozitive ale expresiei din membrul doi (116), a treia rădăcină fiind negativă).

Dacă $\tau < 0$, vom avea satisfăcută condiția $g_4 > 0$ pentru $r > r_0$, unde r_0 ($r_0 > 0$) este singura rădăcină a expresiei din membrul doi (116).

Tema — de a aplica teoria lui Rumer la cazul static cu simetrie centrală — a fost propusă de prof. A. Popovici.

К ЗАДАЧЕ О СТАТИЧЕСКОМ ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧЕСКОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В работе решается система уравнений Румера (26)—(29), установленная в [3], в частном случае центральной симметрии, причем предполагается, что класс римановой поверхности равен 1, а дифференциальные формы имеют вид (2)—(4) и (32). Система приводится к (65)—(67) или (68)—(70). В системе координат $g_{11} = -1$ решение определяется равенствами (94), (95) или (96)—(98); в системе координат $g_{22} = -r^2$ решение определяется метрикой (117).

AU SUJET DU PROBLÈME DU CHAMP GRAVITATIONNEL STATIQUE À SYMÉTRIE SPHÉRIQUE

(RÉSUMÉ)

L'Auteur résoud dans ce travail le système d'équations de Rumer (26)—(29), établi dans [3], pour le cas particulier de la symétrie sphérique dans l'hypothèse que l'espace riemmanien est de classe 1 et que les formes différentielles sont du type (2)—(4) et (32). Le système se réduit alors à (65)—(67) ou (68)—(70). Dans le système de coordonnées $g_{11} = -1$, la solution est donnée par (94), (95) ou (96)—(98); dans le système de coordonnées, $g_{22} = -r^2$, la solution est donnée par (117).

BIBLIOGRAFIE

1. L. Landau, E. Lifschitz, *Teoria polia*. Gostehizdat, Moscova-Leningrad, 1948.
2. H. Reissner, *Über die Eigengravitation des elktrischen Feldes nach Einsteinschen Theorie*. Ann. der Physik, 1916, vol. 50, nr. 9, p. 106.
3. G. Rumer, *Trudî seminara po vectornomu i tenzornomu analizu*. Moscova, 1937.
4. N. Ahiezer, *Elementî teorii elipticeskih funcții*, Gostehizdat, Moscova-Leningrad, 1948.
5. E. Jahnke u. F. Emde, *Funktionentafeln (mit Formeln und Kurven)*. 3-te Aufl. Verlag von Teubner, Leipzig-Berlin, 1938.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE FIZICĂ
Tomul VI, nr. 1, 1955

CERCETĂRI EXPERIMENTALE ASUPRA PROPRIETĂŢILOR MAGNETICE ALE ALIAJELOR SINTERIZATE AL—NI—FE*)

DE

ELENA LĂBUŞCĂ şi TEODOR TEITEL

I. Influenţa granulaţiei asupra proprietăţilor magnetice

Pînă în prezent nu există suficiente date experimentale care să clarifice complet structura aliajelor Al—Ni—Fe, caracterizate prin proprietăţi magnetice remarcabile şi de asemenea nu sînt clarificate o serie de probleme care se referă la stările de echilibru ale acestor aliaje. În acelaşi timp, din literatura de specialitate [1], [2], [3], reiese că nu există încă o explicaţie unitară şi general valabilă, care să clarifice caracterul transformărilor ce determină apariţia forţei coercitive ridicate într-un aliaj feromagnetic.

În lucrarea de faţă s-a căutat să se găsească o serie de elemente utile pentru clarificarea în special al ultimului punct menţionat mai sus, căutînd să se stabilească experimental influenţa anumitor factori fizici asupra proprietăţilor magnetice ale aliajelor Al—Ni—Fe.

Studiul sistemului ternar Al—Ni—Fe a luat o deosebită importanţă, în special în ultimul timp, ca urmare a utilizării în industrie a aliajelor Al—Ni—Fe pentru magneţi permanenţi, aparţinînd atît acestui sistem, cît şi sistemelor care derivă din acesta (Al—Ni—Fe—Co, Al—Ni—Fe—Co—Cu—Ti etc.). Aliajele de acest tip se caracterizează în primul rînd prin valori remarcabile ale forţei coercitive şi ale inducţiei remanente. Transformările structurale ale acestor aliaje au fost obiectul a numeroase studii, care au avut ca scop atît explicarea cauzelor care determină existenţa magnetismului remanent în aceste aliaje, cît şi stabilirea unor condiţii optime de elaborare şi tratament termic pentru a obţine valori cît mai ridicate ale proprietăţilor magnetice.

În cazul aliajelor Al—Ni—Fe obţinute prin topire şi turnare, s-a reuşit să se varieze proprietăţile magnetice, variind compoziţia de bază şi tratamentele termice aplicate aliajelor respective şi s-au găsit valori maxime ale forţei coercitive prin stabilizarea la temperatura ordinară a unei anumite structuri.

Pentru aliajul Fe_2NiAl, A. I. Bradley şi A. Taylor [4] au emis ipoteza că acest aliaj este format dintr-o fază unică la temperaturi înalte şi anume o soluţie solidă omogenă Fe_2NiAl, care se descompune în două faze cînd este răcită cu o anumită viteză, una din faze fiind foarte aproape de fierul pur.

---

*) Lucrare prezentată Institutului de fizică la data de 2 martie 1954.

Tratamentul termic trebuie să condiționeze precipitarea în « insule » mici a fazei bogate în fier, reacția de descompunere a soluției solide presupunîndu-se a fi următoarea:

$$3.25\ (Fe_{50}Ni_{25}Al_{25}) \rightleftarrows (Fe_{95}Ni_{2,5}Al_{2,5}) + 2.25\ (Fe_{30}Ni_{35}Al_{35})$$

sau soluția solidă omogenă $\rightleftarrows \beta + \beta_2$.

A. I. Bradley și A. Taylor au identificat pe cale röntgenografică numai faza β, foarte apropiată de fierul pur. Recent [2] a fost identificată și cealaltă fază a descompunerii, β_2, bogată în Ni—Al, constatîndu-se că ea concordă cu datele presupuse anterior [4], care o situau aproape în centrul diagramei ternare ($Fe_{30}Ni_{35}Al_{35}$). Această descompunere în două faze, destul de distanțate în diagrama de echilibru, provoacă o tensionare intensă în materialul magnetic, tensionare care conduce la apariția forței coercitive maxime.

Acest mecanism a fost confirmat și printr-o serie de lucrări recente. A. G. Rachstadt [3], studiind transformările structurale ale aliajelor Fe—Ni—Al (+ Co, Cu, Ti) a stabilit că la temperaturi înalte aceste aliaje sînt formate dintr-o soluție solidă omogenă și că tratamentele termice cele mai indicate pentru a produce o forță coercitivă maximă sînt acelea care provoacă o descompunere a soluției solide, cu formarea de particule, de o anumită formă, ale fazei feromagnetice β, distribuite în faza paramagnetică β_2.

A. G. Rachstadt a folosit două tipuri de tratamente termice și anume: cel *unar*, ce constă dintr-o încălzire pînă în domeniul soluției solide, urmată de o răcire cu o viteză controlată și cel *binar*, ce constă dintr-o încălzire la aceeași temperatură, o răcire rapidă, urmată de o revenire ulterioară la 500 ... 700°C. În urma acestor tratamente termice, el a constatat diferențe la valorile forței coercitive obținute, pentru același aliaj, prin tratament unar față de cel binar. Aceste constatări l-au determinat pe Rachstadt să tragă concluzia că starea de fază a aliajelor studiate nu este complet clarificată și că există ipoteza că valorile diferite observate pentru Hc pot fi rezultatul atît al *unei stări diferite, de fază cît și urmarea unor forme diferite de separare a particulelor fazei feromagnetice* β.

În ultimul timp însă, a luat o largă răspîndire elaborarea magneților de acest tip, prin sinterizare, întrucît această nouă tehnologie elimină o serie de incoveniente care intervin inerent în cazul elaborării prin turnare. Proprietățile magnetice ale aliajelor sinterizate sînt, în general, inferioare proprietăților magnetice ale aliajelor turnate de aceeași compoziție cu circa 10 ... 20 %, în funcție de condițiile de lucru [5], [6], [7]. În cazurile în care însă tehnologia de elaborare era perfect pusă la punct, s-au obținut prin sinterizare aceleași valori ale forței coercitive și inducției remanente, ca și la aliajele turnate și tratate apoi termic.

Trebuie sezisat acest lucru, pentru a preciza că diferența de 10 ... 20% în valoarea proprietăților magnetice, între sinterizare și turnare, se datorește numai condițiilor de lucru (caracteristicile pulberilor folosite, presiunea, temperatura și durata sinterizării etc.) și practic în materialul sinterizat putem avea aceleași valori ale caracteristicilor magnetice, ca și în aliajul turnat.

Pe baza acestui fapt stabilit experimental [5], [6], [7], am sezisat un aspect interesant și care a format punctul de plecare la prezenta lucrare și anume: *la aliajele sinterizate, valorile maxime ale proprietăților magnetice se obțin dintr-odată, după sinterizare și magnetizare, deci fără a face apel la tratamente termice pentru a determina anumite transformări structurale.* Deci, stării structurale obținute în aliajul turnat după tratamentul termic, îi corespunde o stare structurală în aliajul sinterizat, capabilă să condiționeze o valoare tot atît de ridicată a forței coercitive.

In mod evident se pune problema de a lămuri dacă aceste stări structurale (aliaj turnat—aliaj sinterizat) sînt similare sau ele produc, prin mecanisme diferite, același grad de tensionare în rețea, tensionare care ar fi cauza forței coercitive.

Pe baza acestor considerente, am făcut ipoteza că analizînd variațiile proprietăților magnetice ale aliajelor sinterizate în funcție de variația anumitor factori caracteristici metodei de elaborare, vom putea găsi elemente care să contribuie la explicarea apariției forței coercitive în aliajele de acest tip.

LUCRĂRI EXPERIMENTALE

Ca prim aspect al acestui studiu, în lucrarea de față s-a căutat să se influențeze proprietățile magnetice prin variația granulației pulberilor metalice. Pentru a nu avea prea multe variabile care să denatureze interpretarea rezultatelor, s-a ales pentru studiu sistemul ternar Al—Ni—Fe

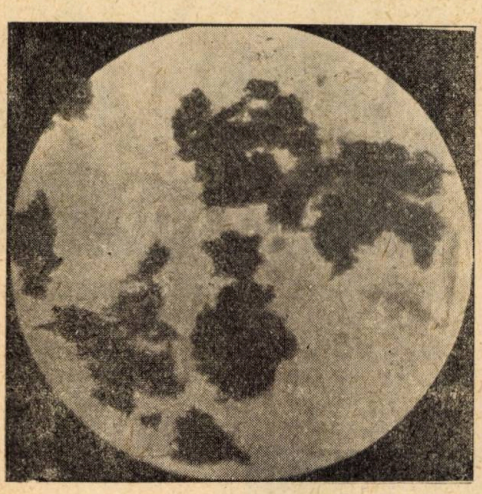


Fig. 1. — Pulbere de fier din oxalat. × 300.

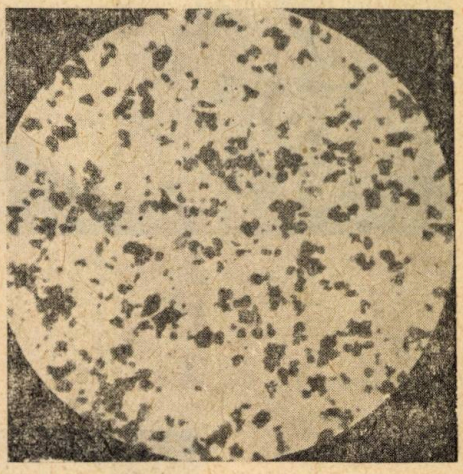


Fig. 2. — Pulbere de nichel din oxalat. × 300.

și din acest sistem, aliajul Fe_2—Ni—Al, care este tipul de aliaj cel mai studiat din acest sistem, fiind caracterizat prin valori remarcabile ale forței coercitive și inducției remanente.

Aliajele de acest tip s-au elaborat prin tehnica metalurgiei pulberilor [5], [6], [7], plecînd de la pulberi de Fe și introducînd aluminiul sub forma unui prealiaj Al—Fe sau Al—Ni. S-a căutat să se varieze granulația pulberilor folosite și s-a început prin a menține constante caracteristicile granulare a două pulberi, variind mărimea particulelor numai pentru cea de a treia pulbere. S-a ales ca variabilă granulația pulberii de prealiaj Al—Ni, luînd în considerație faptul că introducerea aluminului în aliajele Fe—Ni provoacă apariția forței coercitive.

S-a plecat de la pulberile metalelor respective și anume:

1. *Fierul* s-a preparat prin reducerea oxalatului de fier pur în hidrogen, obținînd o pulbere formată din particule de formă aciculară dantelată, cu tendința puternică de a forma aglomerate cristaline cu aspect spongios (fig.1). Dimensiunile particulelor individuale sînt cuprinse între 5—20 μ.

2. *Nichelul* s-a preparat în mod analog prin reducerea oxalatului de nichel. Pulberea obținută este formată din particule de formă poliedrică neregulată (fig.2) cu dimensiunile cuprinse între 5...15μ.

3. *Aluminiul* s-a introdus în aliajele respective sub forma unei pulberi obținute prin măcinarea aliajului Al—Ni, preparat prin topire și turnare.

Atît lucrările noastre experimentale cît și literatura de specialitate [5], [6], [7] au arătat că prin introducerea aluminiului se reduce aptitudinea la sinterizare a metalelor Fe și Ni, care altfel sinterizează perfect. Această întîrziere a sinterizării se datorește în primul rînd faptului că Al are o tendință puternică de oxidare și particulele metalice Fe,Ni și Al nu pot veni în contact intim din cauza peliculelor fine de oxizi care înconjoară fiecare particulă de Al.

Pentru a compensa acest inconvenient trebuie luate în considerație următoarele puncte:

a) Prealiajul folosit trebuie să fie suficient de friabil, pentru a putea fi pulverizat prin procedee mecanice și a-l aduce la finețea necesară.

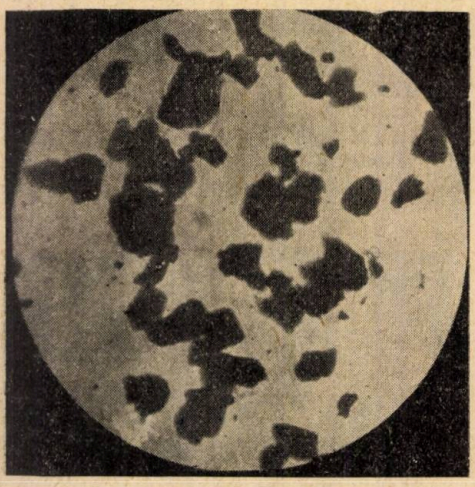


Fig. 3. — Pulbere de prealiaj Al—Ni, granulație mare. × 300.

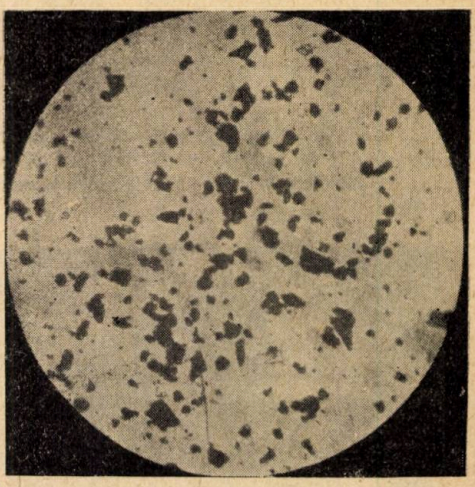


Fig. 4. — Pulbere de prealiaj Al—Ni, granulație medie. × 300.

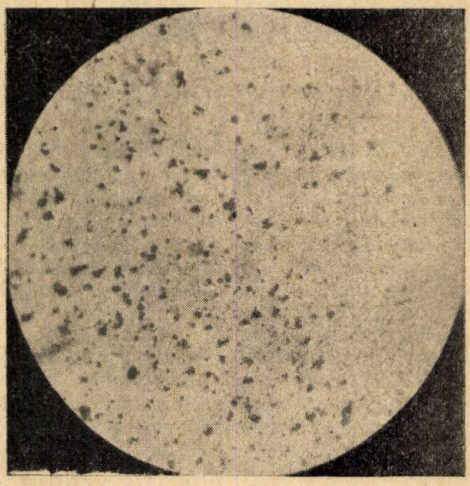


Fig. 5. — Pulbere de prealiaj Al—Ni, granulație fină. × 300.

b) Punctul de topire al prealiajului trebuie să fie aproximativ de același ordin de mărime cu cel al aliajului final Al—Ni—Fe, pentru a evita formarea la sinterizare a cantităților mari de fază lichidă, care antrenează apariția zonelor heterogene în aliaj.

c) Compoziția prealiajului trebuie să fie aleasă în așa fel încît, pe diagrama de echilibru, ea să nu taie un punct de topire la maximum, deci să nu corespundă unei combinații cu punct de topire congruent, ci să taie diagrama de echilibru pe orizontala unui peritectic. Aceasta întrucît o combinație cu punct de topire congruent devine fluidă numai deasupra punctului de topire, pe cînd într-o combinație care are o transformare peritectică, apar cantități de fază fluidă la temperatura reacției peritectice, deci înainte de topire. Aceste cantități reduse de fază fluidă nu duc la apariția zonelor heterogene, ci din contra, tind să învingă forțele de forfecare care se opun sinterizării.

S-au făcut o serie de încercări de elaborare, atît a aliajelor Fe—Al, cît și Ni—Al; rezultatele cele mai bune în cazul studiului de față fiind obținute cu prealiaje Ni—Al conținînd între 46—52%Al, fără a epuiza însă posibilitatea de a găsi un alt aliaj cu caracteristici mai corespunzătoare scopului urmărit.

Din pulberea de prealiaj s-au putut separa trei fracțiuni de particule cu granulație diferită, prin clasare în curent ascendent de aer, și anume:

1. *Fracțiunea de granulație mare*, cu particule între 30 și 50μ, majoritatea fiind formată din particule de circa, 40μ (fig.3).

2. *Fracțiunea de granulație medie* cu particule între 5 și 15μ majoritatea particulelor fiind de circa 10μ (fig.4).

3. *Fracțiunea de granulație fină* cu particule între 5—6μ majoritatea particulelor fiind de circa 3μ (fig.5).

Plecînd de la pulberile indicate mai sus, s-au elaborat trei serii de aliaje Fe_2—Ni—Al menținînd constantă calitatea pulberilor de Fe și Ni și variind granulația pulberii Al—Ni. S-au menținut constante toate condițiile de lucru și anume: tratamentul pulberilor înainte de presare, presiunea folosită, temperatura de sinterizare, precum și durata sinterizării.

Amestecul de pulberi a fost omogenizat timp de trei ore, apoi a fost supus unui tratament termic în hidrogen pentru a-i mări aptitudinea la presare și apoi s-au presat corpuri de probă la 12t/cm². Sinterizarea s-a făcut în hidrogen la 1250°C timp de trei ore. S-au obținut corpuri de probă de formă cilindrică, cu diametrul 14,5 mm, și lungimea 20...23 mm.

Corpurile de probă obținute au fost magnetizate și supuse măsurătorilor magnetice în starea în care au rezultat după sinterizare, fără a le aplica vreun tratament termic care să le modifice structura obținută prin sinterizare. S-au măsurat: inducția remanentă, forța coercitivă și produsul BH, acestea fiind caracteristicile după care se poate aprecia calitatea materialului pentru magneți permanenți.

Metodele de măsură sînt descrise pe larg în partea a II-a a lucrării de față. Menționăm numai că valorile măsurate pentru B_r sînt valorile inducției remanente reale și corespund unui factor de demagnetizare destul de mare, întrucît măsurătorile s-au făcut în circuit magnetic deschis.

Toate măsurătorile s-au făcut însă în aceleași condiții pentru toate probele și întrucît formele și dimensiunile corpurilor de probă au fost aceleași în toate cazurile, valorile proprietăților magnetice obținute ne dau indicațiile cantitative relative necesare pentru interpretarea variației proprietăților magnetice în aliajele studiate.

De fapt, cunoașterea absolută a forței coercitive și a inducției remanente, ca valori numerice în sine, are importanță mult mai mică decît studiul variației acestor proprietăți magnetice în funcție de diferiți parametri, întrucît studiul acestei variații ne poate da indicații utile asupra mecanismului apariției acestor proprietăți magnetice.

În tabloul nr. 1 sînt date valorile lui B_r, N_c BH_m și maxim obținute pentru o serie de trei aliaje Fe_2 Ni—Al corespunzătoare celor trei granulații diferite a prealiajului Al—Ni, iar în tabloul nr.2, valorile aceloraș caracteristici, obținute pentru trei aliaje de același tip, însă după ce au fost supuse unui tratament mecanic, respectiv la o represare la 12 t/cm², ulterioară sinterizării.

În figurile 6 și 7 sînt date curbele de magnetizare obținute pentru aceleași aliaje. S-au ridicat curbele de demagnetizare în cadranul II al ciclului histerezis și curba produsului BH, reprezentînd energia magnetică a materialului, corespunzătoare valorilor inducției B și cîmpului H din cadranul II.

DISCUȚIA REZULTATELOR OBȚINUTE

Examinînd atît valorile proprietăților obținute cît și curbele de demagnetizare ale aliajelor Fe_2Ni—Al, în care s-a variat mărimea particulelor pulberii Al—Ni, se constată o variație a forței coercitive și a inducției remanente, pe măsură ce particulele pulberii Al—Ni sînt mai fine.

Forma curbelor de magnetizare este aceeași, curbele obținute pentru aceeași serie de aliaje fiind aproape paralele (A||B||C), ceea ce este și normal, întrucît aliajele sînt de același tip (Fe_2Ni—Al) și forma curbei de magnetizare este condiționată în primul rînd de caracteristicile materialului.

Din rezultatele obținute reiese clar că mărimea particulelor Al—Ni are o influență asupra proprietăților magnetice ale aliajelor sinterizate $F_{e2}Ni$—Al, influență care se manifestă printr-o variație a valorilor lui H_c și B_r, deci printr-o variație a gradului de ireversibilitate a procesului de magnetizare. Pentru a interpreta natura acestei influențe am apelat în primul rînd la explicațiile date pînă în prezent în literatura de specialitate asupra cauzei apariției forței coercitive în aliajele de acest tip. Explicațiile de acest gen se referă însă numai la aliajele respective obținute prin turnare și au fost menționate la începutul lucrării de față [1], [2], [3], [4].

Tabloul nr. 1

Valorile proprietăților magnetice ale aliajelor sinterizate Fe_2Ni—Al (sinterizare timp de 3 ore la 1250°C)

Tipul aliajului	Granulația prealiajului Al-Ni	H_c oersted	B_r gauss	$BH_{max.} \cdot 10^3$ gauss × oersted
A	Particule între 1,5— 6 μ	185	1130	57*
B	Particule între 5 —15 μ	180	1080	51
C	Particule între 30 —50 μ	157	932	40,5

Tabloul nr. 2

Valorile proprietăților magnetice ale aliajelor sinterizate Fe_2Ni—Al reprесate la 12 t/cm²

Tipul aliajului	Granulația prealiajului Al-Ni	H_c oersted	B_r gauss	$BH_{max.} \cdot 10^3$ gauss × oersted
D	Particule între 1,5— 6 μ	205	1010	56,3
E	Particule între 5 —15 μ	197	915	51,7
F	Particule între 30 —50 μ	173	752	36,9

În rezumat, la aliajele turnate și tratate termic, apariția forței coercitive H_c este condiționată de existența unei anumite stări tensionate în rețea, datorită precipitării în fază incipientă a unei noi faze β, feromagnetică și gradului de dispersie al acestei faze β în baza paramagnetică, faza β_2.

În cazul aliajelor sinterizate studiate, situația este inversată, întrucît aici avem o fază *paramagnetică* (~ 30% Al—Ni) *dispersată într-o bază feromagnetică* (~ 70 % Fe+Ni), deci este o diferență esențială între starea structurală a aliajelor sinterizate studiate față de cele turnate. În aliajele sinterizate studiate s-a menținut după sinterizare o stare similară cu cea inițială, deci cu starea comprimatului de pulberi dinainte de sinterizare. Această stare corespunde unui amestec intim de particule metalice Fe+Ni+Al—Ni, aduse în contact intim prin presare și supuse unui tratament termic, în timpul căruia suprafețele de contact s-au mărit, însă particulele și-au păstrat totuși caracterul lor individual. Aceasta

din cauză că difuziunea intermetalică între particule nu a avut loc decît în măsură redusă, dacă luăm în considerație faptul că sinterizarea a durat numai trei ore.

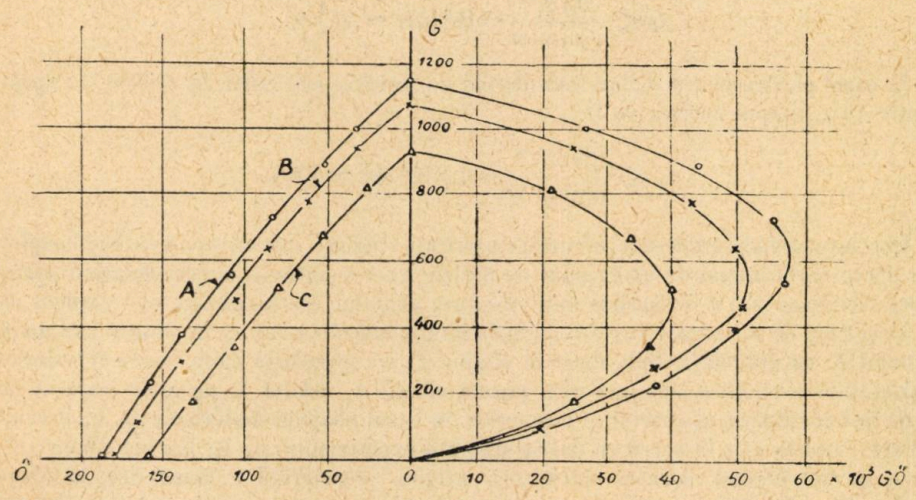


Fig. 6. — Curbele $B=f(H)$ și $BH=f(B)$ ale aliajelor sinterizate A,B,C, (tabloul nr. 1).

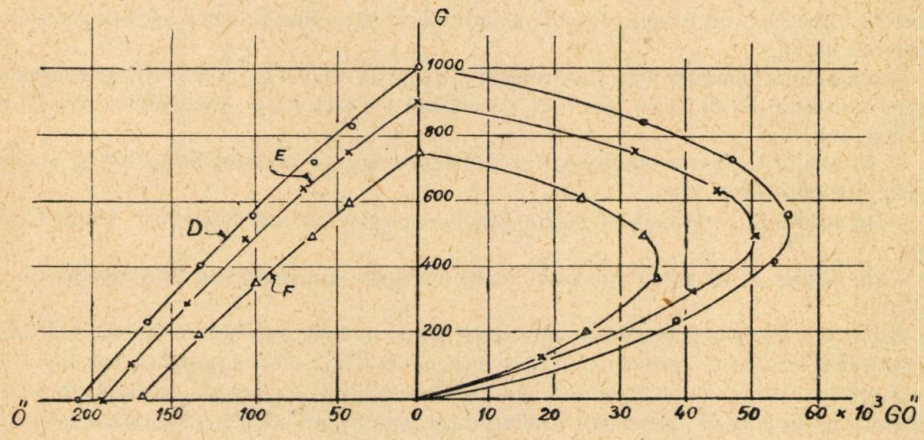


Fig. 7. — Curbele $B=f(H)$ și $BH=f(B)$ ale aliajelor sinterizate represate D,E,F, (tabloul nr.2).

Într-adevăr, timpul de difuziune maxim necesar pentru omogenizarea structurii, ar fi

$$t \cong \frac{\Delta x^2}{D},$$

unde Δx este intervalul în care are loc difuzia, iar D este coeficientul de difuzie, care în cazul difuziunii în fier, la 1250°C este $\simeq 0.9.10^{-10}$ cm²/s.

Considerînd un interval minim necesar pentru difuzie, de aproximativ 30 μ, în cazul particulelor mari, timpul de difuzie necesar va fi:

$$t_1 \leqslant \frac{9.10^{-6}}{0{,}9.10^{-10}} = 10^5 \text{ sec.} \simeq 25 \text{ ore.}$$

În cazul particulelor mai fine, considerînd un interval mai redus de difuzie, de aproximativ 15 μ, timpul necesar va fi

$$t_2 \leqslant \frac{2.25.10^{-6}}{0{,}9.10^{-10}} = 2{,}5.10^4 \text{ sec} \simeq 7 \text{ ore.}$$

Deci este probabil că în cazul aliajelor sinterizate studiate, difuzia nu a avut loc complet și se poate vorbi numai de un început de difuzie, care a antrenat o consolidare a particulelor metalice, fără a omogeniza însă structura aliajului. De asemenea, este evident că în același timp de sinterizare (trei ore) difuzia intermetalică a avut loc în măsură mai mare în aliajul A, cu granulație fină, decît în aliajul C, cu granulație mare. Întrucît valorile proprietăților magnetice sînt mai mari pentru aliajul A, rezultă că un grad înaintat de difuzie îmbunătățește proprietățile magnetice, în cazul aliajelor sinterizate de tipul celor studiate. Aceasta este în acord cu datele stabilite experimental de R. Kalischer [8], care a studiat efectul duratei sinterizării asupra proprietăților magnetice, în aliaje Al—Ni—Fe, obținînd o îmbunătățire a proprietăților magnetice prin mărirea duratei sinterizării. Pentru cinci ore de sinterizare, el a obținut $H_c = 200$ oerstezi, iar pentru 20 ore sinterizare $H_c = 320$ oerstezi. Pentru durate de sinterizare mai mari de 40 ore, el a constatat că extinderea duratei sinterizării nu mai influențează proprietățile magnetice în aceeași măsură ca în prima perioadă a sinterizării și nu mai produce variații sensibile în valorile lui H_c.

Examinînd comparativ structura celor trei tipuri de aliaje (fig. 8, 9 și 10), se constată că structura este din ce în ce mai fină, pe măsură ce granulația particulelor Al—Ni a fost mai fină.

— În aliajul C, dimensiunile zonelor distincte omogene maxime ating 100 μ, media zonelor distincte fiind 60 μ.

— În aliajul B, cu granulație medie, zonele omogene maxime ating 50 μ, media fiind 30 μ.

— În aliajul A, cu granulație fină, zonele omogene maxime ating 20 μ, media fiind 10 μ.

Aspectul structural concordă cu aprecierea făcută anterior referitor la faptul că difuzia intermetalică nu a avut loc complet și că se menține în aliaj o stare similară cu cea dinainte de sinterizare, numai cu un grad mai mare de consolidare. În această situație, revenim la ipoteza că în aliajele sinterizate studiate faza paramagnetică (Al—Ni) este dispersată într-o bază feromagnetică (Fe+Ni). Un aspect similar este semnalat și în lucrarea lui J. Skakov [2], care studiind aliaje turnate Fe—Ni—Al, de diferite compoziții, constată că la aliajele de tip $Fe_{70}Ni_{15}Al_{15}$, unde rețeaua de bază este faza Fe și faza dispersată este faza Al—Ni, valorile lui H_c sînt mai mici decît în celelalte aliaje de tip $Fe_{50}Ni_{25}Al_{25}$, unde se separă faza Fe pe un fond bogat în Al—Ni.

Aliajele sinterizate A, B, C, par să verifice același lucru, întrucît valorile obținute pentru H_c (184 oerstezi) sînt mai mici decît valoarea maximă obținută în aliajele turnate Fe_2Ni—Al, care este de circa 320 oerstezi și unde faza feromagnetică este dispersată într-o bază paramagnetică. Deci, aspectele sezisate în lucrarea lui Skakov întăresc presupunerea că în aliajele A, B, C, faza paramagnetică este dispersată într-un fond feromagnetic.

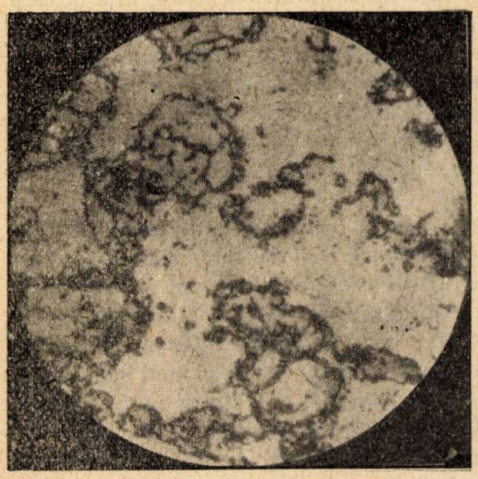


Fig. 8. — Aliajul C, cu granulaţie mare. × 300.

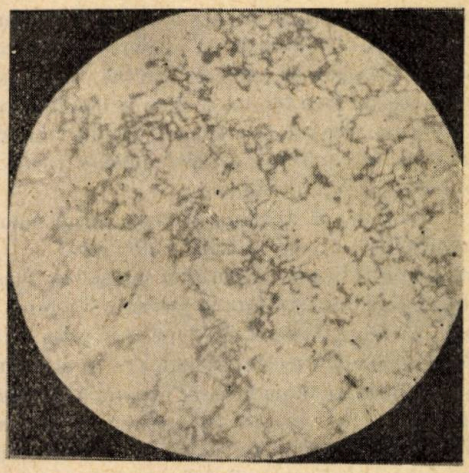


Fig. 9. — Aliajul B, cu granulaţie medie. × 300.

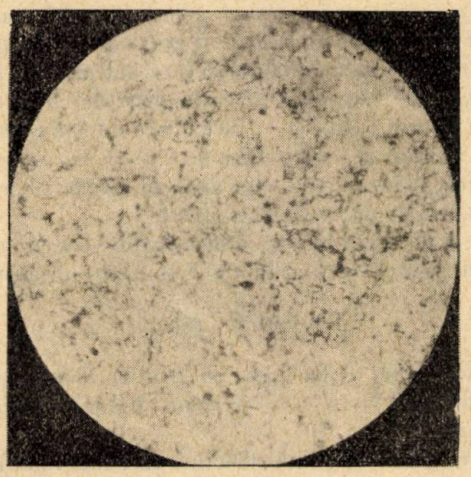


Fig. 10. — Aliajul A, cu granulaţie. fină × 300.

Ceea ce este interesant la aliajele sinterizate studiate, este faptul că la aliaje de aceeași compoziție chimică (Fe_2—Ni—Al) s-au obținut variații în valorile lui H_c, prin variația granulației fazei paramagnetice dispersate Al—Ni. *Deci nu numai natura fazei dispersate ci și forma și gradul ei de dispersie influențează forța coercitivă.* Aceasta este în acord cu ipoteza făcută de A. G. Rachstadt [3] pe care am analizat-o anterior, însă în care el se referă numai la dispersia fazei feromagnetice.

Explicația bazată pe dispersia unei faze feromagnetice într-o bază paramagnetică are însă numai un caracter limitat, fiind valabilă pentru aliajele de un anumit tip. Apariția acestei faze feromagnetice în condiții anumite este într-adevăr capabilă să antreneze valori maxime ale forței coercitive într-un aliaj, după cum s-a constatat și experimental, *însă nu dă explicația general valabilă pentru toate cazurile în care apare o forță coercitivă într-un aliaj feromagnetic.*

Ipoteza, că apariția H_c este condiționată și de alți factori decît de dispersia fazei feromagnetice, este întărită și de faptul că H_c este influențată și de tratamentele mecanice la care este supus materialul magnetic. Pentru a verifica acest lucru, am supus aliajele sinterizate unui tratament mecanic și anume la o represare la 12 t/cm², obținînd o creștere a H_c pînă la 205 oerstezi, după cum reiese din tabloul nr. 2 și din figura 7. Alura curbelor de demagnetizare este diferită de cea a aliajelor dinainte de represare, punînd în evidență o transformare în materialul magnetic, între starea inițială (A, B, C) și starea după represare (D, E, F). Este evident că această creștere a H_c după represare este datorită unei deformări a particulelor, unei tensionări a materialului în anumite regiuni și nu formării unei noi faze cristaline. Indicații asupra acestui gen de tratamente mecanice aplicate aliajelor similare turnate nu am găsit și este explicabil, întrucît aliajele turnate sînt casante și nu suportă compresiunea.

Pe baza acestor date, obținute cu ajutorul aliajelor sinterizate, putem face presupunerea că apariția forței coercitive într-un aliaj feromagnetic *este condiționată în primul rînd de apariția unei stări tensionate în rețeaua cristalină*, indiferent de mecanismul prin care se ajunge la această stare. Evident, aceste mecanisme nu pot produce o forță coercitivă în orice material, ci numai într-un material care îndeplinește *a priori* anumite condiții de compoziție, proprietăți magnetice ale componenților separați, etc.

Ceea ce ar fi comun tuturor cazurilor în care apare o forță coercitivă, ar fi faptul că *aceste mecanisme diferite reușesc să condiționeze în aceeași măsură existența unor frontiere naturale în rețea*, care determină existența unor domenii magnetice mici, cu tensiuni locale puternice și care frînează procesul de demagnetizare.

După Frenkel și Dorfmann, dimensiunile domeniilor magnetice depind numai de dimensiunile întregului corp magnetic și sînt date de formula

$$l \simeq 0{,}01 \sqrt{L}\ \text{cm},$$

unde s-a notat cu l dimensiunea domeniilor, cu L dimensiunea corpului feromagnetic.

Pentru probele studiate ($d = 14{,}5$, $l = 20$ mm) dimensiunile domeniilor, ar trebui să fie între 120—140 μ.

Faptul că în aliajul cu granulație fină structura este mai fină, respectiv rețeaua care delimitează diferitele zone este mai fină, poate însă să conducă la presupunerea că în acest caz s-au creat în aliaj o serie de «frontiere» naturale care ar putea să limiteze extinderea domeniilor magnetice, în perioada de demagnetizare.

Într-adevăr, dacă considerăm o zonă din aliaj, pe o distanță de 100 μ, în cazul aliajului C, cu particule mari, este normală existența unor domenii de 100 ... 140 μ, fiindcă la formarea lui, la demagnetizare, un astfel de domeniu are de trecut numai trei sau patru «frontiere» dintre particule, după cum reiese din microstructură. În schimb în aliajul

A, cu structură fină, pentru formarea unui astfel de domeniu de peste 100 μ, trebuie depășite 20 ... 30 astfel de «frontiere», așa încît se poate presupune că la un moment dat, domeniul nu va mai avea energia magnetică necesară pentru a se extinde, ci își va limita dimensiunile la unele din aceste zone mai puternic tensionate și deci mai greu de depășit—, deci corpul întreg se va demagnetiza mai greu.

Întrucît aliajele sinterizate sînt formate prin aducerea în contact a particulelor metalice respective, este normal, că natura suprafețelor de separație dintre aceste particule este diferită de cea a suprafeței de separație dintre două cristale, sau două zone diferite, într-un aliaj obținut prin topire. Suprafața care delimitează o particulă metalică prezintă o serie întreagă de defecte de rețea (dislocări, fisuri submicroscopice, etc.), accentuate prin deformările plastice la care este supusă pulberea. Aceste suprafețe de separație dintr-un material sinterizat sînt în măsură să creeze zone tensionate în material, care pot să limiteze eventual extinderea domeniilor magnetice.

În concluzie, se poate presupune că *starea tensionată care provoacă apariția forței coercitive este condiționată, în modul cel mai general, de apariția în material a unor zone de separație, a unor «frontiere», care pot să limiteze atît faze diferite* (feromagnetice și paramagnetice) *cît și zone de același fel*, ca în cazul materialelor complet sinterizate. În ambele cazuri însă, aceste zone de separație sînt în măsură să provoace o tensionare de un anumit grad în material, tensionare care frînează procesul de demagnetizare.

Practic, apariția acestor zone de separație poate fi provocată pe diferite căi și anume:

a) prin tratamentul termic aplicat aliajelor turnate, condiționînd apariția unei noi faze, într-un anumit grad de dispersie [1], [2], [3], [4];

b) prin supunerea materialului magnetic la tratamente mecanice capabile să provoace apariția defectelor în material;

c) prin obținerea unei structuri fine de aliaj sinterizat, în care frontierele dintre zone au un caracter special, datorită faptului că sînt limitele inițiale ale particulelor metalice individuale. În cazul unei sinterizări incomplete (difuzie incompletă), proprietățile magnetice se datoresc în primul rînd dispersiei de faze existente, iar în cazul difuziei complete ele se datoresc structurii fine obținute prin sinterizare.

II. Măsurile proprietăților magnetice ale aliajelor Al—Ni—Fe

Metodele de măsurători magnetice utilizate se reduc la determinarea relației dintre inducția B și intensitatea cîmpului de magnetizare H, adică la ridicarea experimentală a curbei de magnetizare și a ciclului de histerezis al materialului respectiv.

În principiu, măsurătoarea proprietăților magnetice se poate face folosind două moduri de manifestare a stării de magnetizare și anume:

a) Determinarea cantității de electricitate indusă într-un circuit de măsură, cînd variază fluxul cîmpului de inducție, sau

b) Măsurătoarea forțelor ponderomotoare în cîmpul magnetic.

În domeniul măsurătorilor magnetice, spre deosebire de celelalte măsurători de mărimi fizice, intervine o dificultate deosebită de îndată ce considerăm un corp magnetizat de dimensiuni finite, căci intensitatea de magnetizare și cîmpul magnetic care produce magnetizarea nu sînt constante în volumul considerat, ci depind de forma corpului.

Pentru a putea efectua măsurători magnetice în care intervine mărimea cîmpului H, se pot folosi două metode. Una constă dintr-o măsurătoare directă a mărimii cîmpului de magnetizare, iar alta se bazează pe calculul valorii acestui cîmp, folosind anumite corpuri de probă, în care acțiunea demagnetizantă a extremităților se poate calcula în mod exact. Aceste forme de corpuri sînt: torul, elipsoidul de rotație și, ca un caz particular, bare cilindrice infinit lungi.

În practică este greu să se efectueze măsurători pe corpuri toroidale sau elipsoide. Ele rămîn să fie folosite numai în cazul măsurătorilor de înaltă precizie. În tehnica măsurătorilor magnetice se folosesc mai ales corpuri de probă de formă cilindrică și de lungime finită, căutînd să se elimine acțiunea demagnetizată a extremităților prin scurtcircuitarea acestora în mod artificial, cu un miez de material magnetic moale.

Vom expune mai jos metodele pe care le-am folosit pentru măsurătoarea proprietăților magnetice ale aliajelor de magneți permanenți de tip Al—Ni—Fe. Ne-a interesat în primul rînd valoarea inducției remanente reale B_r și a forței coercitive H_c, mărimi care determină calitatea materialului pentru magneți permanenți. Am mai efectuat și măsurători pentru determinarea directă a produsului BH, care reprezintă energia magnetică a materialului.

Deoarece probele de material care trebuiau măsurate erau obținute prin presare și sinterizare, raportul dintre dimensiunile transversale și cele longitudinale era apropiat de unitate. Majoritatea pieselor încercate erau cilindri de circa 20 mm lungime și 15 mm diametru, magnetizați paralel cu axa lor.

În cazul acestor forme, calea de determinare a intensității cîmpului de magnetizare prin calcul nu este aplicabilă, căci nici tabelele de formule aproximative nu se referă la rapoarte $\frac{l}{d}$ apropiate de unitate. Am folosit deci metoda miezului magnetic închizînd extremitățile probei magnetizate cu un circuit magnetic din material de mare permeabilitate.

Dacă închidem proba în prealabil magnetizată între cele două piese polare A și B (fig. 11), fluxul magnetului permanent se va închide în cea mai mare parte prin miezul de fier, care prezintă o reluctanță minimă. Deoarece componenta normală a cîmpului de inducție se păstrează la trecerea dintr-un mediu în altul, în intraferul cilindric va exista un cîmp magnetic radial. Dacă miezul de fier moale este astfel dimensionat, încît să nu se satureze la valorile fluxului produs de magnet, cîmpul din intrafer este proporțional cu inducția din magnetul permanent. Pentru a măsura acest flux, în intraferul cilindric d se află o bobină mobilă b străbătută de un curent constant. Deviația bobinei este dată de relația

$$\alpha = \frac{n\,BSI}{9810\;D}\ \text{rad},$$

unde s-a notat cu n, numărul de spire al bobinei mobile, B, inducția în intrafer în gauss, S, suprafața bobinei în cm^2, I curentul prin bobină în A, D cuplul rezistent în g.cm/rad.

Din expresia deviației α se vede că vom putea măsura fluxul din magnetul permanent citind deviația bobinei mobile, dacă menținem curentul I constant

$$B = \frac{9810\,B\alpha}{n\,S\,I} = K\alpha\ \text{gauss},$$

unde constanta

$$K = \frac{9810\,D}{n\,S\,I}$$

se poate determina printr-o măsurare directă a inducției B_r.

Pentru a trasa curba de demagnetizare a materialului, se supune proba unui cîmp de sens opus, pe care l-am obținut cu ajutorul unei bobine mn, așezată concentric cu proba de material magnetic.

In măsurătorile efectuate cu aparatul construit, ale cărui detalii se pot vedea în figura 12, datele obținute sînt de o precizie limitată, din cauza circuitului magnetic din

fier, a existenței unui interfer și a scăpărilor de flux care există în orice circuit neomogen și de secțiune variabilă.

Pentru a studia însă variația proprietăților magnetice la diverse probe de aliaj, dispozitivul construit ne-a permis să facem măsurători comparative suficient de exacte și corespunzătoare cercetării întreprinse, probele folosite având aceleași dimensiuni. Înainte de a trasa curba de demagnetizare a probei, aceasta era magnetizată pînă la saturație,

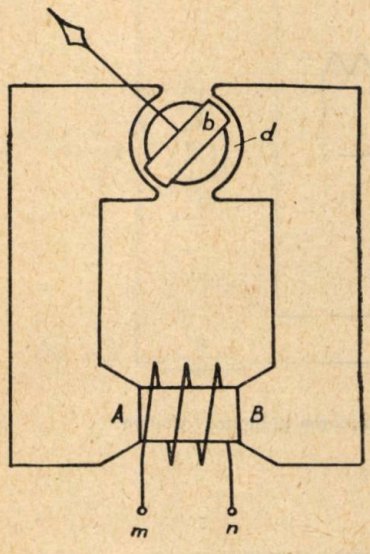


Fig. 11. — Schița aparatului pentru măsurarea inducției.

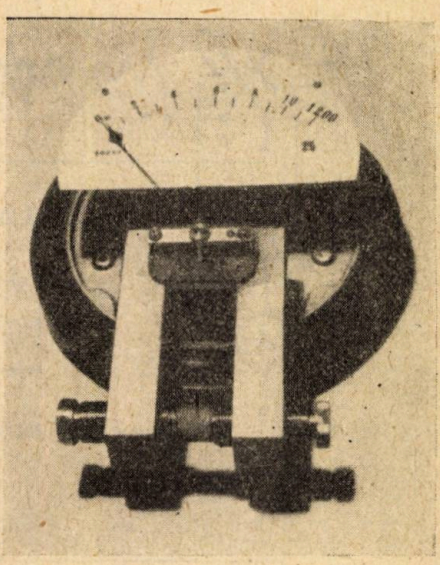


Fig. 12. — Aparatul folosit pentru efectuarea măsurătorilor.

după care măsuram inducția remanentă. Pentru a efectua această măsurătoare, am folosit o bobină de măsură cilindrică plată, cu 200 spire, al cărei diametru interior era egal cu cel al probei.

Bobina având o lățime mică în comparație cu lungimea probei, eroarea comisă, considerînd că tot fluxul magnetului trece prin bobină, este neglijabilă. La scoaterea probei magnetizate din bobina de măsură pînă la o distanță convenabilă, pentru a considera că fluxul care mai străbate bobina este zero, se va induce o cantitate de electricitate

$$q = \frac{n}{R} \Phi_1 = K \Phi_1 .$$

Pentru a măsura cantitatea de electricitate q și deci a putea deduce valoarea fluxului Φ, am folosit un galvanometru balistic CB în montajul din figura 13.

In circuitul de măsură am intercalat o rezistență de protecție R, un șunt S pentru amortizarea oscilațiilor galvanometrului precum și bobina CD, identică cu AB, pentru etalonarea circuitului. Pentru etalonare am folosit un solenoid, cu ajutorul căruia am putut calcula constanta dispozitivului $K = 12{,}4$ Maxwell/div.

Pentru calculul inducției remanente, am raportat fluxul măsurat la secțiunea probei

$$B_r \text{ gauss} = \frac{\Phi \text{ maxwell}}{S \text{ cm}^2} .$$

Cifra pe care o obţinem prin această metodă balistică este inducţia aparentă. După efectuarea acestei măsurători, proba era introdusă între polii circuitului magnetic în interiorul bobinei de demagnetizare AB (din fig. 14).

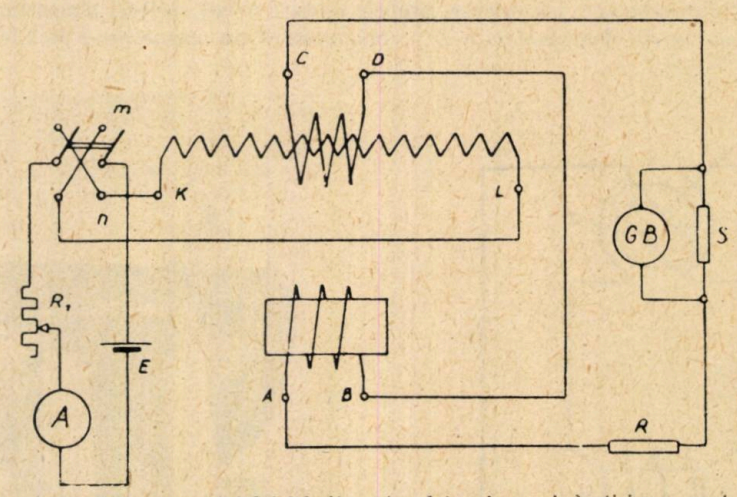


Fig. 13. — Schema montajului folosit pentru determinarea inducţiei remanente.

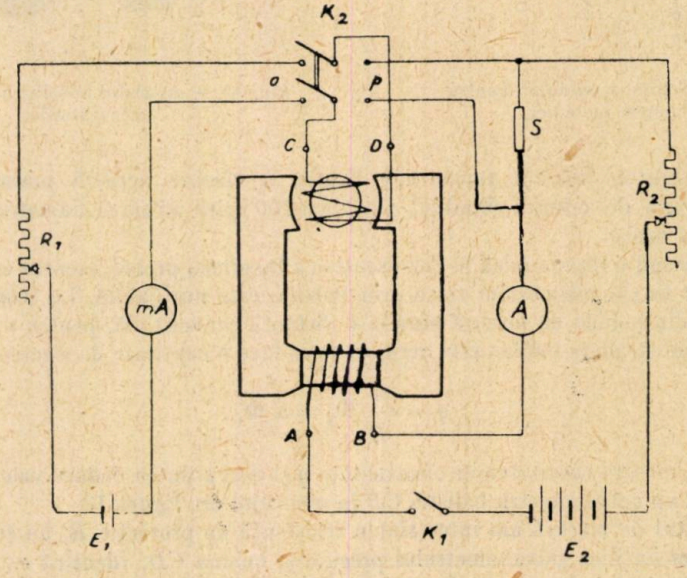


Fig. 14. — Schema montajului folosit pentru trasarea curbelor. $B = f(H)$ şi $BH = f(B)$.

La închiderea comutatorului K_2 pe poziţia C bobina mobilă CD din intraferul cilindric se va roti datorită cuplului ce se naşte între curentul ce o străbate, debitat de sursa constantă E_1 şi cîmpul de inducţie din intrafer.

Dacă menținem constantă valoarea curentului prin bobina mobilă, acul indicator va arăta o deviație proporțională cu inducția. Cînd nu trimitem curent în înfășurarea de demagnetizare AB, inducția măsurată este chiar remanența. Pentru etalonarea dispozitivului, calculăm constanta

$$K = \frac{B_r}{\alpha} \text{ gauss/div.},$$

unde B_r este inducția remanentă măsurată cu ajutorul dispozitivului balistic, iar α este deviația bobinei mobile. Cu ajutorul acestei constante, putem deduce valoarea cîmpului din intrafer din valoarea deviației α, dacă se menține constantă valoarea curentului i — citit pe miliampermetru.

Pentru trasarea curbei de demagnetizare, se închide comutatorul K_2 trimițînd un curent în înfășurarea AB, care produce un cîmp de demagnetizare. Valoarea acestui cîmp se calculează cu formula

$$H = \frac{0{,}4\,\pi\, n\, I}{l} \text{ oersted},$$

unde s-a notat cu n, numărul spirelor din bobina de demagnetizare; I, curentul de demagnetizare în A; l, lungimea probei în cm.

Pentru diferite valori ale curentului I, care se reglează cu ajutorul reostatului R_2 obținem valori descrescătoare ale inducției în intrafer. Cu valoarea I a curentului pentru care deviația bobinei mobile ajunge la zero, calculăm forța coercitivă H_c.

Pentru trasarea curbei produsului BH, se trece comutatorul K_2 pe poziția p, alimentînd bobina mobilă cu căderea de tensiune din rezistența S. În acest mod, bobina mobilă va fi străbătută de un curent proporțional cu cîmpul de demagnetizare, iar deviația α va fi proporțională cu produsul BH.

Pentru etalonare ne-am folosit de determinările separate ale cîmpului H și inducției B, deducînd valoarea constantei

$$K_2 = \frac{BH}{\alpha\,(BH)} \text{ gauss oersted/div.}$$

Cu ajutorul acestei scheme de măsură, variind în mod continuu curentul de demagnetizare, am putut determina cu precizie valoarea cîmpului pentru care produsul BH are valoarea maximă.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ МАГНИТНЫХ СВОЙСТВ СИНТЕРИЗИРОВАННЫХ СПЛАВОВ Al—Ni—Fe

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Путем видоизменений зернистости рассеянной парамагнитной фазы Al — Ni авторам удалось определить изменение степени необратимости в процессе намагничивания синтеризированных сплавов Al — Ni — Fe. Предполагается, что частицы фазы Al — Ni обусловливают возникновение в магнитном материале неких «границ», ограничивающих расширение магнитных областей в период размагничивания.

Авторы предполагают, что появление коэрцитивной силы в железном намагниченном материале вызвано существованием в этом материале разделяющих зон, могущих образоваться под влиянием различных механизмов и вызывающих интенсивную напряженность, тормозящую процесс размагничивания.

Дальше описываются методы измерения, используемые для построения кривых размагничивания и изменений процесса ВН.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Железный порошок из оксалата. × 300.
Рис. 2. — Никелевый порошок из оксалата. × 300.
Рис. 3. — Порошок Al—Ni до сплава крупнозернистый. × 300.
Рис. 4. — Порошок Al—Ni до сплава среднезернистый. × 300.
Рис. 5. — Порошок Al—Ni до сплава мелкозернистый. × 300.
Рис. 6. — Кривые B = f (H) и BH = f (B) синтеризированных сплавов A, B, C (табл. 1).
Рим. 7. — Кривые B = f (H) и BH = f (B) допрессованных синтеризированных сплавов D, E, F (табл. 2).
Рис. 8. — Сплав C крупнозернистый. × 300.
Рис. 9. — Сплав B среднезернистый. × 300.
Рис. 10. — Сплав H мелкозернистый. × 300.
Рис. 11. — Чертеж аппарата для измерения индукции.
Рис. 12. — Аппарат для измерения.
Рис. 13. — Схема монтажа для определения остаточной индукции.
Рис. 14. — Схема монтажа для начертания кривых B = f (H) и BH = f (B).

RECHERCHES EXPÉRIMENTALES SUR LES PROPRIÉTÉS MAGNÉTIQUES DES ALLIAGES SYNTHÉRISÉS Al—Ni—Fe

(RÉSUMÉ)

En variant la granulation de la phase paramagnétique dispersée Al—Ni, les Auteurs ont réussi à déterminer une variation du degré d'irréversibilité dans le processus de magnétisation des alliages frittés Al—Ni—Fe. On suppose que les particules de la phase Al—Ni conditionneraient dans le matériel magnétique l'existence de certaines « frontières » qui limitent l'extension des domaines magnétiques durant la période de démagnétisation.

On émet l'hypothèse que l'apparition de la force coercitive dans un matériel ferromagnétique serait déterminée par la présence dans le matériel, de certains zones de séparation qui peuvent être produites par des mécanismes divers et qui provoquent une forte tension qui freinerait le processus de démagnétisation.

On décrit aussi les méthodes de mesure utilisées au tracé des courbes de démagnétisation et de variation du produit *BH*.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1.— Poudre de fer provenant d'un oxalate. × 300.
Fig. 2.— Poudre de nickel provenant d'un oxalate, × 300.
Fig. 3.— Poudre de pré-alliage Al—Ni, à grosses granulations. × 300.
Fig. 4.— Poudre de pré-alliage Al—Ni, à granulations moyennes. × 300.
Fig. 5.— Poudre de pré-alliage Al—Ni, à granulations fines. × 300.

Fig. 6.— Courbes B =f (H) et BH =f(B) des alliages frittés A,B,C,(voir tableau 1).
Fig. 7.— Courbes B =f (H) et BH=f (B) des alliages frittés soumis à un repressage D,E et F (voir tableau 2).
Fig. 8.— Alliage C, à grosses granulations × 300.
Fig. 9.— Alliage B, à granulations moyennes × 300.
Fig. 10.— Alliage A, à granulations fines × 300.
Fig. 11.— Schéma de l'appareil servant à mesurer l'induction.
Fig. 12.— L'appareil utilisé pour effectuer les mesures.
Fig. 13.— Schéma du montage employé à la détermination de l'induction rémanente.
Fig. 14.— Schéma du montage employé au trassage des courbes B=f (H) et BH=f (B).

BIBLIOGRAFIE

1. B. G. Livșiț, *Splavă s povșennoi coerținnoi siloi*, Metallurghizdat, Moscova, 1946.
2. J. Skakov, *Structura Fe—Ni—Al splava dlea postoiannih magnitov*, Dokl, Acad. Nauk SSSR, 1951.
3. A. G. Rachstadt, *Termiceskaia obrabotka i strukturnie prevrașcenia splavov dlea postoiannih magnitov*, Moscova, 1951.
4. A. I. Bradley a. A. Taylor, *An X-ray Investigation of the cause of high coercivity in iron-Ni-Al Alloys*, Nature, 1937, vol.140.
5. G. Ritzau, *Sintermagnete aus Eisen-Ni—Al*, Berlin, 1940.
6. R. Kieffer et W. Hotop, *Métallurgie des poudres*, Paris 1944.
7. M. I. Balșin, *Poroșkovaia metalurghia*, Moscova, 1949.
8. P. R. Kalischer, *Aluminium—Nickel—Iron Alloys*, Cleveland, Ohio, 1942.
9. T. Mishima, *Nickel—Aluminium—Steel for Permanent Magnets*, Abstract, Stahl u. Eisen, 1933, vol. 53.
10. W. Köster, *Das System Eisen—Nickel—Aluminium*, Arch. für Eisenhüttenwesen, 1933—1934 vol. 7.
11. A. S. Zaimovski, J. E. Narodițchii i D. S. Lubovici, *Jelezonikel—aliumineve splavî dlea postoiannîh magnitov s vîsokoi coertițivnoi siloi*. Vestnik Metalopromîșlennosti, 1934, vol. 14, nr.8—9.
12. W. Sucksmith, *Un nouvel appareil de mesure et son application au système Fe—Ni—Al*. Collection scientifique *Le Férromagnétisme*. Strassburg, 1940.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE FIZICĂ
Tomul VI, nr. 1, 1955

DENSITATEA CURENŢILOR ENERGETICI ÎN CÎMPUL ELECTROMAGNETIC AL LINIILOR DE TRANSPORT DE ENERGIE *)

DE

C. POPOVICI şi E. ROGAY

1. Introducere

Transferul energiei electromagnetice dintr-o regiune a spaţiului în alta se face conform legii

$$P = \dot{W} + Q + \int_{\Sigma} \bar{S} \cdot \bar{d\sigma},$$

în care $P = \int_{\Omega} \bar{j} \cdot \bar{E}_e \, d\omega$ este lucrul forţelor electromotoare exterioare, efectuat asupra curenţilor de conducţie din volumul Ω limitat de suprafaţa Σ, în unitatea de timp; $\bar{E}_e$ este cîmpul electric creat în volumul Ω de f.e.m. exterioare, care pot fi pile electrice, acumulatori, f.e.m. de inducţie, f.e.m de contact, pile termoelectrice etc; $\bar{j}$ este densitatea curenţilor de conducţie din acelaşi volum, iar $d\omega$ este un element de volum din Ω; $\dot{W} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{8\pi} = \int_{\Omega} (\varepsilon E^2 + \mu H^2)\, d\omega\right]$ este variaţia în timp a energiei electromagnetice localizate în volumul Ω; $Q = \int_{\Omega} \rho j^2 \, d\omega$ este căldura Joule degajată de curenţii de conducţie în unitatea de timp; $\bar{d\sigma}$ este un element de arie de pe suprafaţa Σ; $\bar{S}$ este vectorul lui Poynting.

În fiecare punct al spaţiului, fluxul de energie electromagnetică este egal ca mărime şi sens cu vectorul lui Poynting; de aceea, acest vector joacă un rol esenţial în explicarea procesului fizic de transfer al energiei electromagnetice. Această energie se propagă prin dielectricul dintre fire. Conductorii, prin care se închide curentul, joacă doar un rol de ghid pentru energia utilă, pe care o furnizează sursa, receptorului.

Cu toate acestea, în descrierea fenomenelor de propagare ghidată, nu se dă adesea nici o importanţă vectorului $\bar{S}$ şi cîmpului din dielectricul dintre fire; se folosesc noţiunile de curent I în linie şi tensiune U între fire, care pentru acest caz particular prezintă avantaje din punctul de vedere al calculului puterii. Astfel în curent continuu şi la frecvenţe industriale, puterea transmisă sarcinii se exprimă prin produsul UI. De exemplu, în cazul

*) Lucrare prezentată Institutului de fizică la data de 1 iunie 1954.

unui generator de f.e.m. E, care debitează pe o rezistenţă R (fig. 1) se spune că puterea care se transferă prin suprafaţa Σ de la generator la receptor, este produsul UI; deci, s-ar părea că energia trece de la sursă la sarcină prin conductori. Prin aceasta esenţa fizică a procesului de propagare a energiei electromagnetice este denaturată.

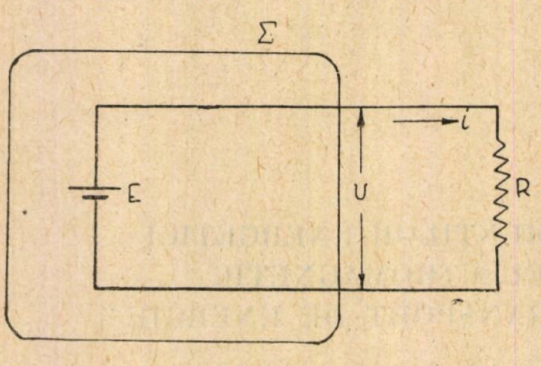


Fig. 1 — Alimentarea unei sarcini R printr-o linie bifilară.

Fluxul vectorului Poynting, printr-o suprafaţă închisă, exprimă în toate cazurile puterea transmisă receptorului, în timp ce produsul UI coincide cu acest flux, numai în ipoteza unui regim cvasistaţionar, al unor conductori filiformi şi al unei densităţi uniforme a curentului.

Pentru a scoate în evidenţă importanţa vectorului $\overline{S}$ în transferul energiei de curent continuu şi la frecvenţe industriale, considerăm, că este util a cunoaşte distribuţia acestui vector, deci a curenţilor energetici, în jurul liniilor de transport de energie electrică.

2. Determinarea curenţilor energetici în cîmpul electromagnetic al liniei bifilare alimentate în curent continuu

2. 1. Pentru aceasta este necesar să cunoaştem cîmpurile, electric $\overline{E}$ şi magnetic $\overline{H}$, create de linia bifilară în spaţiul înconjurător.

Intensitatea cîmpului electric $\overline{E}$ o vom calcula pornind de la expresia potenţialului electric

$$V = \text{const.} + \frac{Q}{2\pi\,\varepsilon\,l} \ln \frac{1}{u} \tag{1}$$

creat de sarcina Q distribuită uniform pe un conductor de lungime mare l, într-un punct din spaţiu aflat la distanţa u de conductor.

Vom presupune că pe conductorul L_1 este distribuită uniform sarcina $+Q$, iar pe conductorul L_2 sarcina $-Q$.

Dacă notăm $\overline{ML_1} = a$ şi $\overline{ML_2} = b$, expresiile potenţialelor în punctul M, sînt

$$V_1 = \text{const} + \frac{Q}{2\pi\,\varepsilon\,l} \ln \frac{1}{a}, \tag{2}$$

$$V_2 = \text{const.} - \frac{Q}{2\pi\,\varepsilon\,l} \ln \frac{1}{b}. \tag{3}$$

Datorită proprietăţii de aditivitate a potenţialelor, potenţialul rezultant este

$$V = A \ln \frac{b}{a}, \tag{4}$$

în care

$$A = \frac{Q}{2\pi\varepsilon l}; \tag{5}$$

potențialul unui punct situat la infinit, fiind considerat nul.

Alegînd sistemul de coordonate din figura 2, avem

$$a^2 = (x + D)^2 + y^2, \tag{6}$$

$$b^2 = (x - D)^2 + y^2. \tag{7}$$

Cîmpul electric fiind determinat de relația

$$\overline{E} = -\operatorname{grad} V, \tag{8}$$

componentele sale sînt

$$E_x = A\left[\frac{(x+D)}{(x+D)^2 + y^2} - \frac{(x+D)}{(x-D)^2 + y^2}\right], \tag{9}$$

$$E_y = A\left[\frac{y}{(x+D)^2 + y^2} - \frac{y}{(x-D)^2 + y^2}\right], \tag{10}$$

iar intensitatea cîmpului electric este

$$E = \frac{2AD}{\sqrt{(x^2+y^2) + D^2)^2 - 4D^2x^2}}. \tag{11}$$

Pentru calculul cîmpului magnetic $\overline{H}$ vom utiliza expresia potențialului magnetic

$$V_H = \text{const.} + \frac{I}{2\pi}\alpha, \tag{12}$$

generat de curentul I, care curge printr-un conductor de lungime mare, într-un punct din spațiu, α fiind unghiul diedru determinat de un plan de referință ce conține conductorul și de planul determinat de punctul în care considerăm potențialul și conductorul.

Folosind notațiile din figura 2, potențialul magnetic rezultant din punctul M are valoarea

$$V_H = B(\alpha_1 - \alpha_2), \tag{13}$$

unde am notat

$$B = \frac{I}{2\pi}, \tag{14}$$

potențialul planului de referință, fiind ales zero.

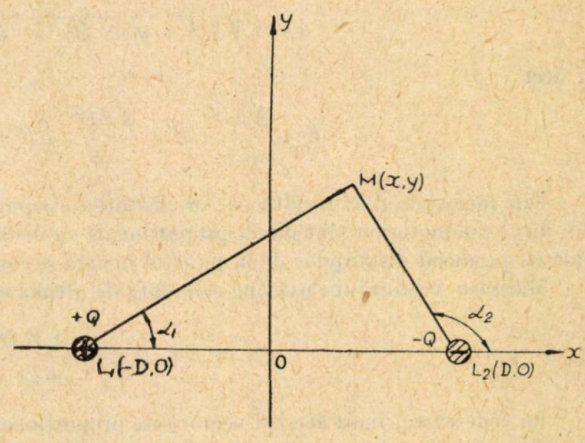


Fig. 2 — O secțiune transversală printr-o linie bifilară alimentată în c.c. Determinarea potențialelor V și V_H.

Folosind acelaşi sistem de coordonate, avem

$$\alpha_1 = \operatorname{arctg} \frac{y}{x + D}, \tag{15}$$

$$\alpha_2 = \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x - D}. \tag{16}$$

Deoarece cîmpul magnetic se deduce din relaţia

$$\overline{H} = - \operatorname{grad} V_H, \tag{17}$$

componentele sale sînt

$$H_x = B\left[\frac{y}{(x + D)^2 + y^2} - \frac{y}{(x - D)^2 + y^2}\right], \tag{18}$$

$$H_y = B\left[\frac{-(x + D)}{(x - D)^2 + y^2} + \frac{x - D}{(x - D)^2 + y^2}\right], \tag{19}$$

iar intensitatea cîmpului magnetic este

$$H = \frac{2BD}{\sqrt{(x^2 + xy^2 + D^2)^2 - 4D^2x^2}}. \tag{20}$$

Comparînd relaţiile (18) şi (19) cu (9) şi (10), se constată că

$$H_x = \frac{B}{A} E_y, \tag{21}$$

$$H_y = - \frac{B}{A} E_x \tag{22}$$

şi se deduce perpendicularitatea dintre cîmpul electric şi cîmpul magnetic.

Din relaţiile (6) şi (7), se obţine

$$a.b = \sqrt{(x^2 + y^2 + D^2)^2 - 4\ D^2x^2} \tag{23}$$

şi deci

$$E = \frac{2AD}{a\ b},\ H = \frac{2BD}{a\ b},\ EH = \frac{4\ ABD^2}{a^2.\ b^2}. \tag{24}$$

Din formulele (24) rezultă că, intensităţile cîmpurilor electric şi magnetic în spaţiul din jurul conductorilor sînt direct proporţionale cu distanţa dintre fire şi invers proporţionale cu produsul distanţelor de la punctul în care se consideră cîmpurile, la cele două fire.

Mărimea vectorului Poynting este dată de ultima expresie (24) şi anume

$$S = E\ H = \frac{4\ A\ B\ D^2}{a^2\ b^2}. \tag{25}$$

Se vede că mărimea acestui vector este proporţională cu pătratul intensităţii cîmpului electric sau al celui magnetic, direcţia sa coincide cu direcţia conductorilor, iar sensul vectorului ne indică sensul de propagare al energiei (de la sursă la receptor).

2.2. Cîmpul electromagnetic, generat de o linie bifilară avînd o simetrie cilindrică, cunoașterea distribuției curenților energetici, în spațiul din jurul conductorilor, se reduce la cunoașterea lor într-o secțiune transversală. Vectorul Poynting avînd o direcție fixă, distribuția sa într-o secțiune perpendiculară pe direcția de propagare a energiei, este dată de

$$| \overline{E} \times \overline{H} | = \text{const.}$$

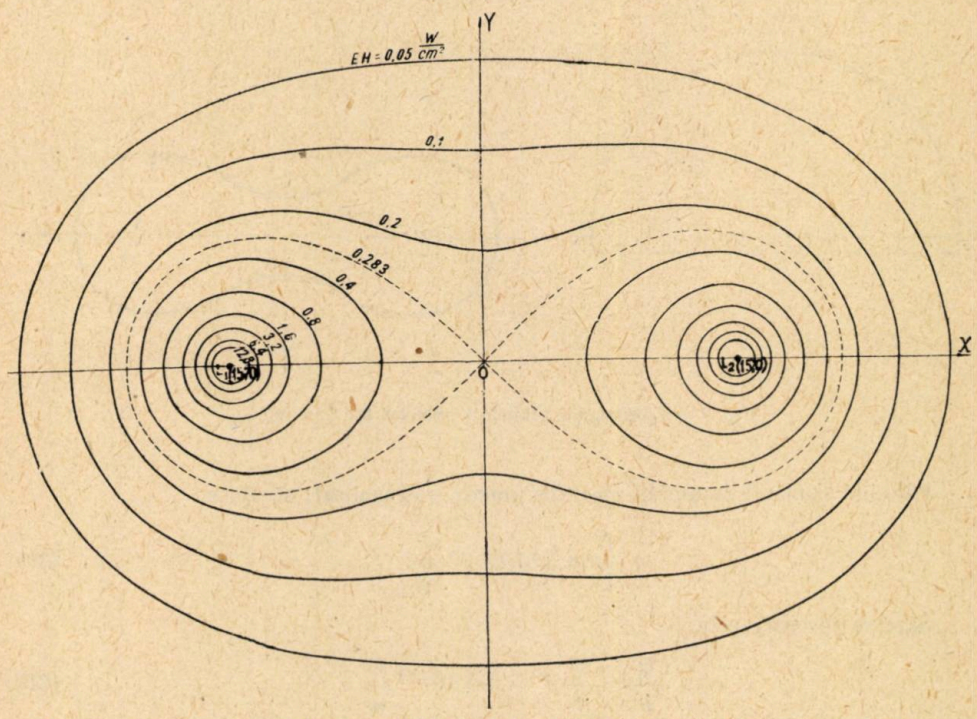


Fig. 3 — Distribuția curenților energetici pentru o linie bifilară alimentată în c.c., într-o secțiune normală pe fire.

adică, conform cu relația (25) de

$$(x^2 + y^2 + D^2)^2 - 4\ D^2\ x^2 = v^4, \tag{26}$$

unde

$$v^4 = \frac{4\ A\ B\ D^2}{E\ H}\ . \tag{27}$$

Curbele (26) reprezintă ovalele lui Cassini, care au ca focare centrele secțiunilor conductorilor. Pentru

$$v = D,$$

relația (26) reprezintă lemniscata lui Bernoulli.

Curbele din figura 3 au fost calculate pentru o linie bifilară, care are

$$\begin{aligned} 2\ D &= 30 \text{ cm}, \\ 2\ s &= 4 \text{ mm}, \\ U &= 100 \text{ V}, \\ I &= 10 \text{ A}. \end{aligned} \tag{28}$$

Am notat în relaţiile (28) cu $2\,s$ diametrul conductorului, cu U tensiunea dintre fire şi cu I curentul din conductori. Capacitatea specifică a liniei este

$$\frac{C}{l} = \frac{\pi\,\varepsilon}{\ln \dfrac{2\,D}{s}}. \tag{29}$$

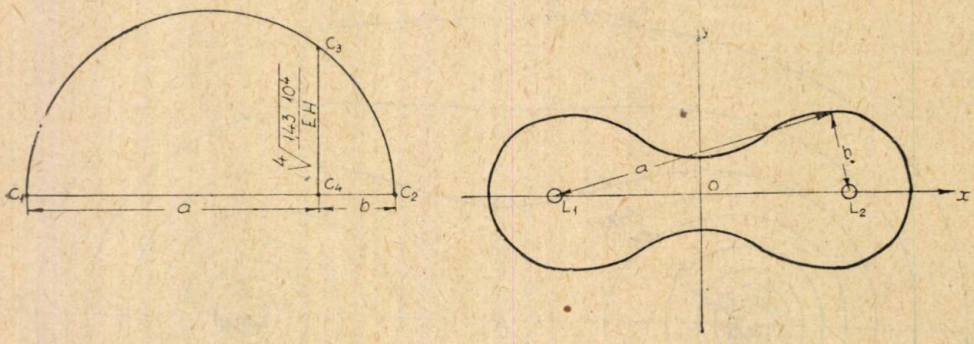


Fig. 4 — Construcţia grafică a ovalelor lui Cassini.

Folosind sistemul de unităţi electrice practic, raţionalizat, se obţine

$$\frac{C}{l} = 5{,}57.10^{-12}\,\frac{F}{m}. \tag{30}$$

Sarcina specifică este

$$\frac{Q}{l} = \frac{C}{l}\,V = 557.10^{-12}\,\frac{C}{m} \tag{31}$$

Valorile constantelor date de relaţiile (5), (14) şi (27), sînt

$$\begin{aligned} A &= 10\ V, \\ B &= 1{,}59\ A, \\ v^4 &= \frac{1{,}43.10^4}{E\,H}\ \mathrm{cm}^4. \end{aligned} \tag{32}$$

Pentru parametrul $E\,H$ au fost alese următoarele valori:

$$0{,}05;\ 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}283;\ 0{,}4;\ 0{,}8;\ 1{,}6;\ 3{,}2;\ 6{,}4;\ 12{,}8\ \frac{W}{\mathrm{cm}^2}. \tag{33}$$

Deoarece relaţiile (23), (26) şi (32) dau

$$a.b = \frac{\sqrt{1{,}43.10^4}}{E\,H}, \tag{34}$$

se poate imagina o construcţie grafică pentru curbele de mai sus.

Această construcție se bazează pe relația

$$\overline{C_1\ C_4} \cdot \overline{C_4\ C_2} = \overline{C_3\ C_4}^2,$$

ce se poate scrie în cercul de diametru $C_1\ C_2$ (fig. 4).

Din figura 3 se constată că densitatea curenților energetici scade foarte repede cu cît ne depărtăm de conductori, ceea ce arată că energia electromagnetică se transmite printr-un spațiu practic limitat în jurul conductorilor, care servesc drept ghid pentru această energie.

Observație. În cazul liniilor bifilare alimentate în curent alternativ, calculele se fac în același mod, iar rezultatele obținute rămîn valabile, dacă se consideră distribuția vectorului Poynting la un moment dat.

3. Determinarea curenților energetici în cîmpul electromagnetic al liniei trifazice alimentate în curent alternativ

3.1. În cazul liniei trifazice alimentate în curent alternativ, curenții prin fire variază sinusoidal în raport cu timpul, avînd un decalaj de 120° între ei.

Pentru fiecare moment există o anumită distribuție a curenților energetici în jurul firelor. Astfel se pot construi o infinitate de diagrame pentru distribuția vectorului Poynting. În cele ce urmează considerăm numai două cazuri:

— cînd curentul dintr-un conductor este nul, iar ceilalți doi curenți sînt egali în valoare absolută, și

— cînd curenții din doi conductori sînt egali între ei, și egali cu jumătate din amplitudinea celui de al treilea.

Dacă alegem curentul nul în firul L_3, atunci diagrama corespunzătoare primei distribuții este identică cu cea obținută la punctul 3 (fig. 3).

În cel de al doilea caz, pentru calculul distribuției curenților energetici, vom lua următoarele valori pentru curenți: I în conductorul L_3 și $-\frac{I}{2}$ în conductorii L_1 și L_2, ce corespund unui anumit moment, I fiind amplitudinea curenților din fire.

Intensitatea cîmpului electric $\overline{E}$ se calculează cu ajutorul expresiei potențialului electric (1).

Notînd distanțele $\overline{ML_1} = a$, $\overline{ML_2} = b$ și $\overline{ML_3} = c$, potențialul electric rezultant în punctul M, este

$$V = -\frac{A}{2}\ln\frac{1}{a} - \frac{A}{2}\ln\frac{1}{b} + A\ln\frac{1}{c}. \tag{35}$$

Alegînd sistemul de coordonate xoy din figura 5, avem

$$\begin{aligned} a^2 &= (x+D)^2 + y^2, \\ b^2 &= (x-D)^2 + y^2, \\ c^2 &= x^2 + (y-\sqrt{3}\,D)^2. \end{aligned} \tag{36}$$

Componentele cîmpului electric fiind

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{A}{2}\left[\frac{2x}{x^2+(y-\sqrt{3}\,D)^2} - \frac{x+D}{(x+D)^2+y^2} - \frac{x-D}{(x-D)^2+y}\right] \\ E_y &= \frac{A}{2}\left[\frac{2(y-\sqrt{3}\,D)}{x^2+(y-\sqrt{3}\,D)^2} - \frac{y}{(x+D)^2+y^2} - \frac{y}{(x-D)^2+y^2}\right], \end{aligned} \tag{37}$$

intensitatea sa este

$$E = \frac{\sqrt{3}\, A\, D \sqrt{x^2 + \left(y + \frac{D}{\sqrt{3}}\right)^2}}{\sqrt{[(x+D)^2 + y^2]\,[(x-D)^2 + y^2]\,[x^2 + (y - \sqrt{3}\, D)^2]}}. \tag{38}$$

În baza relaţiei (12), expresia potenţialului magnetic rezultant în punctul M, este

$$V_H = -\frac{B}{2}\alpha_1 - \frac{B}{2}\alpha_2 + B\alpha_3, \tag{39}$$

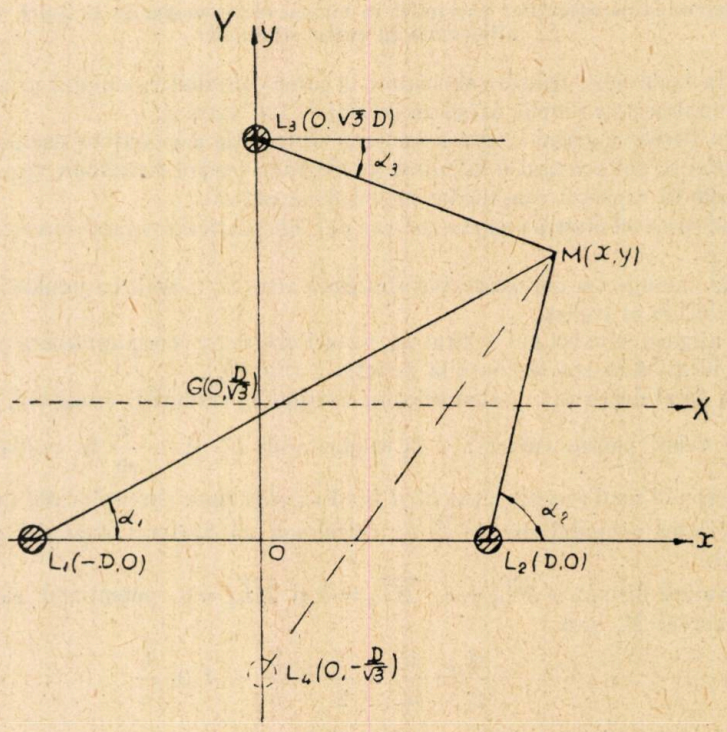


Fig.5 — O secţiune transversală (la un moment dat) printr-o linie trifazică alimentată în c.a. Determinarea potenţialelor V şi V_H.

în care

$$\alpha_1 = \operatorname{arctg} \frac{y}{x + D},$$

$$\alpha_2 = \operatorname{arctg} \frac{y}{x - D}, \tag{40}$$

$$\alpha_3 = \operatorname{arctg} \frac{y - \sqrt{3}\, D}{x}.$$

Componentele cîmpului magnetic sînt

$$H_x = \frac{B}{2}\left[\frac{2\,(y-\sqrt{3}\,D)}{x^2+(y-\sqrt{3}\,D)^2} - \frac{y}{(x+D)^2+y^2} - \frac{y}{(x-D)^2+y^2}\right]$$
$$H_y = \frac{B}{2}\left[\frac{-2x}{x^2+(y-\sqrt{3}\,D)^2} + \frac{x+D}{(x+D)^2+y^2} + \frac{x-D}{(x-D)^2+y^2}\right], \tag{41}$$

iar intensitatea sa este

$$H = \frac{\sqrt{3}\,B\,D\sqrt{x^2+\left(y+\frac{D}{\sqrt{3}}\right)^2}}{\sqrt{[(x+D)^2+y^2]\,[(x-D)^2+y^2]\,[x^2+(y-\sqrt{3}\,D)^2]}}. \tag{42}$$

Relațiile (21) și (22) fiind valabile și în acest caz, rezultă că cele două cîmpuri $\overline{E}$ și $\overline{H}$ sînt perpendiculare. Punînd în evidență distanța (fig. 5)

$$d = \overline{ML_4} = \sqrt{x^2+\left(y+\frac{D}{\sqrt{3}}\right)^2}, \tag{43}$$

relațiile (38) și (42) se mai pot scrie sub forma

$$E = \frac{\sqrt{3}\,ADd}{abc}, \quad H = \frac{\sqrt{3}\,BDd}{abc} \tag{44}$$

Relațiile (44) ne arată că intensitățile cîmpurilor sînt invers proporționale cu produsul distanțelor de la punctul în care se consideră cîmpurile la cele trei fire și direct proporționale cu distanța dintre fire și cu distanța de la același punct, la simetricul lui L_3 în raport cu centrul cercului circumscris triunghiului $L_1\ L_2\ L_3$.

Intensitatea vectorului Poynting este dată de relația

$$S = E\ H = \frac{3\,ABD^2d^2}{a^2b^2c^2}. \tag{45}$$

De aici rezultă că mărimea acestui vector este proporțională cu pătratul intensității cîmpurilor. Direcția acestui vector, în exteriorul conductorilor, este paralelă cu direcția firelor, iar sensul lui ne arată sensul de propagare al energiei.

3.2. Deoarece cîmpul electromagnetic al liniei trifazice are simetrie cilindrică, distribuția curenților energetici într-o secțiune transversală este dată de

$$|\,\overline{E}\times\overline{H}\,| = \text{const.},$$

adică, după relația (45), de

$$[(x+D)^2+y^2]\,[(x-D)^2+y^2]\,[x^2+(y-\sqrt{3}\,D)^2] = F\left[x^2+\left(y+\frac{D}{\sqrt{3}}\right)^2\right], \tag{46}$$

în care

$$F = \frac{3\,ABD^2}{E\,H}. \tag{47}$$

Pentru simplificarea calculelor numerice, am ales un nou sistem de coordonate cu originea în G, ca în figura 5. Trecerea de la un sistem la altul se face cu ajutorul transformării

$$x = X$$
$$y = Y + \frac{D}{\sqrt{3}}. \qquad (48)$$

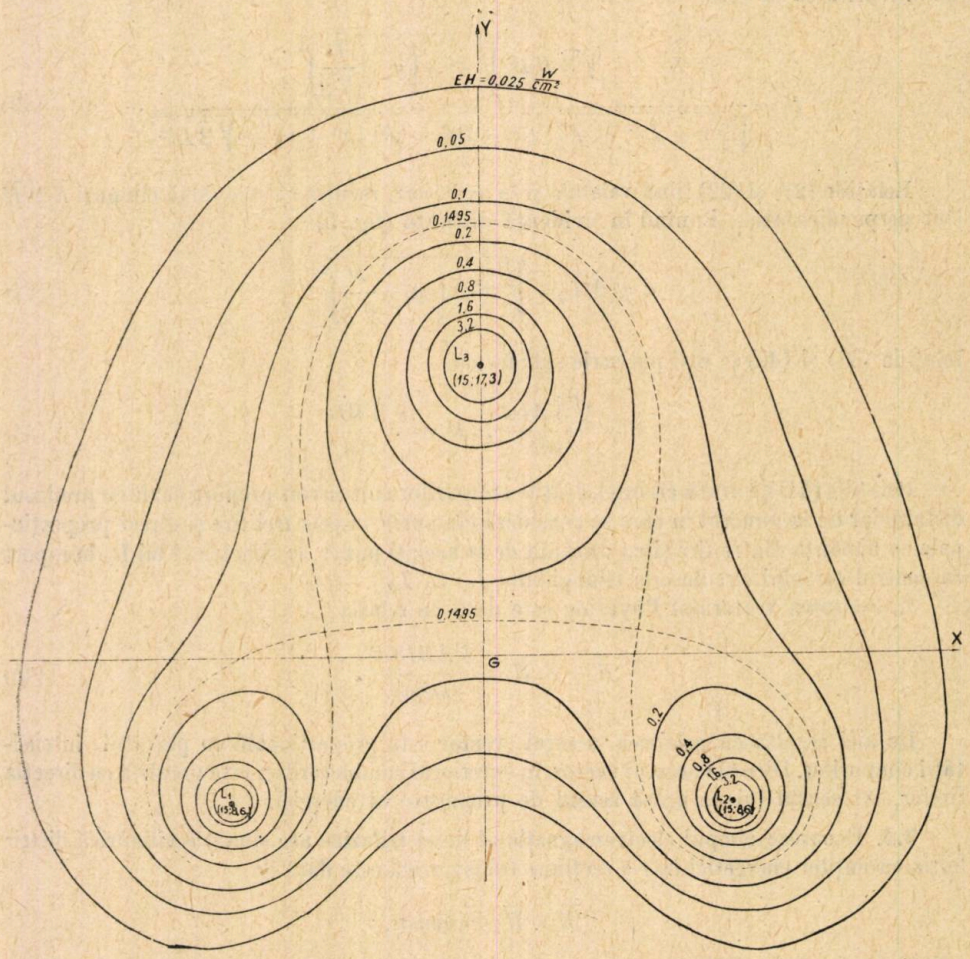


Fig. 6 — Distribuţia curenţilor energetici (la un moment dat) pentru o linie trifazică alimentată în c.a., într-o secţiune normală pe direcţia conductorilor.

În noul sistem de coordonate XGY ecuaţia (46) devine

$$t^3 + pt + q = 0, \qquad (49)$$

în care

$$t = X^2 + Y^2,$$

$$p = \frac{16}{\sqrt{3}} D^3 Y - F, \tag{50}$$

$$q = -\frac{64}{3\sqrt{3}} D^3 Y^3 - \frac{4 D F}{\sqrt{3}} Y + \frac{6\,4 D^6}{27} - \frac{4 D^2 F}{3}.$$

Curbele din figura 6 au fost calculate pentru o linie trifazică ce are

$$\begin{aligned} 2 D &= 30 \text{ cm}, \\ 2 s &= 4 \text{ mm}, \\ U &= 100 \text{ V}, \\ I &= 10 \text{ A}. \end{aligned} \tag{51}$$

U și I fiind respectiv amplitudinile tensiunii dintre fire și ale curentului din conductori. Pentru aceste valori numerice relațiile (5), (14) și (47) dau

$$\begin{aligned} A &= 10 \text{ V}, \\ B &= 1{,}59 \text{ A}, \\ F &= \frac{1{,}0748 \cdot 10^4}{E H} \text{ cm}^4. \end{aligned} \tag{52}$$

Deci, relațiile (50) devin

$$p = 3{,}12 \cdot 10^4 Y - \frac{1{,}0748 \cdot 10^4}{E H},$$

$$q = -4{,}16 \cdot 10^4 Y^3 - \frac{37{,}235 \cdot 10^4}{E H} Y + 2700 \cdot 10^4 - \frac{322{,}45 \cdot 10^4}{E H}. \tag{53}$$

Familia de curbe (46) în care F este parametru, conține o curbă cu puncte duble, care corespunde lemniscatei lui Bernoulli din distribuția curenților energetici ai liniei bifilare. Coordonatele punctelor duble sînt

$$\begin{aligned} X &= \pm 9{,}3293 \text{ cm} \\ Y &= 1{,}5385 \text{ cm}, \end{aligned} \tag{54}$$

pentru $F = 7{,}1948 \cdot 10^4$ cm^4 sau $EH = 0{,}1495 \frac{W}{\text{cm}^2}$. (55)

Coeficienţii din relaţiile (53), pentru curbele din figura 6, sînt daţi

Tabloul

EH	0,025	0,05	0,1	0,1495
$\frac{1{,}0748.10^4}{EH}$	$42{,}992.10^4$	$21{,}496.10^4$	$10{,}748.10^4$	$7{,}1948.10^4$
$\frac{37{,}235.10^4}{EH}$	$1489{,}4.10^4$	$744{,}7.10^4$	$372{,}35.10^4$	$248{,}94.10^4$
$\frac{322{,}45.10^4}{EH}$	12898.10^4	6449.10^4	$3224{,}5.10^4$	$2158{,}44.10^4$

Curbele reprezentate în figura 6 ne arată că densitatea curenţilor energetici scade foarte repede pe măsură ce ne depărtăm de conductori, ceea ce înseamnă că energia electromagnetică se propagă printr-un spaţiu limitat din jurul lor.

Pentru valori ale curenţilor cuprinse între cele ce corespund celor două cazuri studiate, vom obţine diagrame corespunzătoare, intermediare între cele obţinute la punctele 2.2 şi 3.2.

4. Anexa 1

Relaţiile (24) se pot deduce şi pe cale geometrică; într-adevăr, folosind ipotezele în care (fig. 7) este valabilă formula (1), avem

$$E_1 = \frac{Q}{2\pi\varepsilon l}\,\frac{1}{a}, \tag{56}$$

$$E_2 = \frac{Q}{2\pi\varepsilon l}\,\frac{1}{b}. \tag{56'}$$

Intensitatea cîmpului electric rezultant este

$$E = (E_1^2 + E_2^2 + 2\,E_1\,E_2\cos\theta)^{\frac{1}{2}} \tag{57}$$

Ţinînd seama de (56) şi (56') şi de

$$(2\,D)^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos(\pi - \theta), \tag{58}$$

(fig. 7), se deduce din (57) prima relaţie (24); în mod similar, în ipotezele care fac valabilă relaţia (12), avem

$$H_1 = \frac{I}{2\pi}\cdot\frac{1}{a}, \tag{59}$$

$$H_2 = \frac{I}{2\pi}\,\frac{1}{b}. \tag{60}$$

Transcriind formula (57) pentru intensitatea cîmpului magnetic şi utilizînd relaţiile (58), (59) şi (60), se găseşte imediat a doua formulă (24).

în tabloul nr. 1.

nr. 1

0,2	0,4	0,8	1,6	3,2
5,374.10⁴	2,687.10⁴	1,3435.10⁴	0,67175.10⁴	0,335875.10⁴
186,175.10⁴	93,0875.10⁴	46,54375.10⁴	23,271875.10⁴	11,6359375.10⁴
1612,25.10⁴	806,125.10⁴	403,0625.10⁴	201,53125.10⁴	100,765625.10⁴

Perpendicularitatea dintre cîmpul electric rezultant și cîmpul magnetic rezultant devine evidentă, dacă se ține seamă de faptul că

$$\overline{E}_1 \perp \overline{H}_1, \quad \overline{E}_2 \perp \overline{H}_2 \tag{61}$$

și de posibilitatea deducerii, în acest caz, a cîmpului magnetic rezultant din cîmpul electric rezultant, printr-o rotație și o asemănare.

Intensitatea cîmpului electric rezultant se mai poate deduce, pentru două linii încăr-

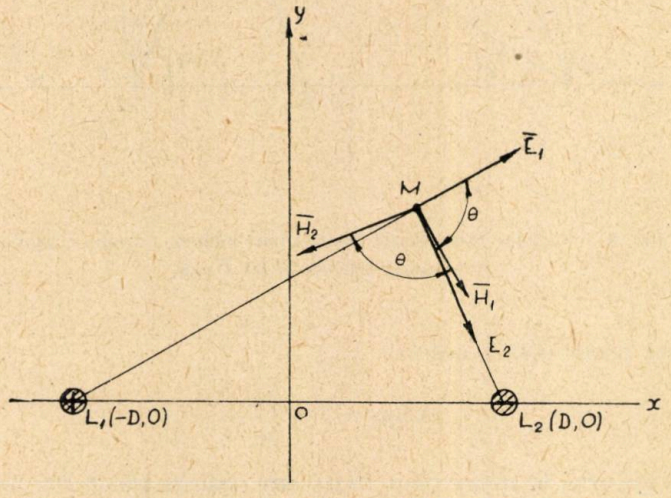


Fig. 7 — Cîmpurile $\overline{E}$ și $\overline{H}$ create de o linie bifilară.

cate cu sarcini de semn contrar și egale în valoare absolută, folosind direct teorema lui Gauss.

Într-adevăr, considerînd o suprafață închisă în jurul conductorului L_1 și aplicînd teorema lui Gauss, obținem pentru fluxul cîmpului de inducție electrică, următoarea expresie:

$$\psi = Q. \tag{62}$$

Fluxul corespunzător unghiului diedru α_1, este

$$\psi_1 = \psi \frac{\alpha_1}{2\pi} = Q \frac{\alpha_1}{2\pi}. \tag{63}$$

Analog, fluxul corespunzător unghiului diedru α_2 (fig. 8), flux datorit sarcinii $-Q$ este

$$\psi_2 = -Q \frac{\alpha_2}{2\pi}. \tag{64}$$

Prin urmare, fluxul ce străbate planul PC va fi

$$\psi_{PC} = \psi_1 - \psi_2 = Q \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2\pi}. \tag{65}$$

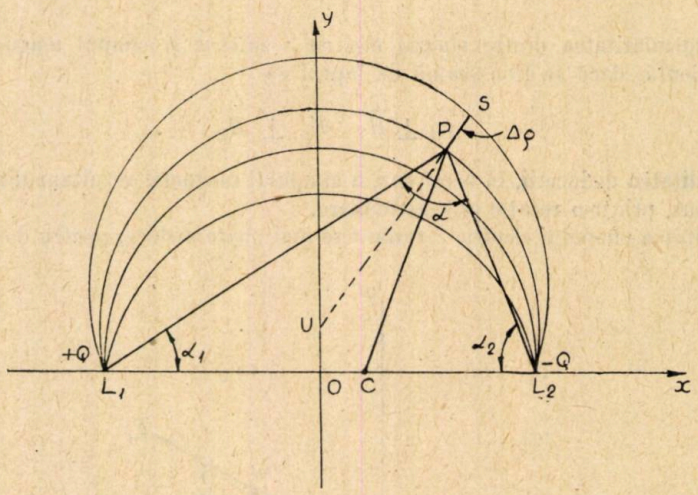


Fig. 8 — Secţiune transversală printr-o linie bifilară. Calculul cîmpului $\overline{E}$ cu ajutorul teoremei lui Gauss.

Din ultima relaţie (65) se deduce

$$\Delta \psi_{PC} = -Q \frac{\Delta \alpha}{2\pi}. \tag{66}$$

Fluxul $\Delta \psi_{PC}$ este, în acelaşi timp, fluxul care străbate planul PS. Avînd în vedere că în P cîmpul electric este perpendicular pe UP, putem scrie

$$\Delta \psi_{PC} = l \Delta \rho \varepsilon E. \tag{67}$$

Din egalarea relaţiilor (66) şi (67) obţinem

$$E = -\frac{Q}{2\pi \varepsilon l} \cdot \frac{1}{\frac{\Delta \rho}{\Delta \alpha}}. \tag{68}$$

Pentru a găsi intensitatea cîmpului electric, trebuie să calculăm pe $\frac{\Delta\rho}{\Delta\alpha}$, care reprezintă derivata lui ρ în raport cu α, în funcție de elementele geometrice ale sistemului. Acest calcul se face în modul următor:

În triunghiul UVS (fig. 9) teorema sinusurilor dă

$$\frac{r+\Delta\rho}{\sin(\theta+v)} = \frac{R}{\sin\theta} = \frac{\Delta r}{\sin v}, \tag{69}$$

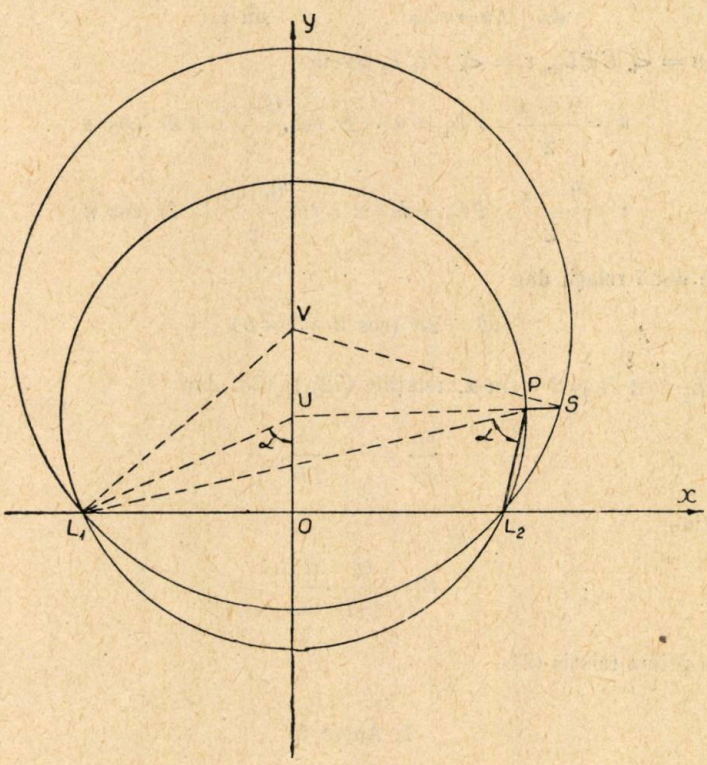


Fig. 9 — Secțiune transversală printr-o linie bifilară. Calculul derivatei $\frac{d\rho}{d\alpha}$.

unde: $UP = r$, $UV = \Delta r$, $PS = \Delta\rho$, $VS = R$, $\theta = \sphericalangle VUS$, $v = \sphericalangle VSU$; deci

$$\Delta\rho = \frac{R}{\sin\theta}[\sin\theta\cos v + \sin v\cos\theta] - r;\ \sin v = \frac{\Delta r}{R}\sin\theta. \tag{70}$$

În triunghiul UVL_1 aceeași teoremă ne permite să scriem

$$\frac{\Delta r}{\sin(-\Delta\alpha)} = \frac{R}{\sin(\pi-\alpha)} = \frac{r}{\sin(\alpha+\Delta\alpha)},$$

în care $-\Delta\alpha = \sphericalangle UL_1V$ şi $\alpha + \Delta\alpha = \sphericalangle UVL_1$; deci

$$\frac{\Delta r}{R} = -\frac{\sin \Delta\alpha}{\sin \alpha}, \qquad R = r\,\frac{\sin \alpha}{\sin (\alpha + \Delta\alpha)}. \tag{71}$$

Înlocuind în prima relaţie (70), avem

$$\frac{d\rho}{d\alpha} = \lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{\Delta\rho}{\Delta\alpha} = -\,r\,\frac{\cos\theta + \cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{72}$$

Notînd $u = \sphericalangle UPL_2$, $v = \sphericalangle UL_1P$, avem

$$u = \frac{\theta + \alpha}{2}, \quad PL_1 = a = 2r\,\cos\frac{\theta - \alpha}{2} = 2r\,\cos v$$

$$v = \frac{\theta - \alpha}{2}, \quad PL_2 = b = 2\,r\,\cos\frac{\theta + \alpha}{2} = 2r\,\cos u$$

Ultimele două relaţii dau

$$ab = 2r^2\,(\cos\theta + \cos\alpha). \tag{73}$$

Cum $\overline{L_1L_2} = 2\,D = 2\,r\,\sin\alpha$, relaţiile (72) şi (73) dau

$$\frac{d\rho}{d\alpha} = -\,\frac{ab}{2D},$$

iar (68) devine

$$E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon l}\cdot\frac{2D}{ab}, \tag{74}$$

adică tocmai prima relaţie (24).

5. Anexa 2

În cadrul acestui punct vom prezenta calculul punctelor duble ale curbei din familia (46), ce corespunde lemniscatei lui Bernoulli. Dacă notăm cu

$$f(X, Y) = 0,$$

ecuaţia familiei de curbe (46) în sistemul de coordonate XGY, atunci coordonatele punctelor duble şi valoarea parametrului F sînt determinate de

$$\mathrm{f} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial Y} = 0 \tag{75}$$

unde

$$\mathrm{f} = t^3 + pt + q.$$

Sistemul (75) se mai poate scrie astfel

$$\begin{aligned} &t^3 + pt + q = 0 \\ &2\,X(3\,t^2 + p) = 0 \\ &2\,Y(3t^2 + p) + \frac{\partial p}{\partial Y}\,t + \frac{\partial q}{\partial Y} = 0. \end{aligned} \tag{76}$$

Sistemul (76) se descompune în altele două şi anume:

$$\begin{aligned} &t^3 + pt + q = 0 \qquad\qquad t^3 + pt + q = 0 \\ &X = 0 \qquad\qquad\qquad 3\,t^2 + p = 0 \\ &2Y(3\,t^2 + p) + \frac{\partial p}{\partial Y}\,t + \frac{\partial q}{\partial Y} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial Y}\,t + \frac{\partial q}{\partial Y} = 0. \end{aligned} \tag{77}$$

Ultimul sistem este echivalent cu

$$\begin{cases} p = 0 \\ q = 0 \end{cases} \text{ şi } \left(\frac{\partial q}{\partial Y}\right)^2 + \frac{p}{3}\left(\frac{\partial p}{\partial Y}\right)^2 = 0$$

$$3q\,\frac{\partial p}{\partial Y} - 2p\,\frac{\partial q}{\partial Y} = 0.$$

Numai ultimul sistem dă soluţii. Ele sînt

$$\begin{aligned} X &= \pm\,\frac{\sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}}}{2}\,D. \\ Y &= \frac{\sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}} - 2}{2\sqrt{3}}\,D. \\ F &= 4\left[\sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}} - 2\right] D^4. \end{aligned} \tag{78}$$

ПЛОТНОСТЬ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ТОКОВ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ ЛИНИЙ ПЕРЕДАЧИ ЭНЕРГИИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей работе авторы выявляют значение вектора Пойнтинга ($\overline{S}$) для объяснения передачи электрической энергии постоянного тока и тока низкой частоты.

Авторы исходили из закона сохранения и превращения электромагнитной энергии.

Сначала рассматривался случай бифилярной линии, питаемой источником постоянного тока, а затем трехфазной линии, питаемой переменным током.

Для обоих случаев было вычислено распределение энергетических токов в пространстве, окружающем проводники. Соответствующие диаграммы изображены на рисунках 3 и 6.

При рассмотрении этих диаграмм видно, что в ограниченном пространстве вокруг проволок плотность энергетических токов очень велика и очень быстро снижается по мере отдаления от проводников. Это означает, что полезная энергия распространяется к нагрузке по диэлектрику, окружающему проволоки, а не по проводникам.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Питание нагрузки R бифилярной линией.

Рис. 2. — Поперечный разрез бифилярной линии, питаемой постоянным током. Определение потенциалов V и V_H.

Рис. 3. — Распределение энергетических токов в бифилярной линии, питаемой постоянным током по перпендикулярному к проволокам разрезу.

Рис. 4. — Графическое построение кассиниевых овалов.

Рис. 5. — Поперечный разрез (в данный момент) трехфазной линии, питаемой переменным током. Определение потенциалов V и V_H.

Рис. 6. — Распределение энергетических токов (в данный момент) в трехфазной линии, питаемой переменным током по перпендикулярному к проволокам разрезу.

Рис. 7. — Поля $\bar{E}$ и $\bar{H}$, созданные бифилярной линией.

Рис. 8. — Поперечный разрез бифилярной линии. Вычисление поля $\bar{E}$ по теореме Гаусса.

Рис. 9. — Поперечный разрез бифилярной линии. Вычисление производной $\frac{d\rho}{d\alpha}$.

LA DENSITÉ DES COURANTS ÉNERGÉTIQUES DANS LE CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE DES LIGNES DE TRANSPORT D'ÉNERGIE

(RÉSUMÉ)

Dans cet article, les Auteurs soulignent l'importance du vecteur de Poynting ($\bar{S}$) pour l'explication du transport de l'énergie électrique de courant continu et à basse fréquence.

Dans ce but, ils prennent pour point de départ la loi de conservation et de transformation de l'énergie électromagnétique.

Ils ont considéré d'abord le cas d'une ligne bifilaire, alimentée par une source de courant continu, et ensuite, le cas d'une ligne triphasique, alimentée par un courant alternatif.

Pour les deux cas, les Auteurs calculent la distribution des courants énergétiques dans l'espace, autour des conducteurs. Les diagrammes respectifs sont représentés sur les figures 3 et 6.

De l'analyse de ces diagrammes il résulte que la densité des courants énergétiques est très grande dans un espace limité, autour des fils, et qu'elle diminue extrêmement vite, au fur et à mesure que l'on s'éloigne des conducteurs. Ceci signifie que l'énergie utile se propage vers la charge par le diélectrique autour des fils et non pas par les conducteurs.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Alimentation d'une charge R par une ligne bifilaire.

Fig. 2. — Section transversale d'une ligne bifilaire alimentée par un courant continu. Détermination des potentiels V et V_H.

Fig. 3. — Distribution des courants énergétiques pour une ligne bifilaire alimentée par un courant continu, dans une section normale aux fils.

Fig. 4. — Construction graphique des ovales de Cassini.

Fig. 5. — Section transversale (à un moment donné) à travers une ligne triphasique alimentée par un courant alternatif. Détermination des potentiels V et V_H.

Fig. 6. — Distribution des courants énergétiques (à un moment donné) pour une ligne triphasique alimentée par un courant alternatif dans une section normale à la direction des conducteurs.

Fig. 7. — Les champs $\overline{E}$ et $\overline{H}$, créés par une ligne bifilaire.

Fig. 8. — Section transversale d'une ligne bifilaire. Calcul du champ $\overline{E}$ à l'aide du théorème de Gauss.

Fig. 9. — Section transversale d'une ligne bifilaire. Calcul de la dérivée $\frac{d\rho}{d\alpha}$.

BIBLIOGRAFIE

1. I. Constantinescu *Transmisii electromagnetice*. București, 1948.
2. C. A. Crug *Bazele electrotehnicii*. București, 1952. vol. I.
3. R. Răduleț *Sensul fizic al transmisiunii energiei electromagnetice*. Studii și cercetări de fizică, t. IV, nr. 3—4, iulie—decembrie, 1953.
4. I. E. Tamm, *Bazele teoriei electricității*. București, 1952.
5. T. Tănăsescu, *Transferul energiei electrice*. Electricitatea, 1952, nr. 8—9.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE FIZICĂ
Tomul VI, nr. 1, 1955

GENERAREA MULTIPLĂ DE MEZONI LA CIOCNIREA UNOR PARTICULE DE MARE ENERGIE CU NUCLEE ATOMICE *)

DE

E. FRIEDLÄNDER

I. Introducere

După cum se ştie, ciocnirea unei particule nuclear active**) de mare energie ($> 10^9$eV) cu un nucleu atomic, duce la generarea unei jerbe «nucleare». Asemenea jerbe constau dintr-un număr mai mic sau mai mare de mezoni (şi eventual perechi nucleon-antinucleon) care se mişcă împreună cu nuclonii δ şi componenta electrono-fotonică (provenită din dezintegrarea mezonilor π^0) într-un fascicul mai mult sau mai puţin îngust, concentrat în jurul direcţiei de mişcare a particulei generatoare.

Într-o lucrare anterioară [1] s-a arătat că atît teoria generării «singulare» [2], cît şi diferitele teorii de generare «multiplă» [3], [4], [5], [6], sînt insuficiente pentru a explica diferitele caracteristici cunoscute ale jerbelor nucleare, şi că fenomenul trebuie să fie condiţionat de un proces intranuclear de cascadă. În aceeaşi lucrare s-a calculat în prima aproximaţie — ce e drept, foarte grosolană — un model al unui asemenea proces, considerat ca o succesiune de procese Fermi [5] datorite ciocnirilor succesive ale unui nucleon de mare energie cu mai mulţi nucleoni ai nucleului ciocnit.

Acest mod schematizat de a descrie procesul fizic şi metoda, oarecum empirică, de calcul al transferului de energie duc evident la aceea că rezultatele obţinute au numai un caracter semicantitativ. Aplicarea formulelor din [1] dă însă în orice caz un ordin de mărime corect şi dovedeşte că din punctul de vedere al generării multiple de mezoni, interacţiunea unui nucleon cu un nucleu nu se poate reduce la un simplu proces Fermi.

Problema interacţiunii nucleonilor de mare energie cu nuclee atomice a mai fost atacată de H. Messel, R. Potts şi C. Mc Cusker [7], pornind de la modelul de generare «singulară» al lui Heitler-Janossy [2]; aceşti autori au atribuit dependenţa numărului de mezoni de numărul atomic al nucleului ciocnit, interacţiunilor secundare în nucleu ale mezonilor generaţi «singular». Un asemenea model pare însă în ziua de azi foarte puţin verosimil, deoarece însuşi fenomenul de generare «multiplă» este un fapt experimental dovedit [8], [9], [10], [11].

L. Landau [12] descrie procesul de generare în conformitate cu o schemă «multiplă» dar tratează numai cazul (aproape niciodată întîlnit în practică) al ciocnirii a

---

*) Prezentată în Sesiunea ştiinţifică a Academiei R.P.R. din 12 ianuarie 1954.

**) Adică orice particulă care interacţionează cu nucleonii cu o secţiune eficace, apropiată de cea geometrică.

două nuclee de același număr de masă A. Se știe însă că majoritatea jerbelor nucleare (din care rezultă în ultimă instanță totalitatea radiației cosmice observate în straturile inferioare ale atmosferei), sînt condiționate de interacțiuni nucleon-nucleu și mezon π-nucleu. În afară de aceasta, teoria lui Landau nu dă posibilitatea de a calcula constanta de proporționalitate în legea $n \sim E_0^{*/4}$, autorul mulțumindu-se să o evalueze pe cale empirică. De asemenea, nu pot fi calculate abundențele relative ale diferitelor specii de particule generate și nici influența parametrului de șoc.

Roesler și Mc Cusker [13] au calculat un model geometric pentru procesul intranuclear de cascadă. Ei nu pleacă însă de la o teorie definită pentru interacțiunea elementară, ci dimpotrivă, încearcă să folosească modelul propus de ei pentru a face — cu ajutorul materialului experimental — o alegere între diferitele teorii. O tentativă de același gen a fost făcută și în lucrarea [14]. În ambele lucrări se face însă în mod tacit o ipoteză (nejustificată de altfel prin nici un fapt experimental sau teoretic), cu privire la durata de viață a sistemului excitat, format la prima ciocnire nucleon-nucleon din nucleu (vezi mai jos, relația (5)).

Spre deosebire de acest punct de vedere, lucrarea de față constituie o încercare de a elabora o teorie statistică a interacțiunilor nucleon-nucleu, plecînd de la o ipoteză concretă asupra interacțiunii elementare și anume teoria inițială a lui Fermi [5]. Dacă această teorie este considerată ca valabilă pentru ciocnirea a doi nucleoni, atunci dezvoltarea ei, consecventă pînă la ultimele ei consecințe, ne duce la un model *sui-generis* de proces intranuclear de cascadă.

La stabilirea acestui model se pune problema precizării unui amănunt fizic al fenomenului, care nu a fost tratat în mod explicit nici în lucrările lui Fermi [5] și nici în lucrări mai recente consacrate aceleiași probleme [13].

În majoritatea teoriilor existente se admite că, după ciocnirea a doi nucleoni, cele două particule formează un «nucleu compound» (sau mai pe scurt un «compound») în care are loc într-un mod sau altul generarea mezonilor. În nici una din aceste teorii nu se pune însă în mod explicit problema *duratei de viață* a acestui sistem. Importanța cunoașterii acestei mărimi rezultă din următoarele considerații

Să considerăm ciocnirea unui nucleon de mare energie cu un nucleu oarecare. Dat fiind că secțiunea eficace de interacțiune cu nucleonii este cea «geometrică» [6]

$$\sigma_0 = \pi r_0^2 = \pi \left(\frac{\hbar}{\mu c} \right)^2 , \tag{1}$$

unde μ este masa mezonului π, nucleonul va interacționa cu un nucleon din nucleul ciocnit după ce a parcurs, în medie, în nucleu un drum

$$\lambda = \frac{1}{\sigma_0} \cdot \frac{4}{3} \pi r_0^3 = \frac{4}{3} \frac{\hbar}{\mu c} . \tag{2}$$

Fie τ_λ timpul necesar pentru ca o particulă relativistă ($\beta \approx 1$) să parcurgă distanța λ

$$\tau_\lambda = \frac{\lambda}{c} = \frac{4}{3} \frac{\hbar}{\mu c^2} \simeq 5.10^{-24}\ s \tag{3}$$

și τ durata de viață a compoundului format ca urmare a primei interacțiuni. Acest compound se mișcă prin nucleu, și dacă este îndeplinită condiția

$$\tau \geqslant \tau_\lambda , \tag{4}$$

există șanse mari ca el să interacționeze cu un nou nucleon, înainte ca particulele apărute în sistem să fi reușit să se despartă. În acest caz, trebuie să ia naștere un nou compound în care, de astă dată, generarea de mezoni se produce pe seama a trei nucleoni. Dacă și durata de viață a noului compound satisface inegalitatea (4), procesul descris mai sus se poate repeta și devine posibilă acumularea succesivă de nucleoni în compound, pînă ce acesta părăsește nucleonul ciocnit.

Dacă dimpotrivă

$$\tau < \tau_\lambda, \tag{5}$$

dezintegrarea compoundului se produce înainte ca să poată fi înglobat un nou nucleon. De această ipoteză s-a făcut uz în mod tacit în lucrările [13], [14], [15] și [16].

Teoria pe care o vom dezvolta în cele ce urmează pleacă tocmai de la o ipoteză concretă cu privire la durata de viață a compoundului. Ea își propune, în primul rînd, obținerea unei relații valabile într-un domeniu de energii cît mai larg, între numărul de particule generate — pe de o parte — și parametrii interacțiunii (energia particulei incidente, natura ei, masa nucleului ciocnit) pe de altă parte. În al doilea rînd, vom evalua compoziția jerbei (abundența relativă a diferitelor specii de particule) și numărul și spectrul energetic al particulelor secundare nuclear active din jerbele nucleare *).

Rezolvarea acestor probleme prezintă evident interes, în primul rînd, pentru înțelegerea fenomenelor care însoțesc absorbția radiației cosmice primare în atmosfera terestră și duc la generarea jerbelor atmosferice largi. În al doilea rînd, compararea teoriei cu datele experimentale ne poate da informații prețioase asupra interacțiunilor nucleare la mari energii, asupra spinului diferitelor particule elementare și a tipurilor de interacțiune ale acestor particule cu nucleonii. În sfîrșit, odată rezolvată problema interacțiunilor nucleon-nucleu, și nucleu-nucleu, se va deschide calea rezolvării problemei « degradării » nucleelor grele în spațiul cosmic.

Trebuie subliniat că, prin însuși caracterul ei statistic-termodinamic, teoria de față, care pleacă în fond de la teoria lui F e r m i [5], reprezintă ca și aceasta din urmă, un caz limită în opoziție cu teoria perturbațiilor [2], [7]. După cum va reieși din expunerea ce urmează, concordanța dintre valorile calculate și datele experimentale este suficient de bună pentru a indica, că abaterile schemei noastre de la realitate nu sînt prea mari și că o asemenea schemă poate servi ca o bună aproximație pînă la punerea la punct a unei teorii cuantice riguroase a procesului elementar de interacțiune.

II. Multiplicitatea jerbei

§ 1. Vom folosi, în cele ce urmează, un sistem de unități în care $M = c = \hbar = 1$, unde M este masa nucleonului.

Să considerăm ciocnirea unui nucleon de viteză β_0 și energie totală

$$E_0 = (1 - \beta_0^2)^{-1/2}, \tag{6}$$

cu un nucleu de masă atomică A. Vom considera aici numai cazurile cu $E_0 \gg 1$ în care lungimea de undă de Broglie a nucleonului incident

$$\lambda\!\!\!^{-} = \mu \frac{r_0}{\beta_0 E_0} \tag{7}$$

*) Vom folosi peste tot termenul de « jerbe nucleare » pentru jerbele de mezoni, nucleoni și hiperoni, iar termenul mai special de « jerbe electrono-nucleare » numai pentru acele jerbe, în care s-a dezvoltat simțitor cascada electrono-fotonică.

este mult mai mică decît raza de acțiune a forțelor nucleare și deci decît diametrul nucleului ciocnit

$$D = 2 r_0 A^{1/3} = \frac{2 A^{1/3}}{\mu}, \tag{8}$$

astfel încît mișcarea poate fi tratată în aproximație cvasiclasică.

După ce parcurge (în medie) o distanță λ în nucleu, nucleul incident interacționează cu unul din nucleonii din nucleu formînd un compound «1» care se mișcă cu mare viteză prin nucleu. Facem acum ipoteza fundamentală și anume, că durata de viață a acestui compound satisface inegalitatea (4). Ipoteza că $\tau > \tau_\lambda$ poate fi justificată în modul următor.

În conformitate cu teoria relativității restrînse, timpul de stabilire a echilibrului statistic în compound nu poate fi mai mic decît timpul necesar propagării (cu viteza 1) a oricărei interacțiuni de-a lungul celei mai mari dimensiuni a compoundului [6]. Dacă admitem [5] că acesta are forma unui elipsoid de rotație (sferă contractată relativist), atunci semiaxa necontractată este de ordinul razei de acțiune a forțelor nucleare, așa încît

$$\tau \geqslant \tau_c = \frac{1}{\mu} \tag{9}$$

și deci ținînd seama de (3)

$$\tau \geqslant {}^3/_4 \tau_\lambda . \tag{10}$$

Chiar și în acest caz limită, probabilitatea ca pe o distanță $l \leqslant \frac{3}{4}\lambda$ compoundul să înglobeze un nou nucleon este

$$1 - \exp\left(-\frac{l}{\lambda}\right) \approx 53\%.$$

Este însă rezonabil să admitem că τ este sensibil mai mare decît limita inferioară care rezultă din inegalitatea (10).

Un argument «experimental» în favoarea acestei presupuneri îl constituie distribuția unghiulară a jerbelor nucleare, care sînt totdeauna axate pe direcția de mișcare a particulei incidente. Într-adevăr, dacă inegalitatea (4) nu ar fi fost respectată, ar trebui să apară asimetrii în jerbă, datorită următorului fenomen: după cum s-a arătat în [16], toate particulele de mare energie (emise în conul «anterior» în sistemul centrului de inerție) cad asupra unui singur nucleon. Distribuția particulelor, care în sistemul centrului de inerție se mișcă în conul «posterior» este însă mult mai largă în sistemul laboratorului; interacțiunile acestor particule cu *alți* nucleoni ai nucleului ciocnit ar trebui să ducă la formarea unor jerbe nucleare «lăturalnice» sau cel puțin la o puternică asimetrie a jerbei inițiale. Cum așa ceva nu se observă în experiență, există motive puternice pentru a admite că $\tau > \tau_\lambda$.

În aceste condiții, procesul intranuclear de cascadă poate fi schematizat în modul următor:

a) Nucleonul incident străbate nucleul ciocnit antrenînd cu el nu număr ν de nucleoni (număr care variază dela caz la caz);

b) În compoundul astfel format au loc un mare număr de procese Yukawa, care duc la stabilirea unui echilibru statistic și la generarea unui număr n de mezoni și eventual perechi nucleon-antinucleon;

c) De la începutul și pînă la sfîrșitul reacției, numărul total de nucleoni (diferența între numărul nucleonilor și antinucleonilor) rămîne constant;

d) După trecerea timpului τ particulele generate și cei

$$N_n = \nu + 1 \tag{11}$$

nucleoni inițiali se despart formînd jerba nucleară*).

e) Nucleul restant excitat prin pierderea celor ν nucleoni antrenați în compound, se dezintegrează («fierbe») în nucleoni lenți și fragmente nucleare mai grele (D, T, α) care constituie «steaua» asociată cu jerba**).

§ 2. Vom descrie procesul de generare termodinamic [5] prin analogie cu radiația corpului negru. Fie Ω volumul compoundului, T temperatura gazului mezonic, E' energia totală disponibilă în sistemul centrului de inerție al compoundului final (sistemul C) și n numărul de particule de o anumită specie (de masă μ) prezent în sistem la echilibru. La energii foarte mari ($kT \gg \mu$) avem

$$\begin{aligned} E' &\sim \Omega\, T^4 \\ n &\sim \Omega\, T^3, \end{aligned} \tag{12}$$

de unde

$$n \sim \Omega^{1/4}\, E'^{3/4}. \tag{12'}$$

Cum volumul compoundului este contractat relativist

$$\Omega = \Omega_0 \gamma_c^{-1}, \tag{13}$$

unde

$$\gamma_c = (1 - \beta_c^2)^{-1/2} \tag{14}$$

este factorul Lorentz al centrului de inerție (animat de viteza β_c față de sistemul laboratorului (sistemul (L)), avem

$$n \sim E'^{3/4} \gamma_c^{-1/4}. \tag{15}$$

La energii mai mici ($kT \sim \mu$) nu mai poate fi neglijată energia de repaus μ a particulelor generate. Am studiat comportarea gazului mezonic în apropierea pragului de generare. Se poate arăta (v. anexa A) că relațiile (12) și (12') rămîn riguros valabile pînă la valori $kT \sim \mu$; sub acest prag, numărul de particule generate scade foarte repede:

$$n \sim E' \sim T^7 \tag{16}$$

și se poate afirma că generarea unei anumite specii de particule începe practic «prin salt» la temperatura μ***).

Ca în toate teoriile de acest gen alegerea volumului necontractat Ω_0 este evident arbitrară. Cea mai simplă ipoteză este că Ω_0 reprezintă o sferă de rază r_0 sau

$$\Omega_0 = \frac{4}{3}\pi \frac{1}{\mu_\pi^3}, \tag{17}$$

---

*) Datorită condiției (4), această fază trebuie, foarte probabil, să se desfășoare în afara nucleului ciocnit.

**) După cum se știe, chiar în emulsiile nucleare, punctul de dezintegrare al compoundului nu poate fi deosebit de centrul stelei. Aceasta ne dă o limită superioară (de altfel foarte plauzibilă) pentru τ: $\tau \leqslant 10^{-14}$ s.

***) Acest fapt a fost folosit la trasarea curbelor din figura 2 (a se vedea mai jos, partea IV, § 2).

ca și în teoria lui F e r m i [5]. (În aceste condiții, volumul Ω are forma unui elipsoid de rotație). Prezența altor particule, mai grele decît mezonul π în compound, nu modifică, probabil, sensibil volumul Ω_0 dacă ele sînt generate prin interacțiune cu un același cîmp [17].

În ce privește contracția Lorentz, ea nu duce, în cadrul schemei noastre, la nici o contradicție cu teoria relativității [6]. Într-adevăr, din ipoteza că $\sigma > \sigma_\lambda$ rezultă imediat că $\sigma > \sigma_c$.

§ 3. Pentru calculul concret al multiplicității jerbelor nucleare trebuie precizate constantele de proporționalitate din relațiile (12). Dacă g_i sînt ponderile statistice ale diferitelor specii de particule, prezente în sistem la echilibru și s_i valorile spinului, avem

$$\begin{aligned} n &= \left(\sum_i g_i (2s_i + 1)\, c_i'\right) \cdot \frac{2b'}{3\pi} \cdot \frac{1}{\mu^3} \cdot \frac{1}{\gamma_c} \cdot (kT)^3 \\ E' &= \left(\sum_i g_i (2s_i + 1)\, c_i''\right) \cdot \frac{2b''}{3\pi} \cdot \frac{1}{\mu^3} \cdot \frac{1}{\gamma_c} (kT)^4, \end{aligned} \tag{18}$$

unde:

$$\mu = \mu_\pi$$

$$c' = c'' = 1 \text{ pentru bosoni,}$$

$$c' = 3/4,\ c'' = 7/8 \qquad \text{pentru fermioni,}$$

$$b' = \Gamma(3)\,\zeta(3) = 2{,}414$$

$$b'' = \Gamma(4)\,\zeta(4) = 6{,}494.$$

Eliminarea temperaturii, între cele două relații (18), ne dă

$$n = a' \left(\frac{E'}{\gamma_c}\right)^{3/4} E'^{1/2}, \tag{19}$$

unde

$$a' = \left(\frac{2}{3\pi}\right)^{3/4} \mu^{-3/4} \frac{b'}{b''^{3/4}} \frac{\sum_i g_i (2s_i + 1)\, c_i'}{\left[\sum_i g_i (2s_i + 1)\, c_i''\right]^{3/4}} \tag{20}$$

În ceea ce privește mărimile E' și γ_c, ele se calculează ușor cu ajutorul transformărilor Lorentz de la sistemul C la sistemul L. Relația dintre γ_c și energia E_0 a nucleonului incident în sistemul L a fost dedusă în lucrarea [15]

$$E_0 \approx 2\nu\gamma_c^2, \tag{21}$$

ν fiind numărul de nucleoni antrenați.

Fie, pe de altă parte, ε_k' și p_k' energia și impulsul diferitelor particule în sistemul C. Atunci transformarea Lorentz de la sistemul C la sistemul L se scrie

$$\varepsilon_k = \gamma_c (\varepsilon_k' + \beta_c p_{kx}'), \tag{22}$$

unde ε_k este energia particulei în sistemul L iar p_{kx}' este proiecția lui p_k' pe direcția de mișcare a particulei incidente. Sumînd peste toate particulele și ținînd seama de faptul că în sistemul C

$$\sum_k p_{kx}' = 0, \tag{23}$$

precum și de conservarea energiei, obținem

$$\sum_k \varepsilon_k = \gamma_c \sum_k \varepsilon_k' = \gamma_c E' = E_0, \tag{24}$$

de unde

$$E' = (2\nu E_0)^{1/2} = 2\nu\gamma_c. \tag{25}$$

Astfel relația (19) devine

$$n = a_L \nu^{1/2} E_0^{1/4}, \tag{26}$$

sau

$$n = a_c \nu^{3/4} \gamma_c^{1/2}, \tag{27}$$

după cum vrem să-l exprimăm pe n cu ajutorul unor mărimi măsurabile în sistemul L respectiv C. Din (21) și (25) rezultă evident că $a_c = a_L 2^{1/4}$.

Tabloul nr. 1

Ponderile statistice ale diferitelor specii de particule nuclear active

Particula	Varianta	g	s	G'	G''
π	—	3	0	3	3,0
$\varkappa$	1	2	$^1/_2$	3	3,5
	2	4	$^1/_2$	6	7,0
	3	2	$^3/_2$	6	7,0
	4	4	$^3/_2$	12	14,0
χ	1	2	0	2	2,0
	2	3	0	3	3,0
	3	2	1	6	6,0
	4	3	1	9	9,0
n	—	4	½	6	7,0

În tabloul nr. 1 sînt trecute ponderile statistice ale diferitelor specii de particule, a căror generare, în abundență sensibilă, este de presupus în jerbele nucleare. La mezonii $\varkappa$ și χ s-au calculat în mod tentativ ponderile și în ipoteza că spinul este supraunitar.

În tabloul nr. 2 sînt date constantele a_L pentru diversele ipoteze de mai sus. Se vede din acest tablou că a_L, adică numărul total de particule, depinde într-o mică măsură de g_i și s_i. (Cea mai « abundentă » combinație și anume $\pi\varkappa_3\chi_4 n$ dă, față de cazul cînd sînt generați numai mezoni π, o creștere a multiplicității cu numai $\sim 50\%$).

§ 4. Relațiile (26), respectiv (27), au fost deduse în ipoteza că toate ciocnirile care au dus la formarea compoundului sînt riguros centrale. Cum în realitate acest lucru nu are loc, sistemul posedă întotdeauna un moment cinetic $\mathfrak{M}$ diferit de zero, și ca atare trebuie aplicată corecția pentru conservarea acestui moment [18].

În lucrarea [18], F e r m i a arătat că momentul cinetic total este legat de parametrul de șoc b prin intermediul unui parametru auxiliar ρ, astfel încît

$$\frac{\mathfrak{M}(b)}{E' \cdot r_0} = \frac{3 f_1(\rho)}{2 f_2(\rho)}, \tag{28}$$

funcția din membrul drept al acestei ecuații fiind tabelată în [18].

Pentru cazul $\nu = 1$, avem evident

$$\mathfrak{M} = 2\gamma_c \cdot b \tag{29}$$

şi în virtutea relaţiei (24)

$$\mathfrak{M} = E' \cdot b, \tag{30}$$

de unde

$$\frac{b}{r_0} = \frac{3 f_1(\varrho)}{2 f_2(\varrho)}. \tag{31}$$

Se poate uşor arăta (anexa B) că pentru cazul a ν ciocniri ($\nu > 1$), raportul $\dfrac{\mathfrak{M}}{r_0 E'}$

Tabloul nr. 2

Constanta de multiplicitate a_ι şi sumele $\Sigma G'_i$ şi $\Sigma G''_i$

Varianta	a_ι	$\Sigma G'_i$	$\Sigma G''_i$
π	3,06	3,0	3,0
$\pi\varkappa_1$	3,45	6,0	6,5
$\pi\varkappa_2$	3,79	9,0	10,0
$\pi\varkappa_3$	3,79	9,0	10,0
$\pi\varkappa_4$	4,20	15,0	17,0
$\pi\chi_1$	3,49	5,0	5,0
$\pi\chi_2$	3,66	6,0	6,0
$\pi\chi_3$	4,03	9,0	9,0
$\pi\chi_4$	4,32	12,0	12,0
$\pi\varkappa_1\chi_2$	3,94	9,0	9,5
$\pi\varkappa_1\chi_4$	4,54	15,0	15,5
$\pi\varkappa_3\chi_2$	4,03	12,0	13,0
$\pi\varkappa_3\chi_4$	4,62	18,0	19,0
$\pi\varkappa_1\chi_2 n$	4,32	15,0	16,5

este dat de expresia

$$\frac{\mathfrak{M}}{r_0 E'} = \frac{3 f_1(\varrho)}{2 f_2(\varrho)} = \sum_1^{\nu} a_i \psi_i, \tag{32}$$

unde

$$\psi_i = \frac{b_i}{r_0}, \tag{33}$$

sînt parametrii de şoc corespunzători ciocnirilor individuale, iar

$$a_i = \frac{1}{\sqrt{\nu i}}. \tag{34}$$

Vedem de aici că suma $\Sigma a_i \psi_i$ poate fi înlocuită cu un « parametru de şoc echivalent »

$$\psi = \sum_1^{\nu} a_i \psi_i, \tag{35}$$

care prin intermediul parametrului ϱ (relaţia (32)) determină distribuţia unghiulară şi energetică a particulelor din compound şi multiplicitatea jerbei.

§ 5. La prima vedere s-ar părea că pentru $\nu > 1$ creșterea momentului cinetic trebuie să ducă la o reducere a multiplicității. Dacă se ține însă seama de posibilitatea că la ciocnirile repetate din nucleu, variația momentului cinetic al sistemului la o ciocnire poate fi atît pozitivă, cît și negativă, se poate calcula un «parametru median de șoc echivalent» $\tilde{\psi}$, cu ajutorul căruia se pot studia statistic un număr mare de cazuri observate. Calculele date în anexa C duc la rezultatul

$$\tilde{\psi}(\nu) \approx \frac{1}{\sqrt{2\nu}}, \tag{36}$$

adică în medie la o creștere a multiplicității cu numărul de nucleoni antrenați.

Folosind funcția de multiplicitate $C(\psi)$ calculată în baza lucrării lui Fermi [18] de către L. Voyvodic și E. Pickup [19] și care poate fi bine aproximată prin relația

$$C(\psi) \equiv \frac{n(\psi)}{n(0)} \approx 1 - \psi^2, \tag{37}$$

obținem, în locul relațiilor (26) și (27)

$$\tilde{n} = a_L \sqrt{2} \frac{(2\nu - 1)}{(2\nu)^{1/2}} E_0^{1/4}, \tag{38}$$

sau

$$\tilde{n} = a_c \sqrt{2} \frac{(2\nu - 1)}{(2\nu)^{1/4}} \gamma_c^{1/2}, \tag{39}$$

unde semnul $\tilde{n}$ arată că aceste relații descriu «evenimentul median» într-un mare număr de cazuri.

§ 6. Pentru a evalua pe ν, să considerăm cazul în care particula generatoare este un nucleon. Într-un nucleu atomic, numărul ν de ciocniri suferite de nucleon (respectiv compound) variază de la element la element și de la o ciocnire la alta, fiind supus la fluctuații importante. Numărul mediu de ciocniri $\xi = \bar{\nu}$ pentru un nucleu de număr de masă A se poate calcula din relația

$$\xi = \bar{l}/\lambda, \tag{40}$$

unde [1]

$$\bar{l} = \frac{4}{3} r_0 A^{1/3}, \tag{41}$$

este lungimea medie a drumului total parcurs în nucleu de către compound. Ținînd seama și de (2), avem

$$\xi = A^{1/3}. \tag{42}$$

Relația (42), ca și relația (2), este valabilă numai în ipoteza că secțiunea eficace de interacțiune a compoundului cu nucleonii este constantă și egală cu σ_0. La prima vedere s-ar părea că, pe măsură ce se aglomerează nucleoni în compund, secțiunea acestuia ar trebui să crească, ceea ce ar duce la o importantă creștere a lui ξ. Aceasta ar fi valabil însă numai dacă am considera compoundul ca un nucleu obișnuit. Interacțiunea extrem de intensă între nucleoni și mezoni duce însă foarte probabil la aceea că volumul eficace al gazului mezonic la echilibru are dimensiuni liniare de ordinul lungimii de undă Compton a

celei mai ușoare particule prezente în compound (în speță mezonul π), indiferent de numărul nucleonilor prezenți. Ultimul cuvînt în această problemă revine evident experienței.

§ 7. În cazul cînd particula generatoare nu este un nucleon ci un mezon nuclear activ (de exemplu un mezon π), se poate ușor arăta că (la energii egale) numărul de particule generate nu diferă sensibil de valoarea dată de relația (26) respectiv (38). Urmînd o cale analogă cu cea din [15] se ajunge la următoarea relație pentru energia «echivalentă» $E\pi$ pe care trebuie să o posede un mezon π pentru a genera o jerbă cu aceeași multiplicitate la un nucleon de energie E_0:

$$2(E_\pi + 1) - 1 \approx 2(E_0 + 1) \tag{43}$$

sau

$$E_\pi \approx E_0 + 1/2. \tag{44}$$

După cum se va vedea mai departe (anexa D) mezonii π sînt efectiv nuclear activi numai pentru energii foarte mari ($E_\pi > 100$). Aceasta înseamnă că practic «eficacitatea jerbigenă» a unui mezon π, care a reușit să interacționeze cu un nucleu, este aceeași cu a unui nucleon.

În cazul cînd particula generatoare este un nucleu de număr, de masă A_0 și energie totală $A_0 E_0$, energia de legătură a celor A_0 nucleoni este neglijabilă în comparație cu energia impactului. Ca atare, nucleul incident este echivalent cu A_0 nucleoni independenți care interacționează (cu secțiunea eficace geometrică) cu nucleonii nucleului ciocnit. Numărul total de particule generate va fi deci proporțional cu A_0, cel puțin pentru nuclee incidente ușoare (D, T, α). La nuclee incidente grele, procesul se complică probabil prin aglomerarea de la început a mai multor nucleoni din nucleul incident în «compounduri parțiale», ceea ce la energii nu prea mari trebuie să ducă la scăderea numărului total de mezoni generați. Avînd în vedere frecvența extrem de mică a ciocnirilor nucleu-nucleu în atmosferă, nu ne vom ocupa în lucrarea de față de detaliile fenomenului.

III. Particulele secundare

§ 1. Pragul energetic începînd de la care sînt generate particule de masă m se determină din cea de a doua dintre relațiile (18), dacă facem substituția

$$kT = m. \tag{45}$$

Se obține astfel

$$(E'\gamma_c)_{\text{prag}} = (E_0)_{\text{prag}} \sim m^4 \tag{46}$$

sau

$$(\gamma_c)_{\text{prag}} \sim m^2 \nu^{-1/2}. \tag{47}$$

În sistemul L, pragul nu depinde deci de ν. Din aceste relații se vede că, în afară de energii relativ mari, mezonii K *) sînt statistic defavorizați. Astfel, de exemplu, în ipoteza $\varkappa_2$ (v. tabloul nr. 1), pragul de generare al mezonilor $\varkappa$ este

$$\left.\begin{aligned} &\text{în sistemul } L\text{: } E_0 \gtrsim 200\, GeV \\ &\text{în sistemul } C\text{: } \gamma_c \gtrsim 10\, \nu^{-1/2}. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

În schimb, după cum se poate ușor vedea din (46), mezonii π sînt generați în număr apreciabil la orice energii $E_0 \gtrsim 3$ [21].

*) Nomenclatura mezonilor a fost pusă de acord cu convenția internațională [20].

§ 2. La energii mai mari decît pragul respectiv, abundența diferitelor specii de particule este funcție numai de ponderile statistice

$$G'_k = g_k (2 s_k + 1) c'_k \tag{49}$$

și anume:

$$\frac{n_k}{n} = \frac{G'_k}{\sum_i G'_i}. \tag{50}$$

Folosind tabloul nr. 1 se vede că între $\sim$ 200 GeV și $\sim$ 5000 GeV (pragul de generare al perechilor nucleon-antinucleon) mezonii K trebuie să constituie $\sim$ 50...70% din particulele jerbei. Dincolo de acest prag numărul nucleonilor devine comparabil cu cel al mezonilor K.

§ 3. În mod analog, fracțiunea de energie transferată unei anumite specii de particule depinde de ponderile statistice

$$G''_k = g_k (2 s_k + 1) c''_k \tag{51}$$

și anume

$$\frac{\varepsilon_k}{E'} = \frac{G''_k}{\sum_i G''_i}. \tag{52}$$

De aici rezultă între altele că la energii foarte mari ($>$ 100 GeV) fracțiunea de energie transferată mezonilor π scade foarte mult, ajungînd pînă la 30% și chiar 18% (tabloul nr. 1). Cum mezonii π^0 constituie aproximativ 1/3 din mezonii π încărcați, se vede că fracțiunea de energie transferată componentei electrono-fotonice a jerbelor largi atmosferice scade foarte mult [22].

§ 4. Mulți autori folosesc caracteristicile jerbelor largi atmosferice pentru a face o comparație între diferitele teorii ale actului elementar și datele experimentale (a se vedea de exemplu [23]). Cum la calculul procesului de cascadă (extranuclear) din atmosferă vin în considerare nu *toate* particulele secundare, ci numai cele *nuclear active*, am calculat eficacitatea nucleară χ_π a unui mezon π de energie ε; această mărime se definește ca probabilitatea ca un mezon generat cu energia ε la o adîncime de z parcursuri nucleare în mediul considerat, să genereze o jerbă nucleară pe întregul său parcurs în acest mediu. Calculele respective sînt date în anexa D. În figura 1 este reprezentată variația lui χ_π pentru două valori ale lui z. După cum se vede χ_π poate fi aproximat în diferite domenii de energii printr-o funcție de putere

$$\chi_\pi \sim \varepsilon^\alpha, \tag{53}$$

α avînd valori mici pentru energii mari și adîncimi mari în atmosferă; la energii mici ($\lesssim$ 50 GeV). α crește însă destul de repede. Cum [23]

$$\varepsilon \simeq \frac{2 E_0}{n}, \tag{54}$$

obținem ușor numărul de mezoni nuclear activi

$$n^* \sim \nu^{\frac{1-\alpha}{2}} E_0^{\frac{3\alpha+1}{4}}. \tag{55}$$

§ 5. Distribuția unghiulară a particulelor secundare este dată de relația (53) din lucrarea lui Fe r m i [18], în care însă parametrul ρ trebuie înlocuit cu valoarea care rezultă din (32).

În practică, factorul Lorentz al centrului de inerție se evaluează de mulți autori [24], [25] din relația

$$\gamma_c^2 \approx \frac{1}{\theta_f \theta_{1-f}} \tag{56}$$

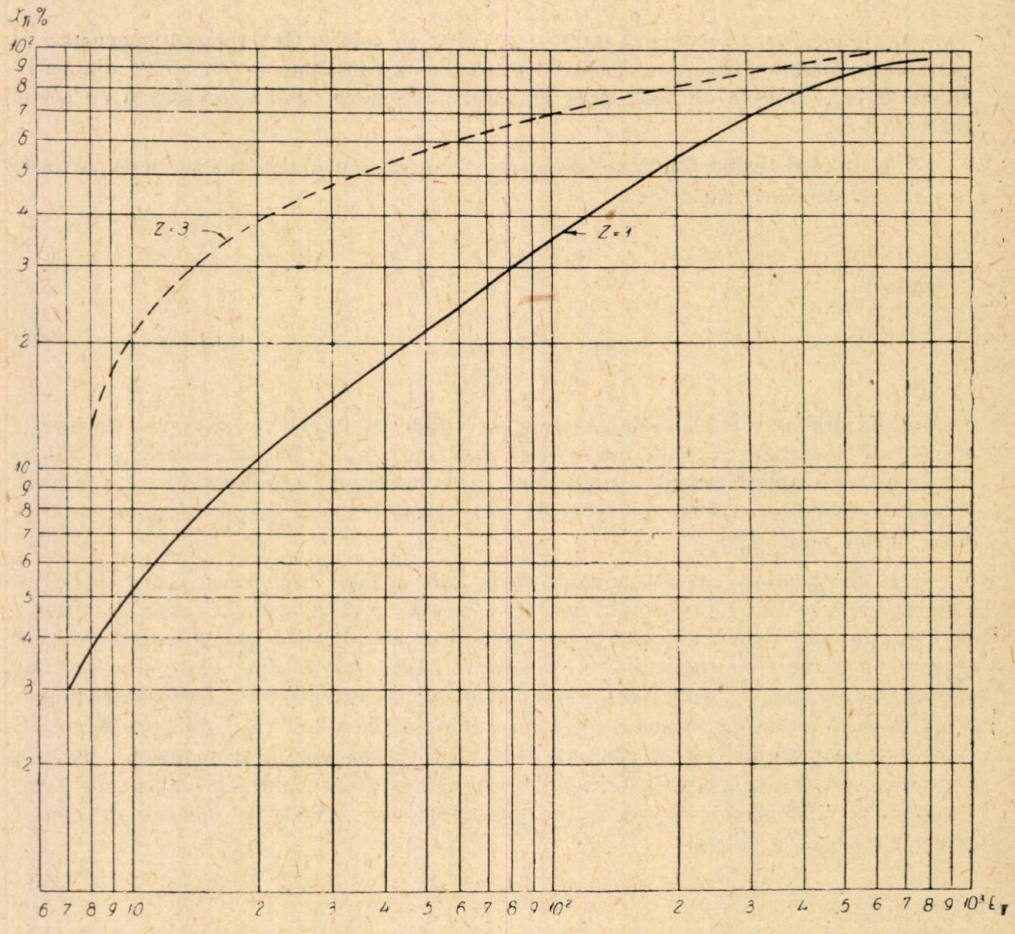


Fig. 1

unde θ_f și θ_{1-f} sînt respectiv semideschiderile conurilor în care se concentrează în sistemul L fracțiunea f sau $1-f$ din particulele din jerbă. De obicei se ia $f = 1/2$, de unde

$$\gamma_c \approx \frac{1}{\theta_{1/2}}, \tag{57}$$

unde $\theta_{1/2}$ este unghiul median al jerbei (semideschiderea conului în care sînt cuprinse jumătate din particulele încărcate observate în emulsii nucleare sau în camera Wilson). Făcînd

ipoteza că $\nu = 1$ diferiții autori (de exemplu [26]), calculează energia primarului (E_0) din relația

$$E_0 \approx \frac{2}{\theta^2_{1/2}}, \tag{58}$$

care rezultă din (57) cu ajutorul transformării Lorentz (în plus, în această relație se face în mod tacit ipoteza că în sistemul C distribuția unghiulară a particulelor este izotropă).

Am evaluat eroarea ce se comite cînd se presupune că $\nu = 1$, luînd în considerare și influența lui ν asupra anizotropiei distribuției unghiulare. După calcule simple date în anexa E, se obține

$$E_0 \approx \frac{\nu e^{-\frac{2}{\nu}}}{\theta^2_{1/2}}. \tag{59}$$

În tabloul nr. 3 sînt trecute valorile raportului $\frac{E_0(\nu)}{E_0(1)}$ pentru diferiți ν. Se vede că

Tabloul nr. 3

Dependența de ν a energiei primare deduse din unghiul median al jerbei

ν	$E_0^{\nu}/E_0^{(1)}$
1	1,00
2	3,62
3	6,99
4	10,9
5	15,1
10	43,4

neglijarea procesului intranuclear de cascadă poate duce la importante erori în aprecierea energiei particulei generatoare.

IV. Compararea teoriei cu datele experimentale

§ 1. După cum se știe, aplicarea metodelor statistice pentru calculul fenomenului de generare multiplă de mezoni este cu atît mai fondată, cu cît energiile puse în joc sînt mai mari. Prin urmare, o primă verificare a valabilității unei variante oarecare a teoriei trebuie făcută prin compararea consecințelor ei cu rezultatele experimentale obținute la studiul jerbelor largi atmosferice. Bazîndu-se pe măsurători recente [27], I. Rosenthal [28] și G. Zațepin [29] au arătat că, dacă multiplicitatea jerbelor este descrisă printr-o lege de forma

$$n \sim E^k, \tag{60}$$

evoluția și compoziția jerbelor largi atmosferice poate fi explicată numai dacă $k < \frac{1}{2}$ și foarte probabil $k \sim \frac{1}{4}$; la energii de $10^{13}...10^{14}$eV ($E_0 \sim 10^3..10^5$) multiplicitatea

minimă a particulelor nuclear active, care condiționează porțiunea crescătoare a curbei de tranziție a jerbelor largi în atmosferă, trebuie să fie

$$n^* \gg 5.$$

Arătăm în cele ce urmează că aplicarea consecventă a modelului Fermi la ciocnirea nucleon-nucleu, permite regăsirea acestor date. Într-adevăr, la energii de ordinul a 10^4 avem (pentru aer — $\bar{\nu} \sim 2{,}5$ — și varianta $\pi\varkappa_1\chi_2 n$ care dă $a_L = 4{,}3$; a se vedea și tabloul nr. 2)

$$\tilde{n} \sim 100$$

și deci

$$\bar{\varepsilon} \gtrsim 200$$

După cum se vede din figura 1, la aceste energii coeficientul de eficacitate nucleară χ_π este extrem de apropiat de unitate ceea ce echivalează cu a pune $\alpha \approx 0$ în ecuația (55). Se ajunge astfel la o dependență de forma

$$n^* \sim E_0^{0{,}25} \ldots E_0^{0{,}30}, \tag{61}$$

în bună concordanță cu (59). Chiar ținînd seama de faptul că numai $\sim 1/2$ din particulele secundare sînt nuclear active (mezonii π° și diferite specii de mezoni grei au durate de viață prea scurte pentru a fi efectiv nuclear activi) și că din rațiuni energetice nu vin în considerare decît particulele emise în sistemul C sub unghiuri $\vartheta' < \frac{\pi}{2}$ [20], obținem că la $E_0 \sim 10^4$, $n^* \sim 25$ în bună concordanță cu datele experimentale.

§ 2. În ultimii ani, o serie de cercetători [8], [10], [24], [26], [30], [31], [32], [33], [34], [35], au studiat jerbele nucleare individuale generate în emulsii nucleare sensibile la electroni. Factorul Lorentz al centrului de inerție a fost determinat prin metoda distribuției unghiulare (relațiile (56) și (sau) (57)). După ce a devenit evident că o mare parte din jerbele observate prezintă o multiplicitate mult mai mare decît rezultă din teoria inițială a lui Fermi [5], unii autori [24], [32] au emis ipoteza că jerbele nucleare observate de ei ar putea fi împărțite în două grupuri, corespunzînd unor funcții de multiplicitate de tip $E_0^{1/2}$ și $E_0^{1/4}$ adică concordînd unele cu teoria lui Heisenberg [4] iar altele cu teoria lui Fermi [5]*). Arătăm în cele ce urmează că nu este nevoie de această ipoteză artificială pentru a interpreta rezultatele observațiilor și că, dimpotrivă, ele pot fi interpretate în mod satisfăcător în lumina modelului propus în lucrarea de față.

În figura 2 sînt date în scară dublă logaritmică rezultatele prelucrării a 255 de jerbe (datele sînt luate din lucrările [8], [10], [24], [26], [30], [31], [32], [33], [34], [35]). În abscisă este trecut factorul Lorentz al centrului de inerție γ_c, iar în ordonată numărul n_s de particule secundare *încărcate* cu ionizare minimală (relativistă) din jerbă. Pe un asemenea grafic, fiecărei jerbe îi corespunde deci un punct. După cum rezultă din figură, de îndată ce se folosește o statistică mai bogată decît au avut la dispoziție autorii [24], [32], punctele reprezentative acoperă în mod aproape omogen suprafața diagramei și nu poate fi vorba de nici o separare în două grupuri de « mare » sau « mică » multiplicitate.

*) Este drept că această « concordanță » nu a putut fi obținută decît prin introducerea unui « factor de inelasticitate » ad hoc.

Pentru a analiza aceste date cu ajutorul modelului procesului intranuclear de cascadă propus în lucrarea de față, am trasat pe aceeași diagramă liniile I...X, reprezentînd numărul maxim de particule ce pot fi generate (la un șoc central) pentru un ν și un γ_c date, calculate cu ajutorul relației (27). La valorile «critice» ale lui γ_c date de relația

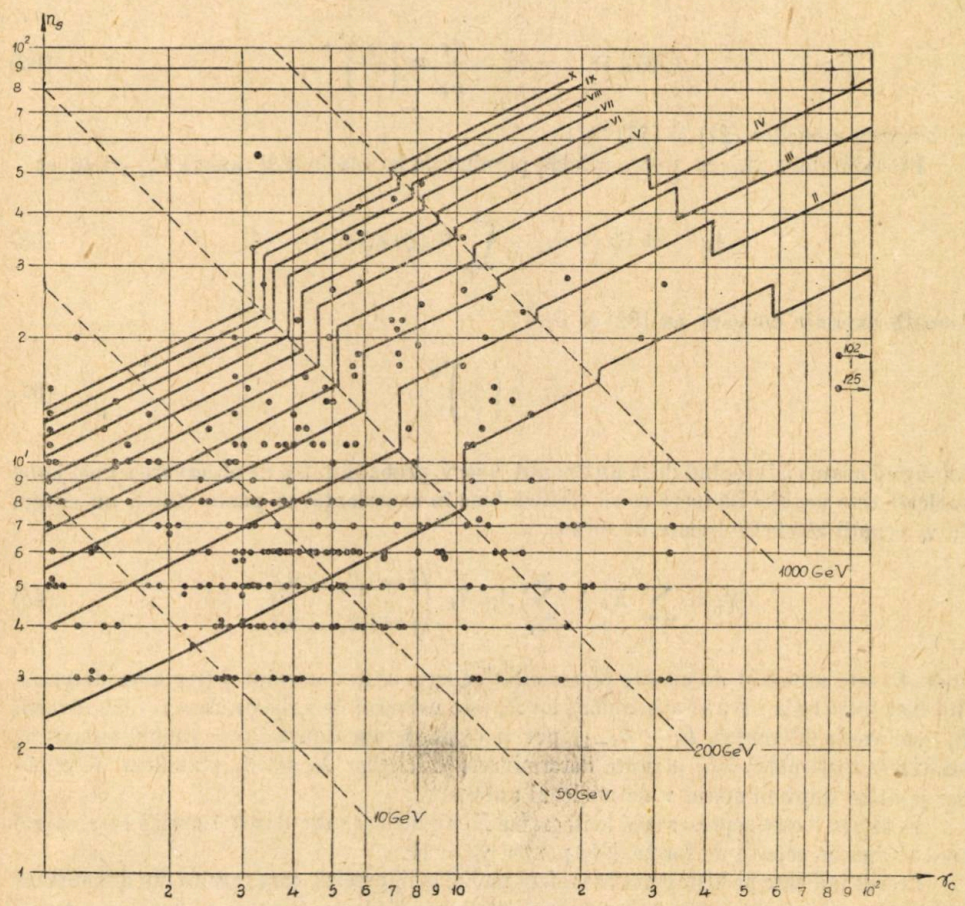


Fig. 2

(47), s-a admis că multiplicitatea variază «prin salt». S-a folosit varianta $\pi \to \pi\varkappa_1 \to \to \pi\varkappa_1\chi_2 \to \pi\varkappa_1\chi_2 n$. În conformitate cu această variantă, 1/3 din mezonii π și χ, și 1/2 din nucleoni sînt neutri și nu pot fi observați în emulsia nucleară. Acest fapt, accentuat de marea pondere statistică a neutronilor și antineutronilor, explică *scăderea* prin salt a multiplicității particulelor *încărcate* la energii foarte mari.

Este evident că punctul reprezentativ al unei jerbe, generate prin interacțiunea particulei incidente cu ν nucleoni ai nucleului ciocnit, poate fi situat oriunde între linia «ν» și axa absciselor, în funcție de «centralitatea» șocului. Ca atare, nu se poate afirma niciodată despre o jerbă individuală că ar fi rezultatul antrenării a ν nucleoni; se poate numai fixa limita inferioară a lui ν. În schimb, dispunînd de un număr mare de jerbe

observate, se poate face un studiu statistic al distribuției jerbelor după ν în modul următor:

Se calculează probabilitatea A_{ij} ca o jerbă de clasa i (provenită din antrenarea a i nucleoni) să apară pe diagramă sub linia j (vom spune în domeniul j); pentru aceasta, se definește mai întîi un parametru de șoc echivalent ψ_c, astfel încît

$$C(\psi_c) \equiv 1 - \psi_c^2 = \frac{n_j}{n_i} \approx \left(\frac{j}{i}\right)^{3/4}, \tag{62}$$

în virtutea relațiilor (27) și (37) *).

Probabilitatea A_{ij} se poate calcula pornind de la relația (83) (anexa C), știind că

$$A_{ij} = W(\psi > \psi_c) = \int_{\psi_c}^{1} W(\psi)\, d\psi = 1 - \psi_c^2, \tag{63}$$

Această expresie coincide cu (62) și deci

$$A_{ij} = \left(\frac{j}{i}\right)^{3/4}. \tag{64}$$

Admițînd acum că începînd de la un anumit $\nu = \nu_c$ probabilitatea de observare a unei jerbe nucleare este neglijabilă (ceea ce se verifică bine în experiență) se poate stabili un sistem de ν_c ecuații algebrice liniare de forma

$$B_j = \sum_{1}^{j} X_i + \sum_{j+1}^{\nu_c} A_{ij}\, X_i, \begin{pmatrix} j = 1,2,\ldots \nu_c \\ i = 1,2,\ldots \nu_c \end{pmatrix}, \tag{65}$$

unde B_j este numărul de puncte reprezentative situate în domeniul j (regiunea de grafic cuprinsă între linia j și axa absciselor), iar X_i este numărul de jerbe de clasa i. Cum diversii B_j (mai precis diferențele $B_j - B_{j-1}$) pot fi obținuți din figura 2 prin simplă numărare, rezolvarea sistemului (65) permite determinarea diferiților X_i adică, stabilirea distribuției jerbelor după numărul ν de nucleoni antrenați.

În figura 3 este reprezentată histograma $X_i(i)$ calculată din datele figurii 2 cu ajutorul unui sistem de ecuații de forma (65) pentru $\nu_c = 10$.

Erorile indicate pe histogramă se referă numai la imprecizia care rezultă din dificultatea de clasare a punctelor situate la frontiera dintre zone alăturate. În aceeași figură este reprezentată, pentru comparație, distribuția Poisson, la care ar trebui să ne așteptăm în emulsiile folosite de autori (anexa F). Dacă ținem seama de aproximațiile făcute în definirea «factorilor de acoperire» ai domeniilor A_{ij}, de impreciziile care afectează determinarea lui γ_c de către autorii lucrărilor citate (mulți folosesc în mod mecanic relațiile de tipul (56), care implică o distribuție izotropă în sistemul C, ceea ce este un caz cu totul excepțional) și de statistica încă relativ puțin bogată de care dispunem, concordanța calitativă a datelor experimentale cu așteptările teoretice poate fi considerată ca satisfăcătoare. Abaterea pronunțată de la legea Poisson, care se observă la valori mari ale lui i, poate fi pusă în legătură, mai degrabă, cu «polarizarea» modului de explorare a emulsiilor pentru găsirea de jerbe de mare multiplicitate, decît a unui mecanism specific de reacție la ν mari.

*) În primă aproximație se poate admite că distanța între două linii consecutive este constantă și egală cu $1/2 \log \nu$.

Distribuția punctelor reprezentative pe diagrama (n_s, γ_c) (fig. 2) trebuie să permită în principiu determinarea spectrului energetic al particulelor generatoare. Într-adevăr, dacă eliminăm pe ν între relațiile (26) și (27), obținem

$$n \sim E_0^{3/4} \gamma_c^{-1}. \tag{66}$$

Prin urmare, pe o diagramă $(n_s \gamma_c)$ (reprezentată în scară dublă logaritmică) liniile $E_0 =$ $=$ const sînt drepte înclinate la 45°. Numărul de puncte reprezentative, situate la dreapta unei asemenea drepte, este proporțional cu numărul de particule generatoare cu energie mai mare decît E_0. Variind poziția dreptei pe diagramă, se poate obține spectrul energetic integral al componentei generatoare.

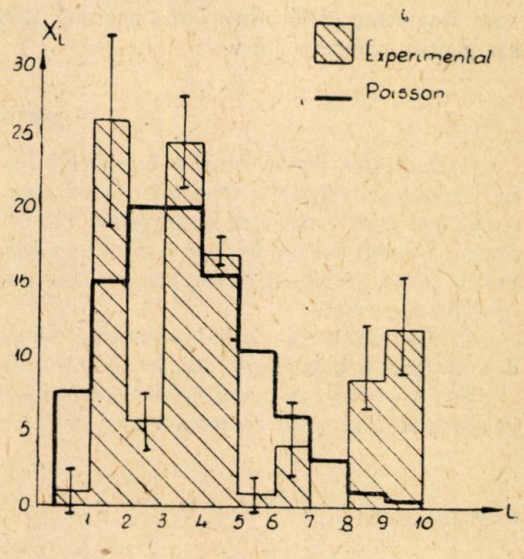


Fig. 3

Am aplicat această metodă la datele din figura 2 (pentru ilustrare, am reprezentat în figură liniile de constantă energie corespunzătoare unor valori E_0 de 50, 200 și 1000 GeV). Pentru energii $E_0 > 200$ GeV, spectrul integral al particulelor generatoare poate fi aproximat printr-o funcție de forma $E^{-1,2}$, în bună concordanță cu datele experimentale [36]. În domeniul energiilor mai mici, spectrul este «teșit» ($N(>E) \sim E^{-0,5}$) în comparație cu cel obținut din efecte geomagnetice ($N(>E) \sim E^{-1,1}$). Cauza acestei discrepanțe trebuie căutată în faptul că autorii, ale căror rezultate au fost folosite de noi pentru diagrama din figura 2, au selectat jerbe cu $n_s > 2$ (unii chiar cu $n_s > 4$), pe cînd o importantă fracțiune din protonii primari cu energii sub 50 GeV generează tocmai jerbe cu $n_s = 1...3$. Această «polarizare» în metodica explorării emulsiilor (selectarea de jerbe de mare multiplicitate) (duce la aceea că pe diagrama din figura 2, jerbele de mică energie *reală* (E_0) sînt relativ slab reprezentate. Acest fapt este echivalent cu o reducere a exponentului în spectrul energetic integral al particulelor generatoare. În schimb, la energii mari rolul jerbelor de mică multiplicitate este redus, și, prin urmare, spectrul dedus din figura 2 trebuie să reflecte spectrul real.

Vedem deci că o determinare corectă a spectrului energetic al particulelor generatoare cu ajutorul diagramei (n_s, γ_c) este perfect posibilă, dar implică o statistică «imparțială».

§ 3. O importantă consecință a existenței mai multor nucleoni în compound este posibilitatea de apariție în jerbele nucleare a unor fragmente nucleare relativ grele (deutoni, tritoni, particule α, sau chiar nuclee de Li, Be etc.) cu energii cinetice mari (mult superioare energiei fragmentelor grele «de evaporare»). Acest fapt dovedit azi pe cale experimentală [9], [37], [38], [39] nu poate fi explicat nici prin teoria generării «singulare», nici prin teoria generării «multiple», dat fiind că atît una, cît și cealaltă implică interacțiuni între numai doi nucleoni deodată. Ipoteza lui Veksler [39], conform căreia emisia și absorbția «multiplă» de mezoni virtuali poate duce la formarea de fragmente grele de mare energie (prin antrenare) este în contradicție cu considerațiile expuse în partea II, p. 4 (a se vedea

și [16]). Într-adevăr, transformarea relativistă a unghiurilor de emisie a mezonilor virtuali, de la sistemul C la sistemul L, duce la aceea că indiferent de numărul mezonilor virtuali emiși, un nucleon de mare energie nu poate interacționa simultan decît cu un singur nucleon, dacă $\vartheta < \vartheta_\lambda$. Dacă admitem însă ca valabil modelul de proces intranuclear de cascadă propus în lucrarea de față ($\vartheta > \vartheta_\lambda$), observăm că în compoundul gata format distribuția unghiulară a mezonilor este foarte largă și doi sau mai mulți nucleoni pot fi legați prin schimb de mezoni virtuali. În principiu, generarea de fragmente grele ar trebui deci să fie legată de o scădere a numărului de mezoni «concretizați». Apariția unor fragmente grele într-o jerbă nucleară trebuie deci considerată ca un criteriu decisiv pentru evaluarea lui ν.

Concluzii

1. Aplicarea consecventă a teoriei lui Fermi la ciocniri nucleon-nucleu și mezon-nucleu duce la concepția despre formarea unor sisteme excitate (compound), prin antrenarea mai multor nucleoni ai nucleului ciocnit; durata de viață a acestor sisteme este foarte probabil comparabilă cu timpul de traversare al nucleului ciocnit, astfel încît formarea jerbei propriu-zise (despărțirea particulelor secundare) are loc foarte probabil în afara nucleului.

2. S-au putut calcula în baza acestui model unele caracteristici ale jerbelor nucleare de mare energie, în funcție de numărul de nucleoni antrenați și de energia particulei incidente.

3. La energii mari, multiplicitatea unei jerbe generate de un nucleon de energie E_0 în sistemul L prin antrenarea a ν nucleoni este

$$n \sim \nu^{1/2} E_0^{1/4}. \tag{67}$$

Cum în medie

$$\bar{\nu} \sim A^{1/3}, \tag{68}$$

rezultă că

$$n \sim A^{1/6}, \tag{69}$$

în bună concordanță cu rezultatele lucrării [16], conform cărora multiplicitatea depinde numai într-o mică măsură de ponderea atomică a mediului în care este generată jerba.

4. La energii foarte mari ($> 10^5$), numărul de particule secundare *nuclear active* variază practic ca $E_0^{1/4}$. La energii mai mici, acest număr scade ceva mai repede ($\sim E_0^{1/3}$).

5. Metoda folosită de mulți autori pentru determinarea energiei particulei incidente din distribuția unghiulară [58] nu poate fi socotită ca fiind concludentă, atît timp cît nu se cunoaște ν. De acest fapt sînt afectate îndeosebi rezultatele lucrării [26], unde (din cauza neglijării dependenței distribuției unghiulare și a factorului Lorentz de ν) s-a determinat în mod eronat «pragul de generare» al mezonilor K ($\sim$ So Ge V).

6. În sistemul laboratorului, pragul de generare a diferitelor specii de mezoni este independent de numărul nucleonilor antrenați în compound și depinde numai de masa mezonilor considerați.

7. Concordanța valorilor calculate în baza modelului propus în lucrarea de față cu datele experimentale arată că, foarte probabil, valoarea (17) aleasă oarecum arbitrar pentru volumul Ω_0, nu diferă cu mult de cea reală. Studiul multiplicității jerbelor nucleare poate astfel da indicații prețioase asupra tipului de interacțiune al diferiților mezoni cu cîmpul nucleonilor (a se vedea și [17] *).

*) p. 17.

De asemenea distribuția punctelor experimentale pe diagrama (n_s γ_c) nu contravine ipotezei lui Fermi [18] privitoare la forma compoundului (sferă contractată relativist).

8. Pentru precizarea detaliilor fenomenului sînt necesare experiențe noi, îndeosebi măsurarea abundenței relative a diferitelor specii de particule în jerbe de cît mai mare energie, precum și măsurarea distribuției unghiulare și energetice a acestor particule.

9. Problema interacțiunilor nucleu-nucleu constituie obiectul unor cercetări ulterioare.

ANEXA A

Multiplicitatea pentru $kT \sim \mu$

Pentru a studia comportarea gazului mezonic în vecinătatea pragului de generare, plecăm de la funcția de distribuție a speciei respective de particule (de masă μ), în care ținem seamă de valoarea finită a masei de repaos *)

$$dn \sim \frac{p'^2 dp'}{\exp\left[\frac{1}{kT}(p'^2 + \mu^2)^{1/2}\right] - 1}, \tag{70}$$

unde p' este impulsul particulelor în sistemul C. Calculele similare au fost efectuate de către N a r a y a n [40] pentru ciocniri necentrale (parametru de șoc diferit de zero). Cum pentru compararea teoriei cu datele experimentale este interesant numărul *maxim* de particule ce pot fi generate la o energie dată, expresia (70) este scrisă pentru parametrul de șoc nul, așa încît termenul exponențial din (70) nu cuprinde corecția [18] legată de conservarea momentului cinetic.

Cu substituțiile

$$\Theta = \frac{kT}{\mu}$$
$$x = \left(1 + \frac{p^2}{\mu^2}\right)^{1/2} \cdot \frac{1}{\Theta}, \tag{71}$$

obținem numărul și energia totală a particulelor interesante în sistemul C:

$$n_k \sim \Theta^3 \int_{1/\Theta}^{\infty} \frac{x\sqrt{\Theta^2 x^2 - 1}}{e^x - 1}\, dx \sim \Theta^2 F_1(\Theta)$$
$$\varepsilon_k \sim \Theta^3 \int_{1/\Theta}^{\infty} \frac{x^2\sqrt{\Theta^2 x^2 - 1}}{e^x - 1}\, dx \sim \Theta^3 F_2(\Theta). \tag{72}$$

Integralele F_1 și F_2 au fost calculate pe cale grafică. În domenii de temperaturi bine definite, ele pot fi aproximate prin funcții de putere și anume:

$$F_1(\theta) \begin{cases} \sim \Theta^5 & \text{pentru } \Theta < 1 \\ \sim \Theta & \text{pentru } \Theta > 1 \end{cases} \tag{73}$$

*) Expresia (70) este scrisă pentru bosoni. În cazul fermionilor rezultatele rămîn calitativ neschimbate diferind numai printr-o constantă.

și

$$F_2(\Theta)\begin{cases}\sim \Theta^4 \text{ pentru } \Theta < 1\\ \sim \Theta \text{ pentru } \Theta > 1.\end{cases} \tag{74}$$

Substituind aceste expresii în (72), se obține

$$n_k(\Theta)\begin{cases}\sim \Theta^7 \text{ pentru } \Theta < 1\\ \sim \Theta^3 \text{ pentru } \Theta > 1\end{cases} \tag{75}$$

și

$$\varepsilon_k(\Theta)\begin{cases}\sim \Theta^7 \text{ pentru } \Theta < 1\\ \sim \Theta^4 \text{ pentru } \Theta > 1.\end{cases} \tag{76}$$

Ținînd seama de (71) vedem că pentru $\Theta < 1$ se obține (16) iar pentru $\Theta > 1$ (12).

ANEXA B

Parametrul de șoc echivalent

Fie β_i viteza centrului de inerție C_i al compoundului față de sistemul L, după ce a înglobat al i-lea nucleon și γ_i factorul Lorentz corespunzător:

$$\gamma_i = (1 - \beta_i^2)^{-1/2}. \tag{77}$$

În sistemul C_i, viteza nucleonului al $(i+1)$-lea *) este atunci β_i iar energia lui totală γ_i. Fie b_i parametrul de șoc al ciocnirii a $(i+1)$-a. Momentul cinetic total al sistemului după această ciocnire este atunci

$$\mathfrak{M}_{i+1} = \mathfrak{M}_i + 2\gamma_i b_i \tag{78}$$

de unde

$$\mathfrak{M}_\nu = 2\sum_1^\nu \gamma_i b_i. \tag{79}$$

Pe de altă parte, din (21) rezultă că

$$\gamma_i = \frac{\gamma_1}{\sqrt{i}} \tag{80}$$

și deci

$$\mathfrak{M}_\nu = 2\gamma_1 \sum_i \frac{b_i}{\sqrt{i}}. \tag{81}$$

Ținînd acum seamă de (24) obținem numai decît

$$\psi \equiv \frac{3f_1(\rho)}{2f_2(\rho)} = \frac{\mathfrak{M}_\nu}{E'_\nu \cdot r_0} = \frac{\sum \frac{b_i}{\sqrt{i}}}{r_0\sqrt{\nu}}. \tag{82}$$

Cu notațiile (32) și (33) se obține de aici relația (31).

*) Acest nucleon fiind, evident, în repaus (în sistemul L)

ANEXA C

Parametrul median echivalent

La ciocnirea a doi nucleoni, probabilitatea unei ciocniri cu un parametru de șoc cuprins între ψ și $\psi + d\psi$ este *)

$$W(\psi)\, d\psi = 2\psi\, d\psi. \tag{83}$$

Parametrul median $\tilde{\psi}$ se definește prin relația

$$\int_0^{\tilde{\psi}} W(\psi)\, d\psi = 1/2, \tag{84}$$

de unde

$$\tilde{\psi} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 1}}. \tag{85}$$

In cazul antrenării a doi nucleoni ($\nu = 2$), avem

$$\psi(2) = a_1\psi_1 + a_2\psi_2. \tag{86}$$

Cum în orice caz

$$|\psi(2)| < 1 \tag{87}$$

(deoarece în caz contrar $C(\psi) = 0$ — a se vedea relația (37) — și evenimentul nu mai este înregistrat ca o jerbă nucleară) ψ_2 nu poate lua orice valori, ci este cuprins între limitele

$$-1 < \psi_2 < \psi_{2\,\max}, \tag{88}$$

unde

$$\psi_{2\,\max} = \frac{1 - a_1\psi_1}{a_2}. \tag{89}$$

Parametrul median corespunzător este definit de astă dată prin relația

$$\frac{\int_{-1}^{\tilde{\psi}_2} W(\psi)\, d\psi}{\int_{-1}^{\psi_{2\,\max}} W(\psi)\, d\psi} = \frac{1}{2}, \tag{90}$$

de unde

$$\tilde{\psi}_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \psi_{2\,\max}^2)^{1/2} \tag{91}$$

(funcția $W(\psi)$ fiind normată prin integrare între limitele date de (88)).

Dînd în (86) lui ψ_2 valoarea ce rezultă din substituirea lui (89) în (91) se obține

$$\psi'(2) = a_1\psi_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}[a_2^2 - (1 - a_1\psi_1)^2]^{1/2}. \tag{92}$$

*) Probabilitatea este normată la unitate.

Dacă acum dăm lui ψ_1 valoarea (85), obținem

$$\tilde{\psi}(2) = \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2.2}}. \tag{93}$$

Pe o cale absolut analogă se poate demonstra că

$$\tilde{\psi}(\nu) = \frac{1}{\sqrt{2\nu}} \tag{94}$$

adică relația (36).

ANEXA D

Eficacitatea nucleară a mezonilor π

Fie x cantitatea de substanță străbătută de mezon (exprimat în g.cm^{-2}), x' distanța efectiv străbătută (exprimată în cm), L parcursul de interacțiune și L' parcursul de dezintegrare dat de relația:

$$L' = \beta\tau_0 \frac{\varepsilon}{\mu}, \tag{95}$$

unde μ este masa de repaos a mezonului, τ_0 viața lui medie în repaos, β și ε viteza și energia lui totală.

Fie $Q_1(x)$ probabilitatea ca un mezon să parcurgă cantitatea de substanță x fără a interacționa cu un nucleu, $Q_2(x', \varepsilon)$ probabilitatea ca mezonul cu energie ε să parcurgă distanța x' fără a se dezintegra și dQ probabilitatea că acest mezon să genereze o jerbă nucleară în stratul cuprins între x și $x + dx$.

Vom defini eficacitatea nucleară $|\chi(x_0, \varepsilon)|$ a unui mezon generat cu energia ε, la adîncimea x_0 în stratul de substanță considerat, ca raportul

$$\chi(x_0, t) = \frac{\int_{x_0}^{H-x_0} Q_1 Q_2 dQ}{\int_{x_0}^{H-x_0} Q_1 dQ}; \tag{96}$$

unde H este grosimea totală a stratului considerat.

Din însăși definiția parcursului liber rezultă numai decît

$$\begin{aligned} Q_1 &= \exp\left(-\frac{x}{L}\right) \\ Q_2 &= \exp\left(-\frac{x'}{L'}\right) \\ dQ &= \frac{dx}{L}. \end{aligned} \tag{97}$$

Valoarea lui χ va depinde foarte mult de relația ce există între x și x'. În medii dense omogene

$$x = x' \cdot d, \tag{98}$$

unde d este densitatea mediului. Avem atunci

$$\chi(x_0, \varepsilon) = \frac{\int_{x_0}^{H-x_0} \exp\left[-\frac{x}{L}(1+\eta)\right]\frac{dx}{L}}{\int_{x_0}^{H-x_0} \exp\left(-\frac{x}{L}\right)\frac{dx}{L}}, \tag{99}$$

unde

$$\eta = \frac{Ld}{L'}, \tag{100}$$

Pentru mezonii cu viața cea mai lungă (mezonii $\pi\pm$), $\eta < 0{,}05$ și deci în toate cazurile ($\eta \ll 1$ de unde

$$\chi \approx 1. \tag{101}$$

Mai complicat se prezintă lucrurile în cazul atmosferei, unde relația de dependență dintre x și x' nu mai este liniară, ci

$$x = x_0 \exp\left(\frac{x'}{L_0'}\right) \tag{102}$$

unde L_0' este grosimea stratului de aer pentru care d crește de e ori. Cu notațiile

$$z = \frac{x_0}{L}, \quad q(\varepsilon) = \frac{L_0'}{L'(\varepsilon)} \tag{103}$$

obținem după calcule simple

$$\chi(z, \varepsilon) \approx z^q e^z \int_z^\infty y^{-q} e^{-y}\, dy, \tag{104}$$

unde limita superioară a integralei s-a luat egală cu infinit ținînd seama de faptul că $H \gg L$.

Integrala din membrul drept a relației (104) a fost evaluată pe cale grafică pentru $z = 1$ și $z = 3$, obținîndu-se astfel curbele din figura 1. După cum se vede, în straturile inferioare ale atmosferei $\varkappa$ are valori considerabile chiar la energii de ordinul a ~ 30 GeV, pe cînd la limita stratosferei numai mezonii cu energii $\gtrsim 10^2$ GeV sînt efectiv nuclear activi. Aceasta înseamnă că numai nucleoni de foarte mare energie ($\sim 10^3$ GeV) pot genera asemenea mezoni. Cum asemenea nucleoni reprezintă o fracțiune infimă din fluxul total alc omponentei nucleonice primare, se înțelege ușor de ce, în stratosferă, majoritatea zdrobitoare a particulelor nucleare active sînt stabile [21].

ANEXA E

Influența lui ν *asupra unghiului median al jerbei*

Fie unghiul dintre direcția de mișcare a particulei generatoare și direcția de mișcare a unei particule secundare în sistemul C; distribuția unghiulară în sistemul C este dată [18] de relația

$$n(\eta)\, d\eta \sim \frac{2}{(\rho\eta)^2\{1-(\rho\eta)^2\}} - \frac{1}{(\rho\eta)^3} \ln\left(\frac{1+\rho\eta}{1-\rho\eta}\right), \tag{105}$$

unde

$$\eta = \cos \vartheta', \tag{106}$$

iar ρ este parametrul definit prin relația (27).

Unghiul $\vartheta'_f = \text{arc cos } \eta_f$ în care se concentrează (în sistemul C) fracțiunea f din particulele secundare, se obține din relația

$$f = \int_1^{\eta_f} n\,(\eta)\, d\eta, \tag{107}$$

unde $n\,(\eta)$ este presupus normat la unitate. Se obține astfel următoarea ecuație funcțională pentru η_f:

$$J\,(\rho\eta_f) = (1 - f)\, J\,(\rho), \tag{108}$$

$$J\,(\zeta) = \frac{(1 + \zeta^2) \text{ arg th } \zeta - \zeta}{\zeta^2}. \tag{109}$$

Ecuația (108) a fost rezolvată grafic pentru $f = 1/2$ și diferite valori ale lui ρ. Ținînd acum seama de relația dintre ρ și ψ (tabelată în [18]) precum și de (35), se poate arăta că pentru ψ cuprins între limitele

$$0{,}2 < \psi < 0{,}8 \tag{110}$$

există cu suficientă precizie relația

$$\text{tg } \frac{1}{2}\, \vartheta'_{1/2} \approx k' e^{-a'\psi} \approx k' e^{-\frac{a}{\sqrt{\nu}}}. \tag{111}$$

Folosind transformarea Lorentz pentru unghiuri, care în domeniul ultrarelativist se scrie

$$\text{tg } \vartheta_{1/2} \approx \vartheta_{1/2} = \frac{1}{\gamma_c} \text{ tg } \frac{1}{2}\, \vartheta'_{1/2}, \tag{112}$$

obținem în cele din urmă

$$\vartheta_{1/2} \approx 2^{1/2} k \nu e^{-\frac{a}{\sqrt{\nu}}} E_0^{-1/2}, \tag{113}$$

de unde rezultă numai decît relația (59), unde $k \sim \frac{1}{\sqrt{2}}$ și $a \sim 2$.

ANEXA F

Distribuția jerbelor după ν

Fie δ_l numărul de atomi de specia l cuprinși într-un cm³ de emulsie nucleară, A_l numărul lor de masă și

$$\sigma_l = \pi r_0^2 A_l^{2/3} \tag{114}$$

secțiunea lor «geometrică» de interacțiune. Se poate atunci calcula un număr de masă «mediu» pentru o emulsie dată, față de interacțiuni nucleare de mare energie pentru care $\sigma \approx \sigma_{geom}$:

$$\overline{A} = \frac{\sum_l A_l \delta_l \sigma_l}{\sum \delta_l \sigma_l} = \frac{\sum A_l^{5/3} \delta_l}{\sum A_l^{2/3} \delta_l}. \tag{115}$$

După cum s-a arătat în [1], într-un asemenea nucleu au loc în medie

$$\xi = \overline{A}^{1/3} \tag{116}$$

ciocniri.

Probabilitatea ca într-un nucleu să aibă loc nu ξ, ci ν ciocniri este dată de legea lui Poisson:

$$\mathcal{P}(\xi, \nu) = e^{-\xi} \frac{\xi^\nu}{\nu!}. \tag{117}$$

Cu ajutorul datelor din [41] s-a calculat $\overline{A}$ pentru emulsia Ilford G.5 (folosită de toți autorii ale căror rezultate au fost prelucrate pentru obținerea diagramei din fig. 2), obținîndu-se

$$\overline{A} \approx 70,$$

de unde

$$\xi = 4{,}1$$

În figura 3 este reprezentată odată cu histograma experimentală și curba Poisson

$$\mathcal{P}(4, \nu) = e^{-4} \frac{4^\nu}{\nu!}$$

normată la același număr de puncte reprezentative ca și histograma experimentală.

МНОЖЕСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАНИЕ МЕЗОНОВ ПРИ СТОЛКНОВЕНИИ С АТОМНЫМИ ЯДРАМИ ЧАСТИЦ С БОЛЬШОЙ ЭНЕРГИЕЙ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Исходя из теории Ферми об элементарном акте взаимодействия, автор рассматривает модель внутриядерного каскадного процесса, происходящего при взаимодействии с атомным ядром нуклеона или мезона, обладающего большой энергией ($> 10^9$ e V)

Модель основана на предположении, что время жизни возбужденной системы, образовавшейся при первом столкновении нуклеона с нуклеоном ядра, представляется сравнимой с временем прохождения через ядро, что ведет к вовлечению в систему числа $\nu > 1$ нуклеонов.

На основании этой модели вычисляется множественность как функция ν при данной начальной энергии, а также угловое распределение вторичных частиц.

Для энергии E_0 сталкивающейся частицы — в лабораторной системе — и ν увлеченных нуклеонов множественность меняется как $\nu^{1/2} E_0^{1/4}$, а медианный угол ливня — в той же системе — как $\nu_e^{-\frac{a}{\sqrt{\nu}}} E_0^{-1/2}$.

Сравнение вычисленных значений с экспериментальными данными, полученными при исследовании электронно-ядерных ливней, генерированных в атмосфере и в ядерных эмульсиях, показывает, что подобная модель согласуется с существующим экспериментальным материалом.

GÉNÉRATION MULTIPLE DE MÉSONS DANS LES COLLISIONS DES PARTICULES DE GRANDE ÉNERGIE AVEC DES NOYAUX ATOMIQUES

(RÉSUMÉ)

En partant de la théorie de Fermi sur l'acte élémentaire d'interaction, l'Auteur étudie un modèle pour le processus intranucléaire de cascade qui a lieu à l'interaction d'un nucléon ou d'un méson de grande énergie ($> 10^9$ eV) avec un noyau atomique.

Ce modèle repose sur l'hypothèse que la durée de vie du système excité, formé dans le noyau au premier choc nucléon-nucléon, doit être comparable à la durée de la traversée du noyau, ce qui mène à l'entraînement, dans le système, d'un nombre $\nu > 1$ de nucléons.

En partant de ce modèle on calcule la multiplicité comme fonction de ν pour une énergie primaire donnée, de même que la distribution angulaire des particules secondaires.

Pour une énergie E_0 de la particule incidente (dans le système du laboratoire) et ν nucléons entraînés, la multiplicité varie comme $\nu^{1/2} E_0^{1/4}$, et l'angle médian de la gerbe dans le système du laboratoire comme $\nu_e^{-\frac{a}{\sqrt{\nu}}} E_0^{-1/2}$.

La comparaison des valeurs calculées et des données expérimentales, obtenues à l'étude des gerbes électrono-nucléaires produites dans l'atmosphère et dans les émulsions nucléaires, montre qu'un pareil modèle est consistant avec le matériel expérimental existant.

BIBLIOGRAFIE

1. E. Friedländer, Bul. Ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţiunea de ştiinţe matematice şi fizice, t.V, nr. 1, ianuarie—februarie—martie 1953, p. 167.
2. W. Heitler a. L. Jánossy, Proc. Phys. Soc., 1949, t .62 A, p. 374.
3. H.W. Lewis, J.R. Oppenheimer a. S.A. Wouthuysen, Phys. Rev., 1948, t. 73, p. 127.
4. W. Heisenberg, Zs. f. Phys., 1949, t. 126, p. 569; 1952, t. 133, p. 65.
5. E. Fermi, Progress of Theoretical Physics, 1950, t. 5, p. 570.
6. E.L. Feinberg i D.S. Cernavski, DAN SSSR, 1951, t. 81, p. 795.
7. H. Messel, R. Potts a. C. McCusker, Phil. Mag., 1952, t. 43, p. 889.
8. J. J. Lord, J. Feinberg a. M. Schein, Phys. Rev., 1950, t .80, p. 970.
9. U. Camerini, P.H. Fowler, W.O. Lock a. H. Muirhead, Phil. Mag., 1950, t. 41, p. 413.
10. E. Pickup a. L. Voyvodic, Phys. Rev., 1951, t. 84, p. 1190.
11. B.I. Verhovski, I.A. Dobrotin, N.L. Levintov, G.I. Hodakov, DAN SSSR, 1952, t.77, p.1007.
12. L. Landau, Izv. AN SSSR, S. fiz., 1953, t. 17, p. 51.

13. F. Roesler a. C. Mc. Cusker, Nuovo Cim., 1953, t.10, p. 127.
14. G. Cortini, A. Manfredini, G. Segré, Nuovo Cim., 1951, t. 9, p. 659.
15. M. Kaplon a D. M. Ritson, Phys. Rev., 1952, t. 88, p. 386.
16. S. Azimov, N. Dobrotin, A. Liubimov i K. Rîjkova, Izv. AN SSSR, Seria fiz., 1953, t. 17, p. 80.
17. U. Haber-Schaim a. G. Yekutieli, Phil. Mag., 1952, t.43, p.997.
18. E. Fermi, Phys. Rev., 1951, t. 81, p. 683.
19. E. Pickup a. L. Voyvodic, Phys. Rev., 1951, t. 84, p. 1190.
20. E. Amaldi, C. D. Anderson, P. M. Blackett, W. B. Fretter, L. Leprince-Ringuet, B. Peters, C. F. Powell, G. D. Rochester, B. Rossi, R. W. Thompson, Nuovo Cim., 1954, t. 11, p.213.
21. S. N. Vernov A. N. Ciarahcian, DAN SSSR, 1953, t. 91, p. 487.
22. E. L. Feinberg, J. E. T. F., 1949, t. 19, p. 1098.
23. I. L. Rosenthal, DAN SSSR, 1951, t. 80, p. 731.
24. T. F. Hoang, J. Phys. at. Rad., 1954, t. 15, p. 337.
25. M. F. Kaplon a D. M. Ritson, Phys. Rev., 1952, t. 85, p. 900.
26. R. Daniel, J. Davies, J. Mulvey a. D. Perkins, Phil. Mag., 1952, t. 42, p.342 și 753.
27. L. Eidus, M. Adamovici, J. Ivanoskaia, V. Nikolaev i M. Tuliankina, J. E. T. F., 1952, t. 22, p.440.
28. I. L. Rosenthal, J. E. T. F., 1953, t. 23 p. 440.
29. G. Zaţepin, I. Rosenthal, L. Sarîceva, G. Hristiansen i L. Eidus, Izv, AN SSSR, S. fiz., 1950. t. 17, p. 39.
30. S. Biswas a. V. D. Hopper, Phys. Rev., 1952, t. 86, p.209.
31. L. S. Osborne, Phys. Rev., 1951, t. 81, p.239.
32. C C. Dilworth, S. J. Goldsack, T. F. Hoang, a. L. Scarsi, Nuovo, Cim., 1953, t. 10, p. 1261.
33. G. Bertolino, A. Debenedetti, G. Lovero, M. Vigone, Nuovo Cimento, 1953, t. 10, p. 991.
34. K. Gottstein, u. M. Teucher, Zeits. Naturforsch. 1953, t. 8 A, p. 120.
35. D. Lal, P. Yash, B. Peters a. M. Swami, Phys. Rev., 1952. t. 87, p. 545.
36. M. F. Kaplon, B. Peters, H. L. Reynolds, D. M. Ritson. Phys, Rev., 1952, t. 85, p. 295.
37. G. Marikian, DAN SSSR, 1952, t. 87, p. 191.
38. P. Hodgson a. D. Perkins, Nature, 1949, t. 163, p.439.
39. V. Veksler, DAN SSSR, 1952, t. 82, p. 865.
40. O. S. Narayan, Proc. Ind. Ac. Sci., 1953, t. 27, p. 120.
41. J. Crussard, C. R., 1950, t. 231, p. 141.
42. G. Watagin, Nuovo Cim. Suppl., 1949, t. 6, p. 538.
43. G. Bertolino, H. Cini, P. Colombino, G. Watagin, Nuovo Cim., 1952, t. 9, 407.
44. J. Zeldovici, DAN SSSR, 1952, t.86, p.505.
45. A. Beiser, Am. J. Phys., 1952, t. 20, nr. 3, p. 124—133.

NOTE

TUBURI REDRESOARE CU VAPORI DE MERCUR CA OSCILATORI *)

DE

ALEX. CIȘMAN, PETRE LAMOTH și AURELIA CHIȘU

S-au făcut numeroase încercări pentru a folosi arcul cu mercur, în vederea producerii oscilațiilor de frecvență înaltă sau joasă. Regularitatea descărcării, care nu este tulburată de prezența atmosferei sau produselor de dezintegrare ale electrozilor, părea să ofere de la început avantaje deosebite.

Rezultatele au fost însă, în genere, descurajatoare.

Un tub cu vapori de mercur cu două catode și o singură anodă de grafit oscilează într-adevăr, cînd între cele două catode se interpune un sistem self-capacitate, dar condițiile de oscilare cer un raport L/C prea mare, ceea ce corespunde unei intensități prea mici a curentului oscilant, iar funcționarea este departe de a se menține stabilă.

Se cunoaște de asemenea oscilatorul de tip *Vreeland*, întrebuințat pe vremuri pentru producerea frecvențelor joase, necesare încercărilor de linii telefonice. Aici arcul se produce între o anodă de grafit și o catodă de mercur. Între anodă și catodă se intercalează un circuit oscilant ale cărui bobine, cuplate magnetic cu arcul, produc alungirea sau scurtarea lui și pot întreține oscilația, prin variațiile de tensiune produse la bornele arcului. Însă nici acest sistem nu s-a arătat suficient de practic și de aceea nu s-a generalizat.

Primele rezultate practice au fost obținute cu un tub cu vapori de mercur, format dintr-o catodă și două anode metalice, situate simetric de o parte și de alta a tubului de descărcări. Un cîmp magnetic perpendicular pe planul anodelor poate să mute arcul de pe o anodă pe alta, iar dacă cîmpul magnetic este produs de bobinele unui circuit oscilant, situat între cele două anode, sistemul întreține oscilațiile.

Dispozitivul poate servi și pentru amplificarea oscilațiilor de frecvență audibilă sau pentru producerea oscilațiilor de relaxare [1], [2], [3] și [4].

Arcul se întreține singur în toate aceste sisteme.

Dată fiind utilitatea practică deosebită a oscilatorilor capabili să producă o putere oscilantă suficient de mare, *cu tensiuni anodice cît mai joase*, ne-am propus să cercetăm condițiile de oscilație la tuburile redresoare obișnuite, cu atmosferă de argon sau vapori de mercur și catodă incandescentă de tungsten.

Se știe că, în condiții normale de funcționare, tuburile cu trei sau chiar cu doi electrozi, care conțin resturi de gaz, cînd trec de la regimul sarcinii spațiale, la regimul de saturație, sînt capabile să producă oscilații, de lungime de undă cuprinsă între 500 și 5000 m. Din datele găsite în lucrările de specialitate rezultă însă că *aceste oscilații sînt considerate ca independente de circuitele oscilante exterioare și depind numai de condițiile de alimentare ale lămpii sau de presiunea gazului*.

---

*) Lucrare prezentată Institutului de fizică la data de 15 mai 1954.

Tot din datele culese din lucrările de specialitate rezultă că *forma lor nu este sinusoidală* şi cu atît mai puţin monocromatică, iar studiul problemei n-a fost dus prea departe, nici nu s-au căutat eventuale aplicaţii practice. Li se atribuie caracterul de oscilaţii de tip Barkhausen-Kurtz şi relaţia $\lambda^2 V = \text{const.}$ [5].

În cele ce urmează vom descrie fenomenele oscilatorii de alte specii, la două tipuri de tuburi redresoare cu două anode, cu tensiune joasă de alimentare anodică şi anume:

1) *Un tub redresor de tipul Ph. 451*, cu următoarele caracteristici:

Tensiune de încălzire	1,8 V
Curent de încălzire	2,8 A
Tensiune anodică maximă	2×16 V
Curent redresat	1,3 A

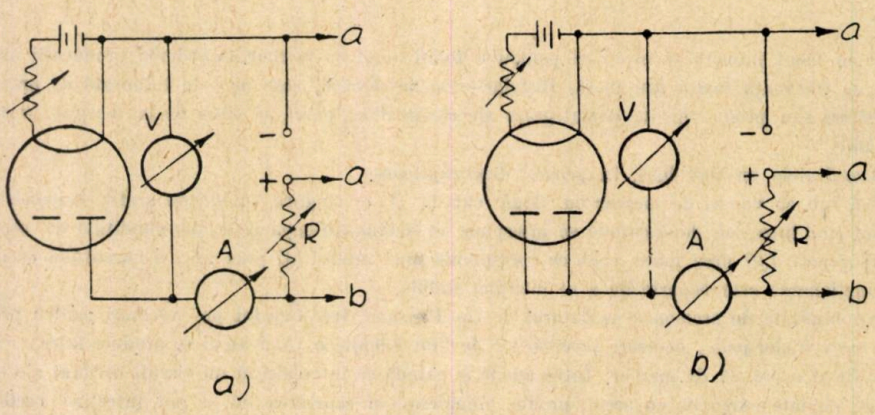


Fig. 1

2) *Un tub redresor de tipul Ph. 367*, cu următoarele caracteristici:

Tensiune de încălzire	1,8 V
Curent de încălzire	8 A
Tensiune anodică maximă	2×45 V
Curent redresat maximum	6 A

Primul tub este cu vapori de mercur şi argon, celălalt numai cu argon.

Pentru tubul Ph 451 am întrebuinţat mai întîi montajul schematic din figura 1 *a)*. Alimentarea anodică se făcea dintr-o baterie de acumulatori de 50 V, prin rezistenţa reglabilă R de valoarea maximă 400 Ω.

Punctele *a* şi *b* sînt legate la plăcile verticale ale unui oscilograf catodic.

În această variantă, una dintre plăcile anodice rămîne izolată. Experienţa ne-a arătat că fenomenele nu se schimbă dacă o legăm la potenţialul filamentului.

Curba din figura 2 ne arată variaţia curentului anodic, în funcţie de potenţialul anodic, la încălzire constantă de 2,8 A (trasă cu linie continuă).

În acest timp tubul oscilează şi atît forma oscilogramelor, cît şi frecvenţa oscilaţiilor depind de tensiunea anodică.

Pentru determinarea frecvenței ne-am servit de un undametru cu tub amplificator, cuplat capacitiv cu anoda.

Tot pe figura 2 am trasat punctat curba variației frecvenței, în funcție de tensiunea anodică. Regiunile notate cu *a*, *b*, *c* etc. se raportă la oscilogramele notate cu aceleași litere în figura 3.

Aceste oscilograme, prin forma lor tipică ne arată că este vorba de *oscilații de relaxare*, pe toată lungimea curbei, între *a* și *d*.

Ele sînt destul de stabile și deci foarte indicate ca *bază de timp*, mai ales cînd au forma în «*dinte de fierăstrău*».

Relația $\lambda^2 V_a = const.$ *nu este valabilă pentru ele. În regiunea f de pe curbă avem oscilații sinusoidale.*

Montajul din figura 4 ne-a permis să le modulăm în condiții bune. Am realizat astfel un mic post de radioemisiune pe lungimea de undă de 2 000 m.

Frecvența de bază a oscilațiilor este dictată de valoarea rezistenței R. Caracteristica $I_a = f(V_a)$, ne arată că *tubul are o rezistență negativă*.

O scădere accidentală, infinit de mică, dI a curentului anodic aduce o scădere corespunzătoare a căderii de potențial de-a lungul rezistenței R și potențialul anodic crește cu RdI.

Rezistența negativă a tubului intervine atunci și produce o nouă scădere a curentului anodic. Această acțiune continuă, tinde să diminueze mereu curentul anodic. Se tinde astfel către o situație nestabilă, urmată de fenomenul de relaxare.

În altă serie de experiențe am întrebuințat montajul din figura 1 *b)*. Curbele din figura 5 reprezintă mersul fenomenului. Aspectul oscilațiilor este aproximativ același ca în figura 3, dar nu am mai putut obține forma în «dinte de fierăstrău».

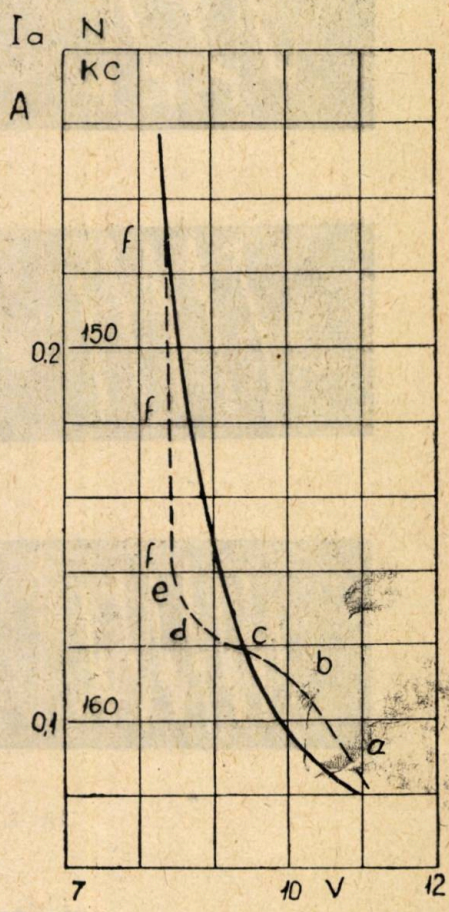
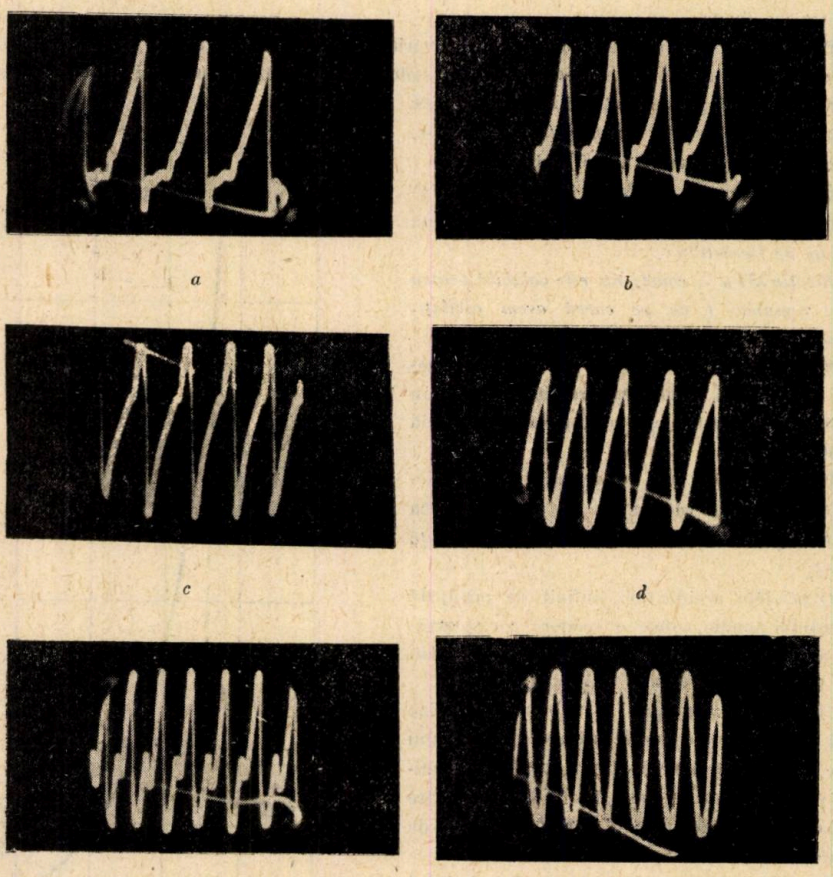


Fig. 2

Eventuale circuite oscilante, intercalate între electrozii tubului, nu permit schimbarea frecvenței ei proprii, nici în schema *a)* nici în schema *b)*, chiar dacă sînt cuplate magnetic cu tubul.

Cu tubul de tipul Ph. 367 se pot obține fenomene analoge. De această dată însă, cu schema de montaj din figura 6 *a)*, 6 *b)* sau 6 *c)*, se pot întreține oscilații sinusoidale în circuite oscilante, legate la bornele tubului. Frecvența acestor oscilații depinde de constantele L și C ale circuitelor. Cuplarea lor magnetică cu tubul nu are o influență notabilă. Domeniul de frecvențe realizabil, este cuprins între circa 100 și 4 000 de perioade/secundă, iar intensitatea eficace a curentului oscilant poate atinge, în unele cazuri 3 A.

În figurile 7 *a)* și *b)* sînt date două tipuri de oscilații de relaxare obținute cu acest tub. În fig. 7*b)* una din anode nu este conectată. Cînd raportul L/C al circuitului oscilant scade sub o anumită limită, oscilația apare sub o formă de trenuri amortizate sau de impulsuri, care se succed cu frecvența proprie de relaxare, dar frecvența de oscilație depinde tot de constantele L și C (fig. 7 *c)* și *d)*).



a *b*

c *d*

e *f*

Fig. 3, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*.

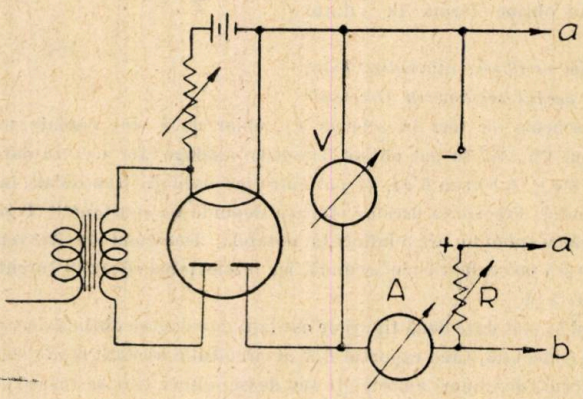


Fig. 4

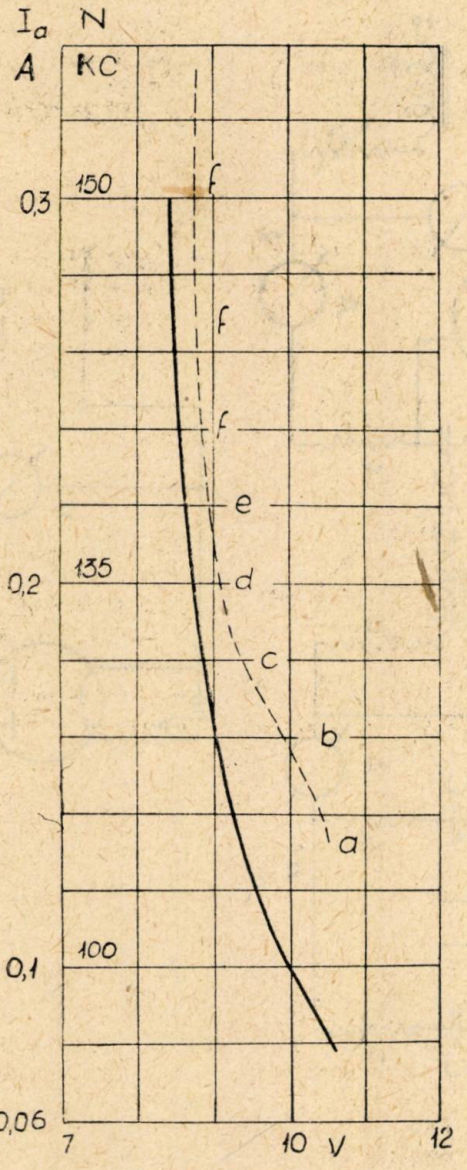


Fig. 5

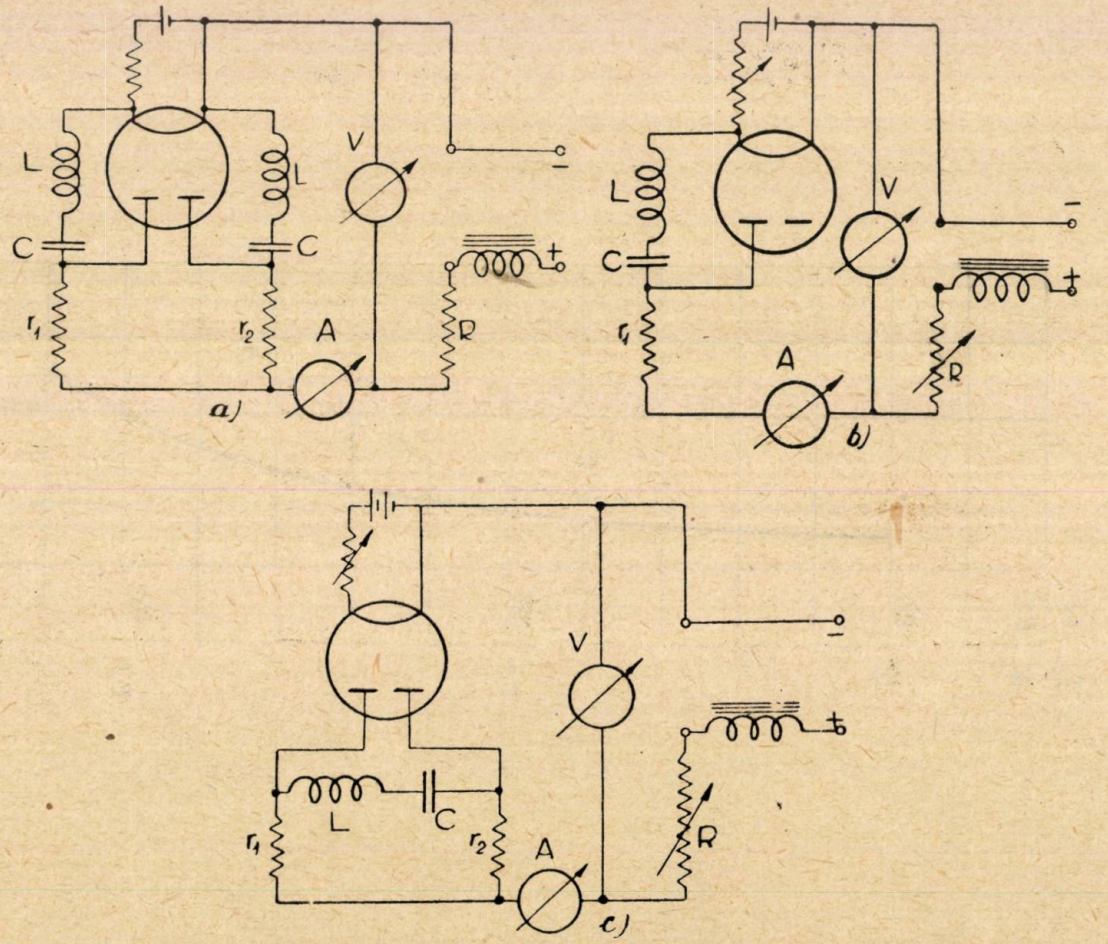
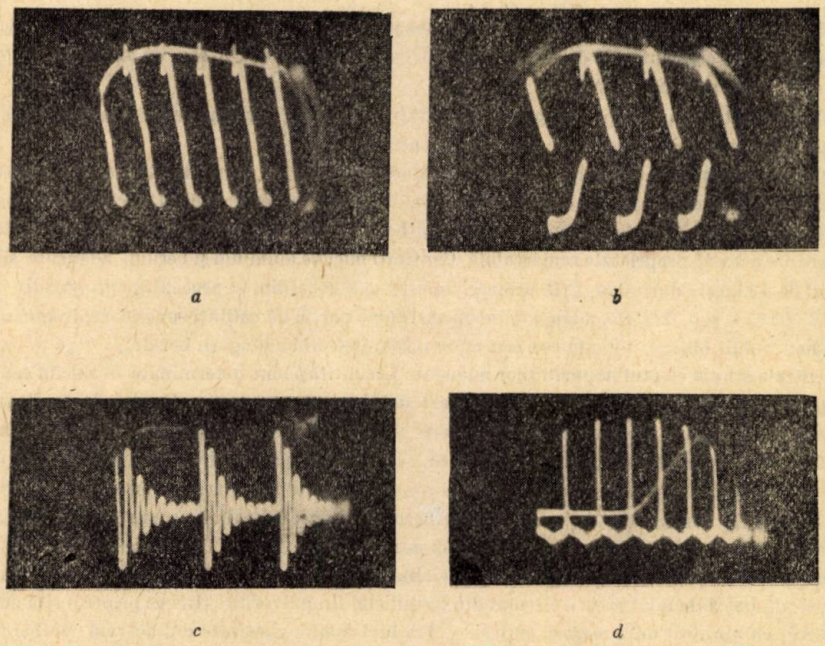


Fig. 6, *a*, *b*, *c*.

Oscilaţiile sinusoidale încep să se producă la potenţiale anodice de ordinul a 4V, cu un curent anodic de ordinul a 0,08—0,09 A.

Sistemul este deci deosebit de avantajos pentru producerea frecvenţelor audibile, necesare încercărilor de linii telefonice. De asemenea am reuşit să-l întrebuinţăm în condiţii bune pentru alimentarea punţilor de măsură în laborator.



a *b*

c *d*

Fig. 7, *a*, *b*, *c*, *d*.

Acest oscilator poate avea aplicaţii interesante în electronica industrială, fiindcă se pot obţine puteri oscilante destul de mari cu mijloace puţin costisitoare şi cu un randament de ordinul 40 . . . 50%.

Laboratorul de fizică al Institutului politehnic,
Timişoara

BIBLIOGRAFIE

1. Th. V. Ionescu, Ann. Sci. Univ. Jassy, 1926, vol. XIV, p. 280.
2. Alex. Cişman şi Th. V. Ionescu, Ann. d. Phys., 1934, vol. 5, nr. 20, p. 123.
3. Alex. Cişman şi E. Luca, Bul. Politehnic « Gh. Asachi », Iaşi, 1947, vol. 2, fasc. 2, p. 481.
4. — Bul. Politehnic « Gh. Asachi », Iaşi, 1947, vol. 2, fasc. 2, p. 562.
5. H. E. Hollmann, *Physik und Technik der ultrakurzen Wellen*. Berlin, 1936, vol. 1, p. 144.

PREPARAREA SILICIULUI PUR IN VEDEREA STUDIULUI ADAOSURILOR DE IMPURITĂȚI PENTRU SEMICONDUCTORII CU SILICIU *)

(NOTĂ PRELIMINARĂ)

DE

MARIA BĂDĂNOIU

Siliciul, situat în coloana a patra a sistemului periodic, prezintă proprietăți fizice specifice dacă este impurificat cu elemente din coloana a treia, de exemplu: B, Al, Ga, sau cu elemente din coloana a cincea, de exemplu: N, P, As, Sb.

Efectul acestor impurități, adăugate în cantități foarte mici, dar bine cunoscute, în siliciul perfect pur, reprezintă obiectul cercetărilor noastre în curs.

În cazul impurificării siliciului pentru a produce redresori de bună stabilitate, sînt indicați aluminiul și borul. Este suficient, pentru a produce conductivitatea dorită asupra siliciului, să i se adauge o cantitate extrem de mică (aproximativ 0,001 %) bor. Acesta este singurul dintre agenții de adiție citați, care are această proprietate remarcabilă. Cantități mici de aluminiu și beriliu, adăugate siliciului, au efectul de a-i crește duritatea. Prin urmare, amestecul bor-beriliu, în procentaj aproximativ în greutate, de 0,002% B și 0,02% Be, adăugate în siliciul foarte pur, îi dă calități superioare, conductivitatea semiconductorului obținut fiind în cea mai mare măsură efectul adăugării borului.

Pentru a studia efectul impurităților adăugate în cantități bine determinate în siliciul foarte pur (99,99% Si), am început cu lucrările preliminare de obținere a acestuia. Gradul de puritate dorit depinde în mare măsură de metoda de preparare adoptată și de condițiile de lucru. Materia primă utilizată de noi este ferosiliciul tehnic cu 75% Si, sau 92% Si, pe care industria metalurgică îl poate furniza în cantități suficiente, la preț foarte convenabil. Procentul mare de impurități, identificate pe cale chimică și confirmate de analiza polarografică și spectrografică asupra ferosiliciului, constă în cantități considerabile de fier și cantități mici de: Ni, Ca, C, Pb, B, Sn, Ba și urme de Na.

Pe baza indicațiilor date de lucrările de specialitate, și a sugestiilor colectivului de lucru, am aplicat întîi o metodă fizică de înlăturare a fierului din ferosiliciul fin pulverizat (trecut printr-o sită cu 16 000 ochiuri/cm^2) cu ajutorul unui magnet puternic. Am luat apoi o cantitate din această pulbere și am spălat-o în repetate rînduri cu soluții de acid clorhidric din ce în ce mai concentrat, adăugînd apoi acid azotic. Sedimentul depus este filtrat, spălat cu apă distilată și reluat în creuzet de platină cu un amestec de acid sulfuric și acid florhidric, și apoi numai cu acid florhidric 40 %, încălzindu-l pe flacără mică, pînă la fumegare. Prin această ultimă operație am urmărit eliminarea SiO_2 din pulbere sub formă de SiF_4; conținutul creuzetului este spălat bine cu apă bidistilată, filtrat și uscat.

Greutatea obținerii reactivilor corespunzători din punctul de vedere al purității, pentru înlăturarea procentului ridicat de impurități din ferosiliciul utilizat, ne-a determinat să adoptăm o a doua metodă, mai simplă, dar care necesită temperaturi ridicate. Aceasta constă esențial în clorurarea ferosiliciului și reducerea la 950°C a tetraclorurii de siliciu cu vapori de *zinc foarte pur*. Pentru prima fază a acestei operații, ne-am construit un cuptor tubular cu rezistență de crom-nichel, pe care l-am etalonat și reglat în secția electricitate. Utilizînd pentru clorurare același ferosiliciu despre care am vorbit mai sus, însă cu granulozitate mai mare (trecut printr-o sită numai cu 10 ochiuri/cm^2), l-am introdus într-un tub din ceramică cu $\varnothing = 2$ cm, pînă la 2/3 din volumul acestuia, care la rîndul său este introdus în cuptorul de reacție. Se face legătura cu tubul de clor lichid prin intermediul unui vas spălător cu acid sulfuric concentrat, pur, urmat de altul cu clorură de calciu anhidru. Cealaltă extremitate a tubului de reacție este montată la un sistem de răcire cu aer, apă și în cele din urmă cu gheață, colectînd tetraclorura de siliciu lichidă. Excesul de clor nereacționat se trimite la canal cu ajutorul unui curent de apă, după ce am asigurat condensarea tetraclorurii de siliciu. Etanșeitatea instalației am realizat-o

*) Lucrare prezentată Institutului de fizică la data de 18 aprilie 1954.

prin manşoane de asbest, fixate cu o pastă de silicat de sodiu şi grafit, iar la legăturile reci utilizăm colodiu.

Ferosiliciul începe să reacţioneze cu clorul la circa 300°C. Este important faptul că, pentru obţinerea $Si Cl_4$, este suficient să dăm căldură numai pînă la începerea reacţiei de clorurare a ferosiliciului, care este puternic exotermă şi determină ridicarea şi menţinerea temperaturii, pe seama căldurii de reacţie. Astfel, temperatura necesară în tubul de reacţie este menţinută prin iuţeala de alimentare cu clor. Pentru compensarea pierderilor de căldură, continuăm totuşi să încălzim cuptorul cu un curent slab, reglabil, intercalînd în montajul electric un autotransformator şi un reostat variabil.

Datorită intensităţii reacţiei, clorul poate fi introdus cu iuţeală mare (după pornirea reacţiei) fără pericolul pierderilor de clor nereacţionat. Mărimea iuţelii de trecere a clorului influenţează asupra randamentului în $Si Cl_4$, durata clorurării se micşorează şi temperatura de reacţie creşte considerabil. Fierul aflat în ferosiliciu se clorurează în cantităţi mici şi se depune pe pereţii tuburilor de sticlă şi pe refrigerent. Se mai formează ca produs secundar hexaclordisilanul ($Si_2 Cl_6$) în proporţie de circa 3 ... 10% din greutatea $Si Cl_4$, numai la temperaturi de clorurare sub 450°C.

Deasupra acestei limite nu se mai obţine Si_2Cl_6.

Temperatura de clorurare are o influenţă importantă asupra randamentului în $Si Cl_4$. Astfel, randamentul rămîne constant la 600 ... 700°C şi scade considerabil sub 450°C, cu formare de produşi secundari de reacţie ($Si_2 Cl_6$).

Noi lucrăm cu un randament cuprins între 90 şi 95 % din randamentul teoretic, raportat la materia primă utilizată, considerînd pusă la punct această fază principală în procesul de obţinere a siliciului pur, cu utilajul pe care l-am avut la dispoziţie în condiţiile primelor începuturi de organizare a Laboratorului de chimie. Am obţinut prin această metodă cantităţile suficiente de tetraclorură de siliciu, necesare pentru operaţiile ulterioare de obţinere a siliciului foarte pur.

Tetraclorura de siliciu obţinută o distilăm fracţionat cu ajutorul unei coloane Vigreux, conducînd distilarea foarte lent pînă la eliminarea completă a urmelor de clor şi a produselor secundare de clorurare ale siliciului. De multe ori, repetăm distilarea. Se obţine astfel un lichid incolor, cu greutatea moleculară = 169,90, cu p.f. = 57°C şi d = 1,48, care se descompune cu apa şi care se păstrează la rece, pe sodiu metalic, în sticle bine închise.

Pentru reducerea $Si Cl_4$, ne-am preparat zinc foarte pur, prin electroliza clorurei de zinc p. a. Reacţia de reducere a $Si Cl_4$ are loc la o temperatură cuprinsă între 950 ... 1000°C, fiind mai scăzută decît punctul de topire al siliciului, însă mai ridicată decît

$$p.f._{Zn} = 907°C,\ p.f._{Zn\ Cl_2} = 730°C \text{ şi } p.f._{Si\ Cl_4} = 57°C.$$

Deci clorura de zinc formată din reacţia de reducere, şi excesul de zinc sau $Si Cl_4$, distilă şi sînt condensate în colectorul din material ceramic, ataşat instalaţiei.

Siliciul rezultat se depune pe pereţii tubului de reacţie sub formă de cristale aciculare.

Cuptorul de reducere proiectat cuprinde două tuburi paralele, încălzite cu rezistenţă de Kantal. Tubul de reacţie din sticlă de cuarţ cu $\varnothing$ = 3 cm şi lungimea = 100 cm, are o extremitate introdusă în colectorul cu $\varnothing$ mult mai mare, prevăzut cu un vizor din mica, ce poate servi la nevoie drept gură de deblocare în cazul unei eventuale obturaţii a instalaţiei.

Paralel cu tubul de reacţie este introdus un tub din cuarţ cu $\varnothing$ = 1,5 cm pe toată lungimea cuptorului, servind la preîncălzirea $Si Cl_4$ care distilă pe sodiu metalic într-un balon încălzit pe baie de apă, fiind prevăzut cu un tub de siguranţă. În tubul de reacţie, odată cu $Si Cl_4$ preîncălzită, sînt introduşi vaporii de zinc tot prin tubul de cuarţ. Excesului de tetraclorură de siliciu nereacţionată, i se asigură condensarea printr-un sistem de răcire intensă, care duce la balonul de colectare. Eventuala presiune în instalaţie datorită obturării tubului de reacţie, este sezisată prin intermediul tubului de siguranţă de la balonul cu $Si Cl_4$. Zincul din clorura de zinc provenită din reacţie este recuperat pe cale electrolitică şi reintrodus în lucru. Cristalii aciculari de siliciu obţinuţi sînt spălaţi bine cu acid clorhidric şi apă bidistilată.

Pentru înlăturarea eventualelor urme de Si O_2, cristalii obținuți sînt trecuți în creuzet de platină cu acid sulfuric și acid fluorhidric, încălzind pînă la fumegare. Siliciul este reluat cu apă bidistilată, spălat, uscat și pe baza buletinului de analiză spectrografică poate trece la faza de adăugare a cantităților de impurități.

Este cunoscută importanța practică a studiilor și experimentărilor începute de noi, confirmată de lucrările și publicațiile apărute deja în U.R.S.S., unde colective mult mai mari se preocupă de rezolvarea acestei probleme.

BIBLIOGRAFIE

1. K. A. Andrianov, *Metode industriale de sintetizare a $SiCl_4$*. DAN SSSR, 1940, vol. 28, p. 66.
2. D. Lyon, C. Olson a. E. Lewis, *Preparation of Hyperpure Silicon*. J. Electrochem. Soc., 1949, nr.96.
3. K. A. Andrianov i O. L. Gribanova, *Kremnii organiceskie polimernîe produkti glia promîşlennosti*. Moscova, 1946.
4. Tibor Gabris, *Studies in Silicochemistry and Their Practical Applications*. Magyar Tech., 1946, vol.3, nr.12.
5. A. F. Beliaiev și V. N. Loghinov, *Detectorii și amplificatorii cu cristal*. Ed. energetică de stat, București, 1953.
6. Stanislas Tesznier, *Théories des semi-conducteurs électroniques et des complexes dérivés*. Bulletin de la Société française d'Elect., august 1949.
7. H. Torrey, *Crystal Rectifiers*. New York — London, 1948.
8. — L'onde électrique, 1953, nr. 310, ianuarie.

CALCULE PRIVIND O PROBLEMĂ DE DISTRIBUȚIE A TEMPERATURILOR LA RĂCIREA BLOCURILOR DE BETON *)

DE

J. WEINREB

Distribuția temperaturilor la răcirea blocurilor de beton este o problemă care interesează în practica turnării unor astfel de blocuri, cum ar fi de exemplu, la construirea marilor baraje. Un calcul analitic în această problemă a fost făcut de A. Avramescu în lucrarea *Contribuții la calculul răcirii blocurilor de beton* [1].

Una din problemele atacate în lucrarea menționată este aceea a cedării de căldură prin convecție de către un bloc dintr-un material oarecare către aerul înconjurător. Autorul a considerat un bloc paralelipipedic turnat pe o rocă sau alte blocuri, și supus răcirii. Căldura surselor uniform repartizate în volumul blocului studiat se elimină pe diferitele fețe exterioare prin conductibilitate față de rocă și prin convecție către aerul ambiant de temperatură variabilă sau constantă. Într-un proces adiabatic, temperatura internă are o variație în timp care se consideră dată din măsurătorile prealabile.

Autorul a mai constatat că la răcirea blocurilor de beton studiate, variația de temperatură a elementului de volum măsurată experimental se apropie mult, mai ales în faza inițială, de o curbă exponențială de forma

$$\vartheta_a = \theta_0 + \vartheta_0(1 - e^{-\alpha t}) \qquad (1$$

*) Lucrarea prezentată Institutului de fizică la data de 27 iulie 1954.

unde ϑ_0 este temperatură finală a blocului, $1/\alpha$ joacă rolul unei constante de timp a surselor de căldură, iar θ_0 este temperatura inițială a betonului la turnare.

Considerînd că semispațiul $x<0$ este ocupat de aer de temperatură θ și că schimbul de căldură cu aerul ambiant are loc prin convecție pe suprafața $x=0$ după legea lui Newton

$$\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \mu (\vartheta - \theta), \tag{2}$$

autorul lucrării menționate mai sus [1], utilizînd o metodă de calcul bazată pe aplicarea transformatei lui Laplace [2], a obținut următoarea relație privind distribuția temperaturilor în timp pe suprafața blocului studiat

$$U(0,\bar{\sigma}) = U_0 + (1 - e^{-\bar{\sigma}}) - \frac{U_0}{h^2}\left[1 - e^{-\bar{\sigma}} \operatorname{erfc}\left(h\sqrt{\bar{\sigma}}\right)\right] - \frac{1}{h^2}[1 - e^{-\bar{\sigma}} - I(h,\bar{\sigma})] \tag{3}$$

unde

$$U = \frac{1}{\vartheta_a}(\vartheta - \theta)$$

$$h = \frac{\mu}{\lambda}\sqrt{\frac{a}{\alpha}}$$

$$I(h,\bar{\sigma}) = e^{-\bar{\sigma}} \int_0^{\bar{\sigma}} e^{(1+h^2)\sigma} \operatorname{erfc}\left(h\sqrt{\bar{\sigma}}\right) d\sigma, \tag{4}$$

notațiile utilizate fiind următoarele

ϑ_0 — creșterea finală de temperatură a betonului în proces adiabatic;

θ — temperatura aerului ambiant;

μ — coeficientul de cedare a căldurii de către blocul de beton [kcal/m^2.h. grad];

λ — coeficientul de conductibilitate termică a blocului de beton [kcal/m.h. grad];

a — coeficientul de difuzibilitate termică a blocului de beton [m^2/h];

$1/\alpha$ — constanta de timp, dedusă din relația (1) [h];

$\bar{\sigma} = \alpha t$ — timpul numeric;

t — timpul [h].

De menționat faptul că în calcule s-a neglijat efectul perturbator al marginilor, considerîndu-se suprafața betonului ca nelimitată, deci relațiile obținute sînt valabile numai pentru zonele centrale ale suprafeței betonului. De asemenea, s-a neglijat rolul radiației, fapt justificat prin aceea că diferența de temperatură între blocul turnat și aerul ambiant este relativ mică, radiația avînd deci un rol redus (care se poate lua totuși în considerare prin alegerea convenabilă a coeficientului μ de cedare a căldurii).

Prima problemă care se pune este aceea a calculării integralei $I(h,\bar{\sigma})$. Se observă că derivînd relația (4) obținem:

$$\frac{\partial I}{\partial \bar{\sigma}} = -I + e^{h^2\bar{\sigma}} \operatorname{erfc}\left(h\sqrt{\bar{\sigma}}\right). \tag{5}$$

În această ecuație diferențială, considerînd h drept parametru, avem pentru $\bar{\sigma} = 0$, $I(h,0) = 0$ și $e^{h^2\bar{\sigma}} \operatorname{erfc}\left(h\sqrt{\bar{\sigma}}\right) = 1$, deci $\frac{\partial I}{\partial \bar{\sigma}} = 1$, ceea ce înseamnă că în origine curbele $I(h,\bar{\sigma})$ sînt tangente la bisectoare.

Toate aceste curbe admit cîte un maximum, unde

$$\frac{\partial I}{\partial \tilde{\sigma}} = 0 \text{ și } I_{max} = e^{h^2\tilde{\sigma}} \operatorname{erfc}(h\sqrt{\tilde{\sigma}}),$$

deci în punctele unde curbele $I(h,\tilde{\sigma})$ au maxime, ele intersectează curbele corespunzătoare $e^{h^2\tilde{\sigma}} \operatorname{erfc}(h\sqrt{\tilde{\sigma}})$.

O altă observație, care se poate face cu privire la forma curbelor $I(h,\tilde{\sigma})$, este următoarea:

$$\text{pentru } h = 0 \qquad I = 1 - e^{-\tilde{\sigma}}$$

$$\text{pentru } h = \infty \qquad I = 0,$$

deci curbele $I(h,\tilde{\sigma})$ se află între aceste valori cînd parametrul h variază. Curba $I = 1 - e^{-\tilde{\sigma}}$ constituie în același timp o înfășurătoare a curbelor $I = (h, \tilde{\sigma})$.

Pentru a calcula integrala $I(h, \tilde{\sigma})$ s-a ales metoda izoclinelor lui Czuber [3]. Metoda permite integrarea simplă a ecuațiilor de forma

$$y' = A(x)\, y + B(x). \tag{6}$$

Pentru astfel de ecuații Czuber a arătat că se pot duce curbele $Z(\xi, \eta)$ legate de curbele $y'(x, y)$ prin relațiile

$$\xi - x = \frac{1}{A(x)}\,; \quad \eta = \frac{-B(x)}{A(x)}, \tag{7}$$

astfel încît curbele integrale căutate se bucură de proprietatea că tangentele corespunzătoare fiecărui punct al curbelor integrale intersectează curbele $Z(\xi, \eta)$ în punctele de abscise și ordonate date de relațiile (7).

În cazul nostru, comparînd relațiile (5) și (6), se observă ușor că

$$A(x) = 1 \text{ și } B(x) = e^{h^2\tilde{\sigma}} \operatorname{erfc}(h\sqrt{\tilde{\sigma}})$$

și deci introducînd aceste valori în (7), obținem

$$\xi = x + 1\,; \quad \eta = B(x),$$

sau în cazul nostru

$$\xi = \tilde{\sigma} + 1\,; \quad \eta = e^{h^2\tilde{\sigma}} \operatorname{erfc}(h\sqrt{\tilde{\sigma}}). \tag{8}$$

Ținînd seama de acest rezultat precum și de observațiile făcute mai sus, rezultă că se poate calcula curba întregrală (4) în modul următor. Se trasează curbele $e^{h^2\tilde{\sigma}} \operatorname{erfc}(h\sqrt{\tilde{\sigma}})$ pentru diferiții parametri constanți h, variabil fiind parametrul $\tilde{\sigma}$. Se duc curbele corespunzătoare $Z(\xi, \eta)$ de aceleași ordonate, dar de abscise care au valorile $\tilde{\sigma} + 1$ și apoi din fiecare punct al curbelor $Z(\xi, \eta)$ astfel obținute se duc direcții care trebuie să fie tangente la curbele integrale $I(h,\tilde{\sigma})$ în punctele de abscisă $\tilde{\sigma}$. Ducerea acestor direcții și construirea grafică a curbelor integrale $I(h, \tilde{\sigma})$ este posibilă ținînd seama de faptul că în origine curbele $I(h, \tilde{\sigma})$ sînt tangente la bisectoare, ceea ce dă un prim punct al curbelor integrale.

O verificare a construcției grafice se poate obține observînd dacă curbele integrale intersectează curbele $e^{h^2\tilde{\sigma}} \operatorname{erfc}(h\sqrt{\tilde{\sigma}})$ corespunzătoare în punctele lor de maxim.

Făcînd un calcul aproximativ al valorilor pe care le-ar putea lua parametrii care intră în relațiile de mai sus, s-a găsit că valorile ce le-ar putea avea h ar fi cuprinse între 1,5 și 3. În consecință, s-au determinat curbele integrale pentru $h = 1{,}5\,;\ 2\,;\ 2{,}5\,;\ 3$ (tabloul nr. 1, fig.1 și 2).

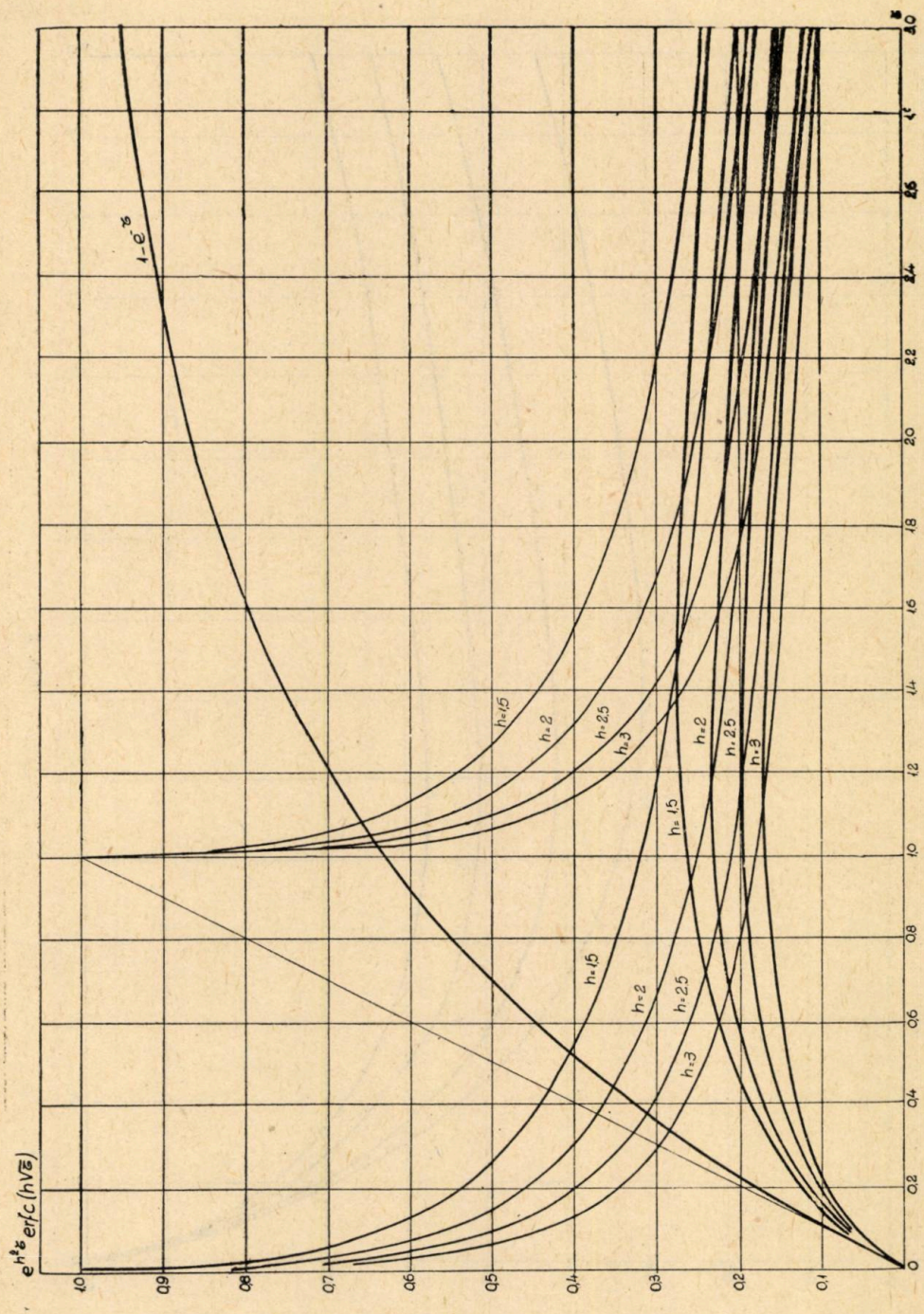

$e^{h^2\varepsilon}\,erfc\,(h\sqrt{\varepsilon})$
$1-e^{-\varepsilon}$
h=1.5
h=2
h=2.5
h=3
h=1.5
h=2
h=2.5
h=3
h=1.5
h=2
h=2.5
h=3
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
2.0
2.2
2.4
2.6
2.8
3.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0

Fig. 1

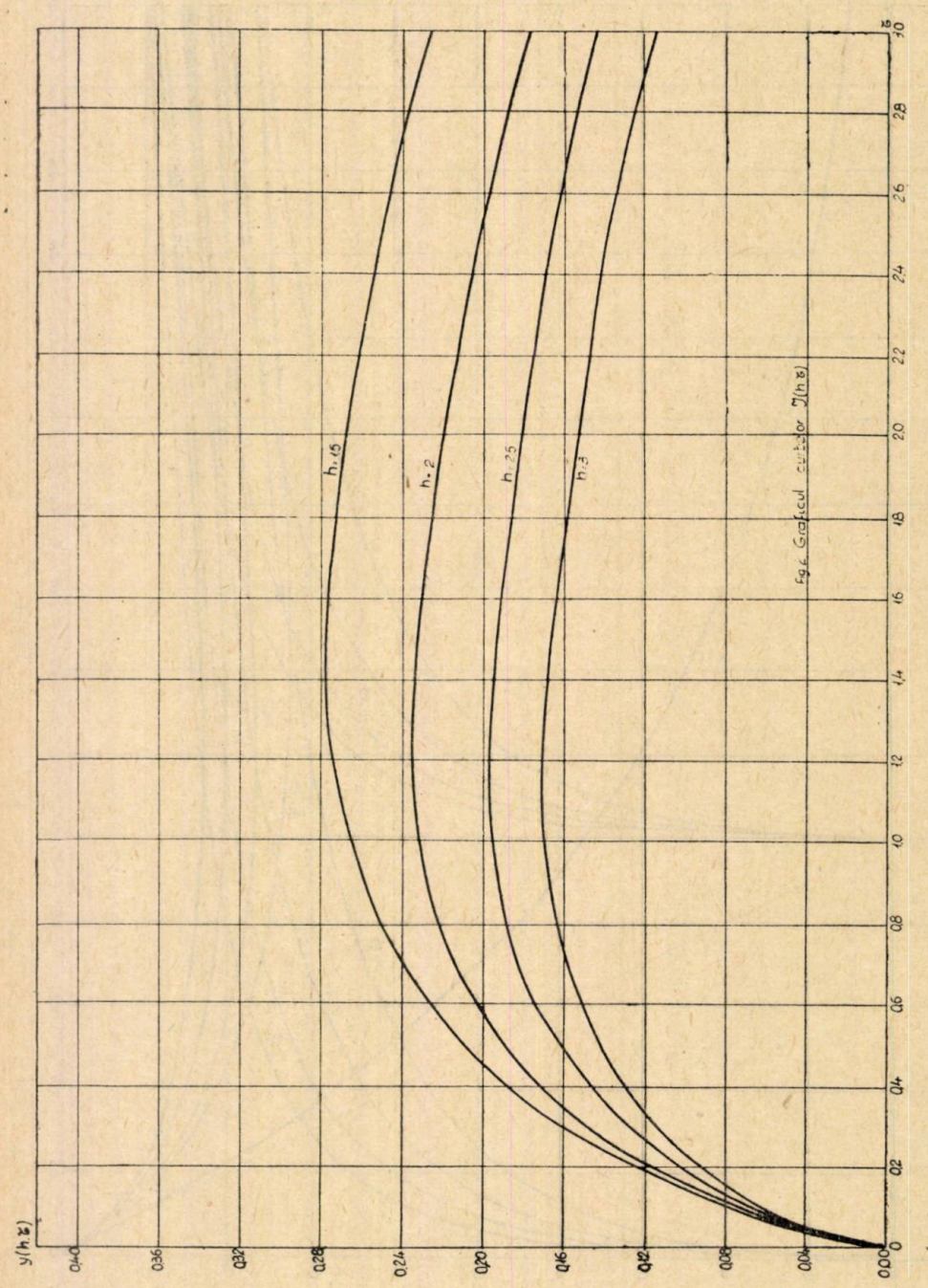


Fig. 2 Graficul coeficientului $\beta(h,s)$
h=1.5
h=2
h=2.5
h=3
s
0.000
0.004
0.008
0.012
0.016
0.020
0.024
0.028
0.032
0.036
0.040
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
2.0
2.2
2.4
2.6
2.8
3.0

Fig. 2

Tabloul nr. 1

τ	$e^{h^2\tau}\,\mathrm{erfc}\,(h\sqrt{\tau})$			
	$h=1,5$	$h=2$	$h=2,5$	$h=3$
0,005	0,890	0,859	0,829	0,801
0,01	850	804	771	734
0,02	801	747	702	657
0,03	763	705	654	606
0,04	734	671	616	568
0,05	714	646	587	538
0,06	688	610	564	512
0,07	677	600	542	491
0,08	658	584	523	471
0,09	642	568	509	456
0,10	631	555	493	442
0,13	595	517	456	407
0,15	576	500	436	388
0,18	554	472	412	364
0,20	538	460	398	350
0,23	517	439	383	330
0,25	507	428	368	313
0,28	493	412	356	308
0,30	482	404	344	300
0,35	460	383	326	282
0,40	442	363	309	267
0,45	428	350	293	254
0,50	412	337	283	243
0,55	399	325	272	233
0,60	387	314	262	226
0,65	379	309	254	217
0,70	367	296	246	210
0,75	358	288	239	204
0,80	350	280	232	199
0,85	342	273	226	193
0,90	335	267	211	188
0,95	328	261	218	184
1,00	322	255	206	179
1,1	311	245	200	173+
1,2	300	236	194	167+
1,3	291	228	188	162+
1,4	282	223	182	158+
1,5	273	215	176	154+
1,6	267	208	172+	150+
1,7	260	203	168+	146+
1,8	254	196	164+	142+
1,9	248	194	160+	138+
2,0	243	188	156+	135+
2,1	239	185	152+	132+
2,2	234	181	149+	128+
2,3	229	178+	146+	124+
2,4	224	174+	143+	121+
2,5	221	170+	140+	118+
2,6	217	167+	136+	114+
2,7	213	164+	132+	111+
2,8	210	160+	128+	108+
2,9	207	157+	125+	104+
3,0	204	154+	121+	100+

+ Aceste valori au fost obținute prin extrapolare grafică.

Odată determinate curbele $I(h, \bar{\vartheta})$ pentru diferite valori constante ale lui h, se poate trece la calculul lui $U(0, \bar{\vartheta})$ dat de relația (3). Această relație se poate scrie sub forma

$$U(0, \bar{\vartheta}) = U_0 - \frac{U_0}{h^2}\left[1 - e^{h^2\bar{\vartheta}} \operatorname{erfc}(h\sqrt{\bar{\vartheta}})\right] + 1 - e^{-\bar{\vartheta}} - \frac{1}{h^2}\left[1 - e^{-\bar{\vartheta}} - I(h, \bar{\vartheta})\right]$$

sau

$$U(0,\bar{\vartheta}) = U_0 P + Q \tag{9}$$

unde

$$P = 1 - \frac{1}{h^2}\left[1 - e^{h^2\bar{\vartheta}} \operatorname{erfc}(h\sqrt{\bar{\vartheta}})\right] \tag{10}$$

$$Q = 1 - e^{-\bar{\vartheta}} - \frac{1}{h^2}\left[1 - e^{-\bar{\vartheta}} - I(h\sqrt{\bar{\vartheta}})\right]. \tag{11}$$

Calculul lui P și Q se face ușor pe baza datelor din tabloul nr. 1 privind valorile lui $e^{h^2\bar{\vartheta}} \operatorname{erfc}(h\sqrt{\bar{\vartheta}})$ și din figura 2 privind valorile lui $I(h, \sqrt{\bar{\vartheta}})$, pentru diferite valori constante ale lui h. Calculul lui Q este ușurat și din faptul că termenul $1 - e^{-\bar{\vartheta}} - I(h, \bar{\vartheta})$ nu reprezintă altceva decît curba obținută luînd în abscisă valorile lui $\bar{\vartheta}$, iar în ordonată, diferența dintre valorile ordonatelor corespunzătoare ale curbelor $1 - e^{-\bar{\vartheta}}$ și $I(h, \bar{\vartheta})$. În tabloul nr. 2 sînt date valorile curbei $1 - e^{-\bar{\vartheta}}$, iar în figura 3 și tablourile nr. 3 și 4 sînt date valorile lui P și Q.

Tabloul nr. 2

$\bar{\vartheta}$	$1-e^{-\bar{\vartheta}}$	$\bar{\vartheta}$	$1-e^{-\bar{\vartheta}}$
0,10	0,09516	1,1	0,66713
0,15	13929	1,2	69881
0,20	18127	1,3	72747
0,25	22120	1,4	75340
0,30	25918	1,5	77687
0,35	29531	1,6	79810
0,40	32968	1,7	81732
0,45	36137	1,8	83470
0,50	39347	1,9	85043
0,55	42305	2,0	86466
0,60	45119	2,1	87554
0,65	47795	2,2	88910
0,70	50341	2,3	89974
0,75	52763	2,4	90928
0,80	55067	2,5	91792
0,85	57259	2,6	92573
0,90	59343	2,7	93279
0,95	61326	2,8	93919
1,00	63212	2,9	94488
		3,0	95021

Un exemplu de calcul. Se toarnă un bloc de beton, avînd suprafața în contact cu aerul de formă pătrată, proprietățile blocului fiind caracterizate prin următoarele valori:

— dimensiunea liniară a suprafeței: $d = 15$ m;
— temperatura inițială a betonului la turnare: $\theta_0 = 14°C$;
— creșterea finală a temperaturii în proces adiabatic: $\vartheta_0 = 31°C$;
— temperatura aerului ambiant: $\theta = 20°C$;
— coeficientul de conductibilitate termică a betonului: $\lambda = 0{,}9$ kcal/m.h.grad;
— greutatea specifică a betonului: $\gamma = 2100$ kg/m^3;

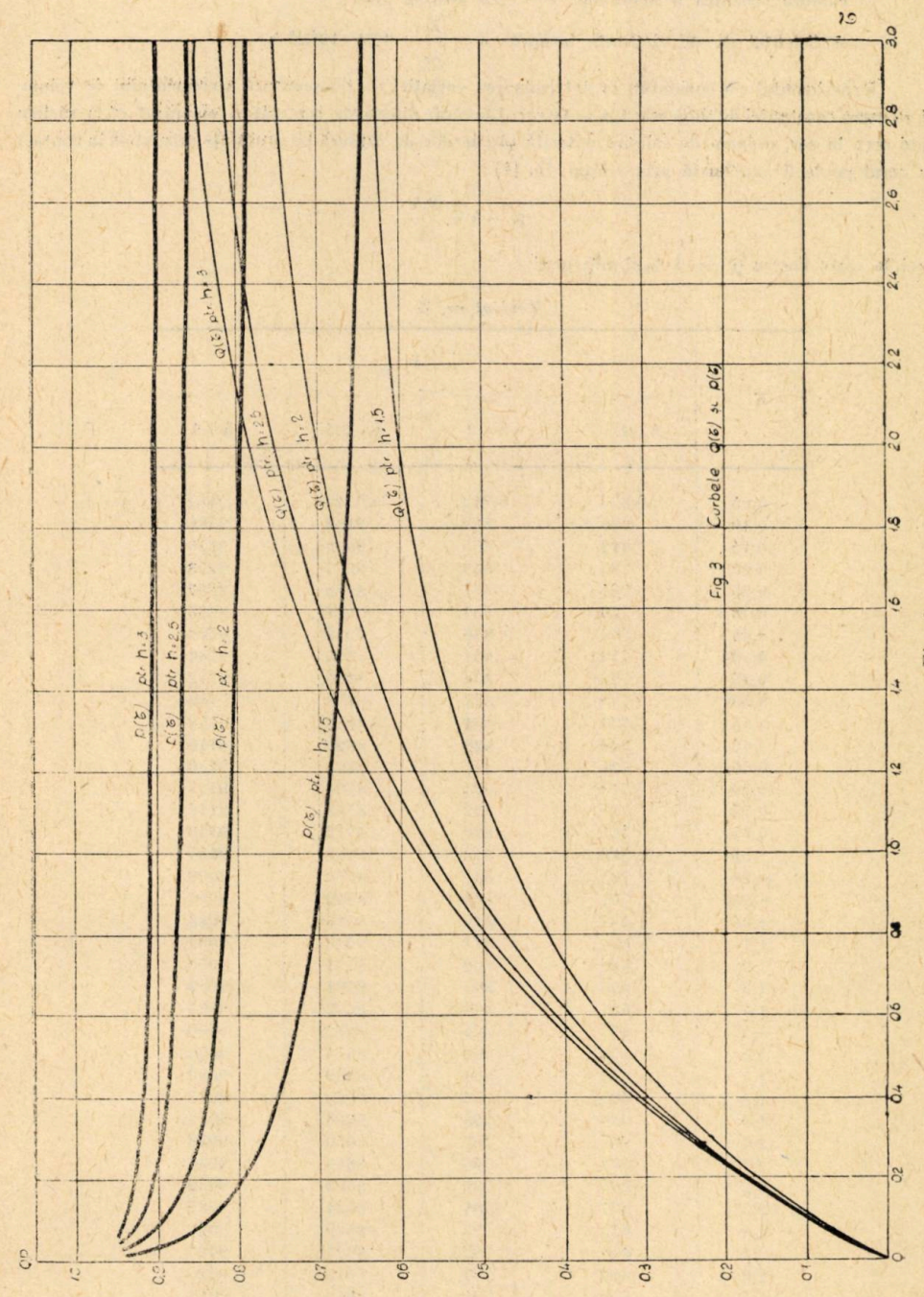


Fig 3 Curbele Q(ξ) și P(ξ)
Q(ξ) pt. h=3
Q(ξ) pt. h=2.5
Q(ξ) pt. h=2
Q(ξ) pt. h=1.5
P(ξ) pt. h=3
P(ξ) pt. h=2.5
P(ξ) pt. h=2
P(ξ) pt. h=1.5
ξ
Q,P

Fig. 3

— căldura specifică a betonului: $c = 0{,}25$ kcal/kg grad;

— coeficientul de difuzibilitate termică: $a = \frac{\lambda}{c\gamma} = 1{,}71 \cdot 10^3 m^2$ h.

Experimental s-a constatat, la determinarea variației de temperatură a elementului de volum, că valoarea constantei de timp este $1/\alpha = 60$ ore. Lucrările diferiților cercetători au arătat că la răcirea unui corp în aer, cedarea de căldură datorită pierderilor de căldură pe suprafața orizontală în contact cu aerul poate fi exprimată prin relația din [4] :

$$\mu = 4 + \frac{0{,}4}{d}$$

deci în cazul nostru $\mu \sim 4$ kcal/m²h·grad.

Tabloul nr. 3

$\bar{\sigma}$	P			
	$h=1{,}5$	$h=2$	$h=2{,}5$	$h=3$
0,05	0,873	0,912	0,9340	0,9487
0,10	836	889	9189	9386
0,15	812	875	9098	9320
0,20	795	869	9037	9278
0,25	781	857	8989	9237
0,30	770	851	8951	9223
0,35	760	846	8922	9209
0,40	752	841	8895	9186
0,45	746	838	8869	9172
0,50	739	834	8853	9159
0,55	733	831	8836	9148
0,60	728	828	8820	9140
0,65	724	827	8807	9130
0,70	718	824	8794	9123
0,75	715	822	8783	9116
0,80	711	820	8772	9110
0,85	708	818	8762	9104
0,90	705	817	8754	9098
0,95	701	815	8749	9094
1,00	699	814	8736	9088
1,1	694	811	8720	9082
1,2	689	809	8711	9075
1,3	685	807	8701	9069
1,4	681	806	8692	9065
1,5	677	804	8682	9060
1,6	674	802	8676	9056
1,7	671	801	8669	9052
1,8	669	799	8663	9047
1,9	666	798	8656	9043
2,0	664	797	8650	9039
2,1	662	796	8644	9036
2,2	660	795	8639	9032
2,3	657	794	8634	9027
2,4	655	793	8629	9024
2,5	654	7925	8624	9020
2,6	652	792	8618	9016
2,7	650	791	8612	9013
2,8	649	790	8605	9009
2,9	648	789	8600	9005
3,0	646	7885	8594	9000

Tabloul nr. 4

σ	Q			
	$h=1,5$	$h=2$	$h=2,50$	$h=3$
0,10	0,087	0,090	0,091	0,091
0,15	123	129	131	132
0,20	156	166	169	171
0,25	186	200	204	208
0,30	216	232	238	243
0,35	242	262	270	276
0,40	265	290	301	308
0,45	289	315	328	336
0,50	311	342	356	365
0,55	332	366	382	393
0,60	351	389	407	418
0,65	370	411	429	442
0,70	387	431	452	465
0,75	402	452	473	487
0,80	417	470	493	508
0,85	431	487	511	527
0,90	445	502	529	546
0,95	457	518	546	564
1,0	469	532	562	581
1,1	491	559	592	612
1,2	512	583	618	641
1,3	527	604	641	665
1,4	542	623	664	688
1,5	555	640	684	708
1,6	566	656	701	728
1,7	577	670	717	744
1,8	586	683	730	760
1,9	593	693	743	773
2,0	601	704	755	786
2,1	605	710	764	794
2,2	610	720	774	805
2,3	615	727	782	816
2,4	619	732	790	824
2,5	622	738	797	831
2,6	624	744	803	838
2,7	626	747	809	844
2,8	629	751	813	848
2,9	632	754	818	853
3,0	634	757	821	857

De aici reiese că în cazul studiat

$$h = \frac{\mu}{\lambda}\sqrt{\frac{a}{\alpha}} = \frac{4}{0,9}\sqrt{1,71 \cdot 10^{-3} \cdot 60} = 1,42,$$

o valoare apropiată de $h = 1,5$.

Din relaţia (9) rezultă

$$\frac{\vartheta - \theta}{\vartheta a} = \frac{\theta_0 - \theta}{\vartheta a} P + Q$$

sau introducînd valoarea lui ϑa dată de relaţia (1) se poate scrie

$$\frac{\vartheta - \theta}{\theta_0 + \vartheta_0 (1 - e^{-\sigma})} = \frac{\theta_0 - \theta}{\theta_0 + \vartheta_0 (1 - e^{-\sigma})} P + Q$$

adică, în cazul studiat

$$\frac{\vartheta - 20}{14 + 31\,(1 - e^{-\tilde{\sigma}})} = \frac{-6}{14 + 31\,(1 - e^{-\tilde{\sigma}})} P + Q.$$

Utilizînd tablourile nr.2, nr.3 şi nr.4 se poate calcula variaţia în timp a temperaturii pe suprafaţa blocului de beton. În tabloul nr. 5 sînt date cîteva valori calculate.

Tabloul nr. 5

t = ore	$\tilde{\sigma}$	P	Q	$1-e^{-\tilde{\sigma}}$	ϑ
6	0,10	0,836	0,087	0,095	16,45
12	0,20	0,795	0,156	0,181	18,29
18	0,30	0,770	0,216	0,259	20,56
24	0,40	0,752	0,265	0,330	21,90
30	0,50	0,739	0,311	0,393	23,62

În mod analog se obţin, pentru aceiaşi parametri, dar pentru alte valori ale temperaturii ambiante, valorile din tabloul nr. 6.

Tabloul nr. 6

t = ore	$\theta = 10°C$	$\theta = 14°C$
6	14,81	15,47
12	16,24	17,06
18	18,26	19,18
24	19,42	20,41
30	21,11	22,15

BIBLIOGRAFIE

1. A. Avramescu, *Contribuţii la calculul răcirii blocurilor de beton.* Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţiunea de ştiinţe matematice şi fizice, t. VI, nr. 2, aprilie-mai-iunie 1954, p. 407.
2. A. V. Licov, *Teoria teploprovodnosti.* Moscova, 1952, cap. XIV.
3. Fr. A. Willers, *Methoden der praktischen Analyse.* Berlin, 1928.
4. A. Avramescu, *Beiträge zur Erwärmungsberechnung elektrischer Leiter.* Bucureşti, 1944.

ROLUL SUPRAFEȚELOR ÎN SISTEMELE COLOIDE ȘI METODELE DE EVALUARE *)

DE

HÖRER OSWALD

I. Sistemele coloide, care prezintă interes atît în tehnică, cît și în științele fizice, chimice și biologice, reprezintă o stare de dimensiuni ale materiei, în care valoarea acestora capătă anumite mărimi ce le scot din cadrul sistemelor termodinamic eterogene sau omogene.

Deoarece știința coloizilor nu are încă o axiomatică și nici un punct unitar de vedere, există numeroase tendințe de a o abandona fie empirismului, fie unor tratări unilaterale. De aceea, definiția folosită în cea mai largă măsură era rezultată din experiență, însă nu cuprindea fenomenul în întreaga sa generalitate și nici nu reprezenta un criteriu riguros. Astfel se definea un sistem coloidal, ca o dispersie a unei faze, sau a mai multora, în altă fază, dimensiunile particulelor dispersate fiind de ordinul $10^{-5} \ldots 10^{-7}$ cm [1].

O analiză critică a obiectului și principiilor științei coloizilor a dat posibilitatea unei definiții mai largi a acestor noțiuni: incluzînd în ele atît soluțiile macromoleculare, cît și rolurile coloidale [2].

În dispersiile definite ca soluri coloidale, aria suprafețelor dintre faze devine foarte mare. Această arie mare ar determina și anumite proprietăți specifice coloizilor. Dar pentru a vedea în ce măsură acest punct de vedere este just, trebuie să definim ce înțelegem prin «suprafață» la sistemele considerate.

Suprafața se poate defini din mai multe puncte de vedere: geometric, fizic, termodinamic.

Noțiunea de suprafață geometrică este legată de produsul a două mărimi mai simple, lungimile, și poate fi considerată independent de orice volum.

În cazul suprafețelor fizice, pe lîngă idealizarea aspectului exterior al corpului, prin neglijarea asperităților ce nu sînt vizibile, trebuie să legăm suprafața și de volumul care o poartă.

La început termodinamica a folosit noțiunile acestea definind faza în funcție de ele [3]. J. W. Gibbs considera că între faze, interfața este identificabilă cu suprafața geometrică [4]. În aceste interfețe, proprietățile sistemului prezintă discontinuități. Acest aspect macroscopic s-a dovedit a fi incompatibil cu structura corpusculară a materiei, unde nu se poate admite o suprafață bidimensională, căci cel mai subțire strat de tranziție, cea mai subțire interfață, trebuia să aibă cel puțin grosimea unui diametru molecular.

Termodinamica statistică consideră domeniul de separație dintre două faze de grosimea mai multor diametre moleculare, la unele sisteme atingînd valori medii de 100 Å, iar în apropierea punctului critic pînă la 200 Å [4]. Alte calcule recente au arătat că se pot obține și valori mai mari decît cele indicate [5]. Strict termodinamic, suprafața devine geometrică numai la 0°K, cînd energia cinetică a particulelor este nulă și planul tangent învăluitor este suprafața de separație [6].

Mai mult decît atît, chiar în cadrul celor două dimensiuni, suprafața a căpătat un caracter statistic. O suprafață macroscopic omogenă nu mai este tot astfel la arii microscopice. Repartiția

*) Lucrare prezentată Institutului de fizică la data de 20 aprilie 1954.

atomilor este dirijată, obținîndu-se locuri preferate de aglomerare și altele mai puțin populate. Deci trebuie să ne ferim de a aplica acestor cazuri, relații de proporționalitate cu suprafața. Dacă macroscopic putem așadar delimita suprafețe geometrice între faze, microstructura permite numai exprimarea unei suprafețe active. În primul caz, aria va fi egală cu suma ariilor geometrice, iar în cel de al doilea caz, cu suma așa-numitelor pete active [7]. La microcristale s-a pus de mult timp în evidență neomogenitatea cîmpului de forțe pe diferite direcții cristalografice [8].

Studiind sistemele coloide, remarcăm valoarea mare ce poate atinge aria suprafețelor de separare dintre faza dispersă și dispersantă. W. Ostwald a definit de aceea «gradul de dispersie» raportul $\frac{S}{V}$, în care S reprezintă aria suprafeței de separație, iar V volumul fazei disperse. Căutînd un criteriu mai general, A. V. Dumanski numește acest raport «suprafața specifică» (de fapt «arie specifică»), gradul de dispersie fiind dat de dimensiunea particulei, considerată cu aceeași formă și aceeași mărime ca și celelalte din sistem.

Dacă notăm suprafața specifică cu S_0, atunci obținem relația

$$S_0 = k \frac{1}{a} \text{ cm}^{-1}.$$

Între a, care reprezintă latura, diametrul particulei și numărul de particule obținute din unitatea de volum, există un raport de inversă proporționalitate; k este o constantă ce depinde numai de forma geometrică a particulelor [1].

Formula aceasta se poate utiliza astfel numai pentru sferă și cub. Pentru alte forme geometrice intervine o rădăcină de ordinul 3 din produsul mărimilor care determină volumul.

Valoarea $\frac{1}{a}$ este numită «grad de dispersie» și se notează de obicei prin

$$\Delta = \frac{1}{a} \text{ cm}^{-1}.$$

Cum, de cele mai multe ori, la sistemele disperse, atît forma, cît și dimensiunile particulelor sînt variate, această relație prezintă dezavantajul de a nu fi generală. Cazul particular pe care îl exprimă este greu de realizat experimental și incomparabil mai puțin frecvent.

Pe de altă parte, între gradul de dispersie și suprafața specifică, în domeniul marilor grade de dispersie, nu se observă o proporționalitate strictă, datorită faptului deja semnalat că suprafața își pierde semnificația statistică.

Pentru a ne da seama către ce valoare tinde aria geometrică, putem folosi o relație generală, care pentru sisteme monodisperse și cu particule asemenea, capătă forma

$$S = S^\circ \sqrt[3]{n} \text{ cm}^2, \tag{1}$$

în care S° este aria suprafeței individului geometric, care prin dispersare în n particule, asemenea cu el și egale între ele, au generat noua arie. Exprimînd raportul $\frac{S}{S^\circ} = \sqrt[3]{n}$, obținem aria căpătată din unitatea de suprafață inițială. Dacă n este de ordinul 10^9, atunci din fiecare unitate de suprafață inițială, de exemplu 1 cm^2, se vor obține 10^3 cm^2, după cum reiese din formulă. Aria a crescut în mod considerabil, în timp ce mărimea particulei este de ordinul 10^{-3} cm, deci o suspensie microscopică.

La o dispersare de 10^{15} particule, aria va atinge valoarea de 10^5 cm^2, iar ordinul de mărime al particulelor va fi 10^{-5} cm și deci conform definiției date, la limita superioară a sistemelor coloide. Însă aplicarea relației ce am stabilit-o nu se poate extinde, din considerentele arătate mai sus, și asupra domeniului dispersiilor coloide, deoarece am căpăta discordanță între valoarea ariei geometrice și a celei active.

Această relație este un caz particular al unor formule generale ce au fost stabilite, valabile pentru soluri și alte sisteme polidisperse.

Astfel, dacă notăm prin F_i fracțiunea V_i din volumul total V°, cuprinzînd n_i particule egale, deci

$$F_i = \frac{V^\circ}{V_i},$$

căpătăm relația

$$S = S^\circ \sum_1^i \sqrt[3]{\frac{n_i}{F_i^2}} \tag{2}$$

Cînd vrem să exprimăm această relație, cunoscînd însă raportul dintre volumul total V° și al particulelor egale, v_i, în număr de n_i, adică

$$f_i = \frac{V^\circ}{V_i},$$

atunci

$$S = S^\circ \sum_1^i \frac{n_i}{\sqrt[3]{f_i^2}}. \tag{3}$$

În cazul cînd și forma particulelor este diferită, se pot introduce termeni ce depind de aceasta. Aceste relații dau posibilitatea să se exprime un grad de dispersie mediu $\bar{\Delta}$ și pune în evidență faptul că, dintre toate sistemele disperse cu același număr de particule, aria cea mai mare a suprafețelor de separare le vor avea cele monodisperse.

Limita de aplicabilitate a acestor relații este limita inferioară a suprafeței statistic omogene. Sub această valoare, relația dă numai limita superioară a ariei active, în cazul cînd particulele nu prezintă și suprafețe interne.

Coloidologul W. Ostwald a arătat că într-un sistem se disting proprietăți variabile și proprietăți invariabile cu dispersia. Acest criteriu just explică de ce multe proprietăți, ca presiunea osmotică și mișcarea browniană nu depind calitativ de gradul de dispersie, în timp ce proprietățile legate de suprafață sînt determinate de gradul de dispersie [9]. Proprietățile electrice ale sistemelor coloide sînt foarte puțin variabile cu gradul de dispersie, de aici și posibilitatea exploatată de unii autori, ca V. Pauli și E. Valkó, de a asimila micelele cu macroioni și deci să se studieze proprietățile electrice ale coloizilor cu metode electrochimice și chiar chimice.

Fenomenele de suprafață fiind variabile cu dispersia, le vom studia așadar legate, însă vom atrage atenția că în domeniul coloidal noțiunea de eterogenitate nu este definibilă ca la sistemele macroscopice. Vom folosi așadar denumirea de microeterogenitate pentru sistemele disperse [10].

II. Dacă punem în contact două substanțe practic nemiscibile, atunci între ele apare o suprafață de separare. Vom distinge două faze. La substanțe miscibile, fenomenul de difuzie va distruge suprafața de separare și vom obține o singură fază. La sistemele solid-solid, difuzia este extrem de lentă, practic nulă, dar la celelalte sisteme putem exprima în general ideea de mai sus în felul următor: două faze apar la contactul dintre două sisteme cînd în condițiile date fiecare din ele este saturat în raport cu componentul celuilalt.

Sistemele disperse sînt deci, prin definiție, sisteme suprasaturate.

Energia interfacială liberă, care apare la granița a două faze, este dată de relația simplă

$$A = S\sigma, \tag{4}$$

în care S este aria suprafeței de separare, iar σ tensiunea interfacială, adică energia liberă a unității de suprafață.

La sistemele disperse ne putem da seama de variația acestor mărimi după graficul din figura 1 [1]. Curba 1 reprezintă variația energiei superficiale cu gradul de dispersie Δ, curba 2 reprezintă variația tensiunii superficiale cu gradul de dispersie. Starea coloidă se găsește în domeniul de schimbare a valorii coeficientului unghiular, precum se poate vedea în figură. Pentru energia superficială, curba prezintă în acest domeniu un maximum.

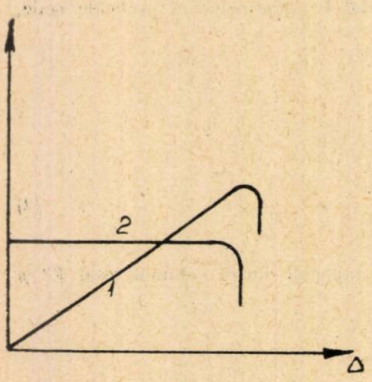


Fig. 1

Pentru a ne da seama de ordinul de mărime al acestei energii vom da un exemplu [11]. Dacă se consideră sistemul mercur/vapori de mercuri saturați, atunci pentru particula sferică cu raza 1 cm, corespunde aria inițială $S^\circ = 4\pi r^2 = 12{,}56$ cm^2, tensiunea superficială $\sigma = 471{,}6$ dyne/cm^2, ceea ce corespunde la $11{,}2 \times 10^{-6}$ cal/cm^2. Energia superficială liberă $A = 5900$ erg $= 1{,}4 \times 10^{-4}$ cal. După dispersare în $n = 10^{21}$ particule

$$S = S^\circ \sqrt[3]{n} = 10^7 S^\circ,$$

obținem

$$A = S^\circ \Sigma \sqrt[3]{n} = 5{,}9 \text{ K joule} = 1{,}4 \text{ K cal.}$$

O energie liberă de 1,4 K cal. este destul de însemnată, în special raportată la cea inițială.

Variația energiei superficiale (interfaciale) totale este dată de o relație analogă celei Gibbs-Helmholtz și anume

$$U = A - T\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}T}, \tag{5}$$

iar pentru unitatea de suprafață, cînd $A = \sigma$, obținem

$$U = \sigma - T\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}T}. \tag{6}$$

În aceste relații $T\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}T}$ reprezintă cantitatea de căldură necesară măririi izoterme a ariei superficiale cu 1 cm^2.

Conform principiului II al termodinamicii, energia liberă tinde să scadă efectuînd un lucru mecanic. Considerațiile acestea s-au făcut la sisteme fluid-fluid, dar cînd una din faze este solidă, se poate arăta că și în acest caz se aplică o relație analogă. Pentru poliedre cristaline, condiția de echilibru în soluția saturată este

$$\Sigma S\sigma = \min. \tag{7}$$

Savanții sovietici, în frunte cu B. V. Ilin [12], au contribuit la studiul echilibrului acestuia între faza solidă și gaze.

Precum am văzut mai sus, unul din cele mai importante efecte ale diviziunii materiei este creșterea ariei și energiei interfaciale. Vom arăta că și alte proprietăți sînt influențate sau determinate de gradul de dispersie.

Deci condiția echilibrului stabil în sistemele disperse este ca valoarea energiei superficiale (interfaciale) libere să fie minimă. Căile prin care sistemul tinde spre acest lucru sînt [11]:

a. *Scăderea ariei interfeței*, ce se produce prin creșterea particulelor, ca rezultat al aglomerării lor. Fenomenul se numește, după sistemul în care se produce, coagularea solului, dezemulsionare sau desfacerea spumei.

b. *Scăderea tensiunii interfaciale*, prin variația fie a temperaturii, fie a concentrației anumitor substanțe din sistem.

În cazul *a*, sistemul coloidal tinde să dispară, în timp ce în cazul *b*, este stabilizat.

Pentru lichide se dă relația simplă

$$\sigma_T = \sigma_0 (1 + \gamma T), \tag{8}$$

în care coeficientul de temperatură $\gamma = -\frac{d\sigma}{dT}$, deci scade cu temperatura.

La temperatura critică, tensiunea interfacială tinde printr-o variație bruscă către zero. De aceea starea critică este însoțită și de o dispersare coloidală cu fenomene corespunzătoare, ca: fluctuație, opalescență, viscozitate mărită etc.

Tensiunea interfacială σ_{AB}, la contactul dintre două lichide A și B, este dată de relația lui Antonov

$$\sigma_{AB} = \sigma_A - \sigma_B, \tag{9}$$

în care σ_A este tensiunea interfacială a soluției lichidului A saturat cu B și σ_B invers. În acest caz, la temperatura critică,

$$\sigma_{AB} = 0$$

iar din relația (9) rezultă

$$\sigma_A = \sigma_B.$$

La temperatura critică, în acest caz, va apărea o emulsie.

Scăderea tensiunii interfaciale poate avea loc și prin atragerea la suprafața particulei coloidale a atomilor, ionilor sau moleculelor din faza dispersantă. În acest caz se vorbește în sensul cel mai larg de adsorbție.

Se știe că substanțele tensioactive sînt acelea care efectuează scăderea tensiunii superficiale (interfaciale) și care totodată sînt deci factorii de stabilizare ai sistemelor coloide. De aceea vom urmări cîteva probleme legate de adsorbție.

Prin adsorbție, în general, înțelegem o concentrare a unui component din cele două faze, la interfața lor. Fenomenul are multe aspecte și se datorește mai multor feluri de forțe: electrostatice, Van der Waals și chimice. Relațiile, care încearcă să redea fenomenul, neglijează de obicei unele forțe mai slabe. De aceea se obișnuiește să se vorbească de adsorbția fizică și chemosorbție.

Indicăm mai jos cîteva relații izoterme, ale căror aplicații au importanță în starea coloidă.

Pe baza unor considerații cinetice, L a n g m u i r a dedus relația

$$\Gamma = \frac{A c}{1 + B c}, \tag{10}$$

în care Γ reprezintă cantitatea, în grame, de substanță adsorbită pe unitatea de suprafață, pentru concentrația de echilibru c, iar A și B fiind constante ce depind de ambele faze. Această izotermă se mai găsește scrisă și sub forma

$$\Gamma = \frac{\Gamma_\infty c}{c + \alpha}, \tag{11}$$

în care Γ_∞ reprezintă cantitatea adsorbită la saturație (cînd $c \to \infty$) iar α reprezintă o altă constantă, ce depinde tot de natura celor două faze. Relațiile se verifică numai la sistemele gaz-solid și numai a presiuni reduse. În anumite condiții de lucru le putem aplica și la alte sisteme. Pe de altă parte această relație a fost dedusă în mod riguros și prin termodinamica statistică [13].

În izoterma lui Gibbs se redă variația tensiunii superficiale cu concentrația substanțelor tensioactive

$$-\frac{d\sigma}{dc} = \frac{1}{c} RT\Gamma. \tag{12}$$

Prin integrarea acestei relații, înlocuindu-se Γ cu valoarea corespunzătoare din relația (10), se obține expresia cunoscută a lui Șișkovski [13].

$$\sigma_c = \sigma_0 - K \log (Bc + 1), \tag{13}$$

în care σ_0 reprezintă valoarea tensiunii superficiale la diluție infinită, adică c tinzînd către zero, iar constanta K reprezintă o mărime evaluabilă din variația tensiunii superficiale cu concentrația substanței tensioactive.

Deci, precum rezultă și din relație, creșterea concentrației anumitor substanțe poate scădea tensiunea interfacială la suprafața particulelor dispersate, prin adsorbția anumitor ioni, atomi sau molecule, avînd ca urmare stabilizarea sistemului. Substanțele tensioactive joacă un rol foarte important ca stabilizatori, emulgatori și spumanți în laboratoare și tehnică.

P. A. Rebinder și alți cercetători sovietici au adus o foarte mare contribuție la studiul tensiunii superficiale și al variației ei cu concentrația. P. A. Rebinder a numit expresia $-\frac{d\sigma}{dc}$ «activitate superficială». S-a mai dovedit rolul superficial activ al anumitor molecule ce nu erau studiate din acest punct de vedere [14].

Tot la fenomenele de adsorbție trecem și orientarea dipolilor solvenților polari, care duce la scăderea tensiunii interfaciale. Evident, în cazul chemosorbției, vom întîlni efecte analoge. Legate de adsorbție sînt și multe fenomene de cataliză eterogenă [15]. Vitezele de reacție pot fi astfel mult mărite în prezența unor catalizatori metalici dispersați coloidal.

Ca încheiere asupra fenomenelor de adsorbție, atragem atenția că izoterma lui Langmuir, care la arii macroscopice este valabilă atît pentru suprafața activă, cît și pentru suprafața geometrică, nu redă la arii microscopice decît suprafețele active. Acest lucru se explică tocmai prin prezența așa-numitelor pete active, a căror repartiție nu mai este omogenă pe microsuprafețe. Astfel la Ca F_2, adsorbția se face pe fețele 111 ale cristalului, după cum au dovedit Burgers și Dippel prin difracție electronică. Studii ulterioare au confirmat acest fapt și s-a observat că adsorbția se face de preferință pe anumite fețe al căror raport față de suprafața geometrică variază destul de neregulat, după condițiile de creștere a particulelor [16].

Ca rezultat al unor cercetări și explicări teoretice destul de recente, s-a ajuns la concluzia că însăși tensiunea superficială variază cu dimensiunea particulelor. Deoarece nu avem încă o teorie completă și nici nu par să fie variații considerabile ale tensiunii superficiale (interfaciale) cu raza de curbură, ne mulțumim doar să menționăm acest lucru [17], [5].

Variația solubilității ca și a fuzibilității cu gradul de dispersie, se explică tot prin intervenția energiei superficiale. Pentru variația solubilității și a presiunii de vapori, Thomson a stabilit o ecuație, în care intervin presiunile de dizolvare sau de vapori P_1 și P_2 corespunzătoare razelor r_1 și r_2 cînd densitatea mediului ce suferă această acțiune capilară este ρ:

$$\frac{RT}{M}\log\frac{P_1}{P_2}=\frac{2\sigma}{\rho}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right), \tag{14}$$

unde M reprezintă greutatea moleculară a substanței.

Relația ne explică de ce într-un sistem de picături cu raze diferite, picăturile mici, cu o presiune de dizolvare deci mai mare, vor dispărea, iar cele mari vor crește, prin așa-numitul proces de distilare izotermă.

Lucrările lui P. Pavlov [18], G. A. Hullit [19] și W. Ostwald [20] au arătat că această relație este valabilă și pentru sistemele solid-lichid, deci în cazul presiunii de dizolvare sau topire.

Știm de asemenea că între reacționabilitate și aria suprafețelor există o strînsă legătură, atît datorită mărimii acesteia cît și prin orientarea la suprafață sau concentrarea componenților. Deci și proprietățile chimice sînt determinate de mărimea și natura suprafețelor, ceea ce este foarte important pentru chimia coloizilor.

III. Așa cum am arătat la început, multe din proprietățile sistemelor coloide sînt funcție de de suprafață. Să trecem pe scurt în revistă pe cele mai importante.

Stabilitatea coloizilor depinde de valoarea energiei superficiale libere. Cu cît aceasta va fi mai scăzută, și sistemul va fi mai stabil. Am văzut rolul adsorbției în scăderea tensiunii superficiale și de activitatea superficială [14] putem deci lega stabilitatea. Tot adsorbției se datoresc sarcinile

electrice ale particulelor. Fie adsorbția ionilor, fie orientarea dipolilor în jurul micelelor, le dau acestora o anumită comportare electrică. De aceea, în teoriile asupra proprietăților electrice ale coloizilor, se explică potențialele ce apar la suprafața micelelor prin adsorbție și acțiunea agitației termice. Sarcina este unul din factorii importanți care asigură stabilitatea sistemului și în lipsa altor efecte de suprafață, pentru ca sistemul să fie stabil, trebuie ca repulsia electrostatică dintre particule să fie mai mare ca forțele de atracție de natură Van der Waals sau London. Sarcina intervine și în proprietățile mecanice prin așa-numita electroviscozitate.

Proprietățile mecanice ale spumelor și ale tuturor sistemelor coloide, la care o deformare mecanică duce la variația ariilor interfețelor, se datoresc în parte și variației energiei superficiale libere, care se opune acestor acțiuni exterioare, ceea ce se manifestă prin efectul de elasticitate sau tenacitate. La încetarea forței externe, sistemul va tinde să-și scadă energia liberă, revenind la starea anterioară a acțiunii dinafară.

La cataliză, suprafețele enorme realizate prin sisteme disperse, constituie în tehnică o problemă deosebit de importantă. Mulți catalizatori sînt introduși în sistem ca aerosoli, hidrosoli, emulsii sau aerogel.

Vedem, deci, că studiul suprafețelor este extrem de important în știința coloizilor. Fără o noțiune clară a aspectului lor în domeniul dispersiilor nu vom putea înțelege și explica o noțiune termodinamic statistică specifică, nici starea coloidă, nici stabilitatea ei, nici proprietățile ei și nu vom putea studia nici echilibrele chimice ce se stabilesc în astfel de sisteme.

Acest lucru ne cere să nu împingem prea departe considerațiile făcute asupra sistemelor eterogene și disperse la sistemele coloide, în care eterogenitatea este echivocă. În prezent se includ ca sisteme coloide și filmele și fibrele în care una sau două dimensiuni sînt de ordinul molecular.

Cum multe proprietăți depind de valoarea suprafețelor, determinarea ariilor în sisteme disperse este de mare utilitate. Odată această mărime evaluată, cu rezerva că reprezintă numai un aspect parțial, putem spera să evaluăm și celelalte mărimi ce depind de suprafață.

IV. Problema determinării ariilor interesează atît teoretic cît și practic pe coloidologi. Se vor indica cîteva metode generale, care nu cuprind însă nici pe departe toate posibilitățile actuale.

Putem grupa metodele de determinare a ariilor în două categorii, după cum rezultatele redau aria geometrică sau aria activă. Prima categorie de metode va fi legată de stabilirea mărimii particulei, de obicei considerată sferică, iar a doua de proprietățile active ale suprafețelor.

Începem cu metodele de determinare a ariei geometrice.

a. *Măsurare directă* cu ajutorul unui microscop pînă la dimensiunile de 0,1 m μ, cu electronomicroscop pînă la 50 Å [21].

b. *Metode bazate* pe frecare în mediu fluid la deplasarea particulei sub acțiunea unui cîmp de forțe [22] și anume:

1. Gravitațional, deci cu accelerația g din viteza de cădere, se evaluează raza r pentru particule sferice, ce se mișcă cu viteză uniformă în mediul cu viscozitatea η, cunoscînd densitățile fazei disperse ρ_c și dispersante ρ,

$$r = \sqrt{\frac{9\,\eta\,v}{2\,(\rho_c - \rho)\,g}}. \tag{15}$$

Precum reiese din relație, raza particulei este proporțională cu $\sqrt{v}$, unde v reprezintă viteza mișcării uniforme, celelalte mărimi fiind constante. Relația este valabilă numai în domeniul frecărilor newtoniene.

Se mai utilizează timpul de sedimentare, adică inversul vitezei, sau timpul în care particula se scufundă cu 1 cm. Forma particulelor fiind variată și sistemul polidispers, se utilizează metoda curbelor de sedimentare în funcție de timp. Se determină din sedimentele obținute în anumite intervale de timp, intervalul de mărime al particulelor depuse [21].

Relația folosită este atunci

$$r_1 = \sqrt{\frac{9\,\eta\,h}{2\,(\rho_c - \rho)\,g t_1}}, \tag{16}$$

în care h este înălțimea totală de cădere, iar t_1 timpul în care s-a depus fracțiunea cu particule mai mari ca r_1. Metoda este limitată de necesitatea unei diferențe mari de densități și de valoarea mică a accelerației gravitaționale, ce imprimă o viteză prea mică spre a fi suficient de precis evaluată într-un interval de timp comod. Limita metodei este 0,1 μ.

2. Centrifugal — intervenind accelerația centrifugă — ce poate atinge în ultracentrifuge valori de 10^5, chiar pînă la 10^6 ori aceea gravitațională, s-a coborît limita în domeniul coloidal [1] și [22]. Se folosește relația

$$r = \sqrt{\frac{9\,\pi \log \frac{x_2}{x_1}}{2\,(\rho_c - \rho)\,\omega^2 t}}, \tag{17}$$

în care x_2 și x_1 sînt spațiile final și inițial, ce au fost străbătute în intervalul t de timp, la o viteză unghiulară ω.

c. *Metodă bazată pe studiul luminii difuzate*, și anume a gradului de polarizare, permite, aplicînd relația lui Rayleigh adaptată de Mecklenburg, să se stabilească raza particulelor sub 47 m μ [1] și [23].

d. *Metoda spectrofotometrică*, propusă de T. Theorell, ne poate furniza — din studiul colorației solurilor în lumina albă — valoarea razei particulelor.

e. *Metodele ultramicroscopice* se bazează pe determinarea fie a numărului de particule vizibile ν în volumul focal ω din cîmpul ultramicroscopic, fie pe urmărirea mișcării browniene. În primul caz, cunoscînd densitatea ρ_c și concentrația c în grame a substanței dispersate, se poate ușor stabili relația,

$$r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\,\pi}\,\frac{\omega c}{\nu\,\rho_c}}. \tag{18}$$

În condițiile de valabilitate a relației de frecare Stokes, se poate calcula raza particulei pe baza mișcării browniene, din relația Smoluchowski-Einstein

$$r = \frac{RT}{N}\,\frac{1}{3\,\pi\,\eta}\cdot\frac{t}{\overline{\Delta}^2}, \tag{19}$$

în care R este constanta universală a gazelor, T temperatura absolută, N numărul lui Avogadro iar $\overline{\Delta}$ proiecția medie a deplasării browniene în intervalul de timp t [1].

f. *Metoda difracției cu ajutorul razelor X* permite determinarea diametrelor în două cazuri distincte [21]:

1. La monocristale, determinîndu-se lățimea liniei de difracție b (distanța dintre două puncte simetrice față de maximul intensității în care intensitatea este 1/2 din maximum) pentru lungimea de undă λ a razei x și θ unghiul Bragg, se obține valoarea diametrului

$$d = \frac{4\,\lambda}{3\,b\cos\theta}. \tag{20}$$

2. La particule policristaline individuale, din haloul ce însoțește particula, Guinier a stabilit relația

$$\theta = \frac{\lambda}{d}. \tag{21}$$

g. *Metoda permeabilității* se folosește la dispersii de fluid în solid, deci la aerogeluri și geluri obișnuite, dacă acestea nu prezintă neomogenități sub forma de punți aglomerate sau canale goale. Se utilizează relația după d'Arcy de scurgere a fluidelor prin nisip, în care intervine și variația viscozității. Relația este analogă celei date de Poisseuille la curgerea lichidelor prin capilare. În expresie intervin: porozitatea ε a mediului, căderea de presiune prin strat Δp, aria în secțiune a capilarelor A, coeficientul de viscozitate η, lungimea l a capilarelor, timpul t de scurgere și volumul V scurs în acest interval de timp. Atunci

$$S^2 = \frac{At}{\eta V} \frac{\chi A p}{K_0 l} \frac{\varepsilon^2}{(1-\varepsilon)^2}, \tag{22}$$

în care S reprezintă suprafața specifică, k_0 un factor constant de formă, iar $\varkappa$ un factor de orientare, tot constant.

h. *La aerogeluri*, Kutler a putut stabili valoarea suprafeței golurilor din măsurători de conductibilitate termică.

i. *Metoda variației dizolvării și vaporizării* a fost folosită încă din anul 1935 la determinarea de arii, deoarece gradul de dispersie influențează și la solide echilibrul de dizolvare, conform relației lui Thomson. Această idee a fost folosită de cercetătorii S. Rabinovici și Fortunatov la determinarea mărimii porilor din geluri.

j. *Metoda căldurii de umectare* a fost introdusă de Bartell și colaboratorii săi, folosind relația dedusă termodinamic,

$$A_S = \frac{-\Delta H_{SL}}{\frac{\sigma_S - \sigma_{SL}}{\sigma_L}\left(\sigma_L - T\frac{d\sigma_e}{dT}\right)}, \tag{23}$$

în care ΔH_{SL} este căldura de umectare a lichidului cu tensiunea superficială σ_L pe aria A_S, $\frac{\sigma_S - \sigma_{SL}}{\sigma_L}$ este dat de unghiul θ la contactul lichid-aer/lichid-solid, iar A_S este aria suprafeței umectate.

Ultimele trei metode se deosebesc de celelalte prin rezultatele lor. Mai putem adăuga că la grade foarte mari de dispersie, din determinări de greutate macromoleculară se pot deduce mărimile și deci ariile particulelor.

Urmează să arătăm și celălalt grup de metode ce evaluează aria suprafeței active și dau seama de structura superficială. Metodele des răspîndite sînt:

a. *Metodele de adsorbție* ce au la bază ipotezele că adsorbția se face monomolecular, deci cantitatea adsorbită este proporțională cu suprafața și că pentru anumite concentrații de echilibru se poate găsi pe o izotermă convenabil aleasă valoarea corespunzătoare a cantității adsorbite pe unitatea de suprafață. Există mai multe procedee:

1. Se determină cantitatea de substanță adsorbită prin separarea adsorbentului de adsorbit prin centrifugare și se introduce apoi în izoterma de adsorbție, de obicei Langmuir, valoarea concentrației de echilibru, se obține astfel cantitatea adsorbită pe unitatea de suprafață. Raportul dintre cantitatea totală și cea adsorbită pe unitatea de suprafață reprezintă aria căutată. De fapt se admite că aria ocupată la saturație de o moleculă pe suprafață poate fi definită. Abaterile care apar provin pe de o parte din faptul că pentru molecule complexe sau coloranți, suprafața moleculară nu este evaluabilă iar pe de altă parte datorită faptului că adsorbția nu este omogenă pe fețele cristaline diferite ale pulberilor.

Folosind adsorbția de gaze și vapori, s-au putut exprima numeroase relații. Astfel, B. V. Ilin [24] dă trei metode de evaluare a ariei cărbunelui, obținînd prin toate același rezultat.

2. Cu ajutorul coloranților, ce se bucură în general de o mare adsorbabilitate și suficientă solubilitate, s-a putut deduce și pune la punct procedeul indicat de F. Paneth și colaboratori,

colorimetrizînd sistemul. Molecula colorantului fiind considerată cubică, se poate stabili suprafața adsorbantului din intensitatea colorației. Metoda este foarte sensibilă la variații de *pH* și la prezența sărurilor și se folosește în genere numai în scopuri comparative.

3. Tot Paneth a elaborat metoda echilibrului de adsorbție cu izotopi radioactivi. Această metodă a cunoscut un deosebit avînt în Uniunea Sovietică, unde este folosită într-o mare măsură. Metoda este simplă, repartiția izotopului radioactiv în soluție și pe cristal fiind studiată cu ajutorul unui electroscop sau cu contor Geiger.

b. *Metoda variației proprietăților fizice* la adsorbția anumitor compuși organici, urmărită polarimetric, refractometric, spectrofotometric sau prin tensiunea superficială, ne dă — pentru substanțele adsorbite cunoscute și determinate — posibilitatea evaluării ariei active.

c. *Metoda electrolitică* are la bază faptul că la densități mici de curent, la catode în acid diluat, variația de potențial este liniară cu intensitatea curentului (Bowder și Rideal)

$$\Delta V - k\Delta G + \text{const.}, \tag{24}$$

în care ΔV reprezintă variația de potențial măsurată, ΔG creșterea cantității de H_2 depus pe cm^2, care este proporțional cu numărul de coulombi trecuți, iar k este o constantă ce depinde numai de suprafață.

Relația este prezentată mai corect sub forma

$$\Delta V = \frac{k}{x}\Delta G + \text{const.},$$

în care x reprezintă raportul dintre suprafața reală și cea aparentă (geometrică).

d. *Metoda întîrzierii volumelor* este ultima ce se va mai cita. Tiselius a folosit-o încă în anul 1942 pentru determinarea ariilor adsorbtive, urmărind prin schlierenmethode soluția ce trece abia după saturarea dopului adsorbat. Metoda a cunoscut ulterior numeroase îmbunătățiri.

Din cele prezentate, vedem că există numai posibilități relative de determinare a ariilor geometrice, deoarece facem o simplificare a formei, considerînd-o sferică, în timp ce aria activă poate fi evaluată în limitele valabilității izotermelor sau ale altor relații folosite. Evaluarea atît a ariei geometrice, cît și a celei active, ne permite să cunoaștem care este densitatea petelor active, lucru ce poate furniza prețioase date pentru studiul mecanismului catalizei eterogene.

În concluzie, arătînd pe scurt rolul suprafețelor în sistemele coloide, indicînd fenomenele ce depind de natura și mărimea suprafețelor și trecînd apoi la schițarea metodelor de măsurare a ariilor acestora, rămîne să stabilim că, oricît am încerca să tratăm problemele coloizilor cu ajutorul noțiunilor specifice sistemelor eterogene sau sistemelor omogene, nu am putea obține rezultate care să corespundă realității, datorită poziției intermediare a sistemelor coloide.

Deci, cu toate că nu putem vorbi de suprafețe între fazele ce constituie un sistem coloidal, putem folosi totuși cazurile limită la evaluarea aproximativă a mărimilor legate de suprafață. Înlocuind însă noțiunea de suprafață cu aceea de strat de tranziție, putem să ne dăm imediat seama că, în cazul dimensiunilor coloidale, particulele sînt constituite în întregime aproape din strat de tranziție și tocmai proprietățile acestui strat vor imprima sistemului dispers caracteristicile sale. În acest sens lărgit putem vorbi despre rolul important al suprafețelor în sistemele coloide.

BIBLIOGRAFIE

1. A. V. Dumanski, *Coloizii*. Ed. de stat, București, 1949.
2. A. G. Pasînski, P. S. Vasiliev i B. A. Dogodkin, Kol. J., 1953, t. XV, p. 466.
3. M. H. Karapetianț, *Termodinamica chimică*. Ed. tehnică, București, 1953.
4. E. A. Guggenheim, *Surface Chemistry*. Londra, 1949.
5. V. D. Ponomarev, G. S. Bergher, J. F. H., 1952, nr. 26, p. 413.
6. A. Eucken, *Lehrbuch der chemischen Physik*. Leipzig, 1950.

7. E. J. Verwey, Chem. Rev., 1935, t. XVI, p. 363.
8. S. M. Lipatov, *Fiziko-himia koloidov*. Goshimizdat, Moscova-Leningrad, 1948.
9. V. Ostwald, Koll. Ztschr., 1923, t. 23, p. 300.
10. N. P. Peskov, E. M. Alexandrova-Preis, *Kurs koloidnoi himii*. Goshimizdat, Moscova-Leningrad, 1948.
11. A. G. Kulman, *Fiziceskaia i koloidnaia himia*. Goshimizdat, Moscova-Leningrad, 1949.
12. B. V. Ilin, Zeitschr. ph. Chem., 1925, t. 116, p. 431.
13. — *Priroda adsorbționih sil*. Moscova-Leningrad, 1952.
14. I. N. Putilova, *Rukavodstvo k prakticeskim zaniatiam po koloidnoi himii*. Goshimizdat, Moscova-Leningrad, 1952.
15. S. Z. Roghinski, *Adsorbația i kataliz na neadnarodnih poverhnostiah*. Moscova, 1949.
16. P. A. Rebinder, Koll. Ztschr., 1927, vol. 41, p. 89.
17. V. Martînov, J. F. H., 1949, t. 23, p. 278.
18. P. Pavlov, Ztschr. ph. Chem., 1910, t. 74, p. 562.
19. G. A. Hullit, Koll. Ztschr. 1901, t. 37, p. 403.
20. W. Ostwald, Koll. Ztschr., 1900, t. 34, p. 503.
21. A. E. Alexander a. P. Johnson, *Colloid Science*. Oxford, 1949.
22. A. Kuhn, Koll. Beih., 1925, t. 37, p. 365.
23. K. S. Sifrin, *Raseianie sveta v mutnom sredie*. Moscova-Leningrad, 1951.
24. B. V. Ilin, Zeitr. ph. Chem., 1925, t. 116, p. 431.
25. A. Kuhn, *Wörterbuch der Kolloidchemie*. Leipzig, 1932.
26. H. Freundlich, *Kapillarchemie*. Leipzig, 1923.
27. A. V. Dumanski, I. A. Dumanski, *Bibliograficeskii ocerk razvitia otecestvennoi koloidnoi himii*. Kiev, 1952.
28. A. Kuhn, *Kolloidchemisches Taschenbuch*. Leipzig, 1935.
29. S. M. Savițkaia, Kol. J., 1951, t. 13, p. 309.

PILE ELECTRICE MODERNE *)

DE

MARIA BĂDĂNOIU

Generalități

În cursul secolului al XX-lea, sursele chimice de energie electrică au trecut într-o fază de dezvoltare rodnică, datorită numeroaselor și importantelor perfecționări aduse, atît din punctul de vedere al constituenților, cît și din punctul de vedere al construcției lor.

Obiectivele cercetărilor actuale ale inginerilor și tehnicienilor electrochimiști se îndreaptă asupra perfecționărilor ce pot fi aduse modelelor existente de elemente galvanice, în scopul reducerii la minimum a consumului de materiale, al înlocuirii materialelor puțin răspîndite, cum ar fi de exemplu zincul, al îmbunătățirii caracteristicilor electrice și a randamentului energetic, și al construcției de noi tipuri de elemente și baterii cu performanțe superioare celor cunoscute pînă în prezent.

Savanții și tehnicienii ruși și sovietici au contribuit în largă măsură la acest progres, aducînd soluții îndrăznețe problemelor noi puse de tehnică, și dezvoltaînd mai departe teoria elementelor galvanice.

---

*) Lucrare prezentată Institutului de fizică la data de 18 aprilie 1954.

Realizările experimetatorilor sovietici sînt pentru noi cel mai bun izvor de dezvoltare a acestui domeniu de cercetări.

În ceea ce privește perfecționările tehnice aduse fabricației elementelor și bateriilor tip Leclanché, trebuie să citățm realizările industriei sovietice, care au atins un înalt nivel de perfecționare tehnică. În U.R.S.S. s-a trecut în fabricație tipul universal de elemente care funcționează între limite largi de temperatură cuprinse între —50°C și +60°C.

În legătură cu forma cea mai avantajoasă a electrozilor de cărbune în aceiași pilă, cercetătorii sovietici N.S. Krivoluțkaia și G. G. Morozov, propun pentru aceștia forma de placă, deoarece au rezultate practice superioare față de forma rotundă a acestora; în cazul propus masa depolarizantă are o suprafață mai mare de contact cu cărbunele bun conducător de curent și funcționează astfel cu o densitate egală de curent pe toată grosimea lui.

Acțiunile locale, rezultate din atacul direct al electrolitului asupra zincului, au fost ameliorate prin utilizarea zincului cu un înalt grad de puritate, prin înlocuirea electroliților «tari» cu soluții de săruri (de exemplu NH_4Cl), prin amalgamarea zincului și adăugărea unei sări de mercur în electrolit. Un aliaj de zinc și mercur (96 părți zinc și 4 părți mercur) a dat cele mai bune rezultate pentru fabricarea anozilor de zinc.

În ceea ce privește îmbunătățirea coeficientului de utilizare al materialelor și în special al zincului industria sovietică a introdus construcția elementelor plate, tip galet, în care toată suprafața zincului este activă. Elementele plate, utilizate numai grupate în baterii, reprezintă cel mai nou tip de elemente uscate, avînd o capacitate de circa 2...2,5 ori mai mare decît bateriile de aceleași dimensiuni cu depolarizantul în formă de sac și electrodul de zinc în formă de pahar. Elementele plate (galet) se utilizează numai ca surse de curent de intensități mici.

Construcția acestora se bazează pe utilizarea electrozilor bipolari de zinc. Suprafața zincului pe care este aplicat stratul bun conducător de electricitate, impermeabil pentru ionii electrolitului, are rolul polului pozitiv realizat prin baghete de cărbune în elementele clasice Leclanché, iar fața liberă a zincului este polul negativ pe care îl îndeplinește acest metal în mod normal în elementele galvanice. Economia în consumul de zinc pentru bateriile tip galet este de circa 60 % față de consumul mare al acestuia în elementele tip Leclanché. Astfel se reduce considerabil consumul de materiale și deci prețul de cost. Procesul de fabricație devine mai simplu. Aceste baterii sînt utilizate în special ca baterii anodice pentru aparatele de radio, aparatele de laborator cu amplificatori electronici etc. Calitățile practice superioare ale modelului de baterii plate justifică pe deplin tendința de a se înlocui tipul vechi de baterii fabricate de industrie cu acestea, pe măsura rezolvării problemei plasticului electroizolant, care să nu permită scurgerea sau evaporarea electrolitului conținut de diafragma fiecărui element și să asigure o izolare perfectă a elementelor grupate împreună.

Realizările ing. Spiridonov și Puşkarev în domeniul perfecționărilor elementelor cu depolarizant aer, utilizînd oxigenul drept substanță activă, rezolvă una din problemele folosirii materialelor ieftine și foarte răspîndite pe suprafața pămîntului. Introducerea cu succes în fabricație a acestor elemente, precum și a elementelor cu depolarizare mixtă elaborate în U.R.S.S. de cercetătorul A. G. Razumnikov, reprezintă o etapă nouă în dezvoltarea industriei de elemente și baterii galvanice.

Cercetările actuale din Uniunea Sovietică, asupra transformării energiei de ardere a combustibililor direct în energie electrică, atacă una din problemele de bază ale energeticii. Pe baza ideilor formulate de T. M. Iablocikov, au fost experimentate și obținute în laborator, două tipuri de elemente cu combustie: elementul solid cu combustie, bazat pe arderea incompletă a carbonului, și elementul gazos cu combustie, realizat de O. K. Davtian, în care se face arderea oxidului de carbon la bioxid de carbon.

Rezultatele obținute de cercetătorii sovietici în acest domeniu marchează un pas gigantic al dezvoltării tehnicii, deschizînd orizonturi largi problemei transformării energiei de combustie a gazelor rezultate din gazeificarea subterană a cărbunilor, direct în energie electrică. În elementul cu combustie randamentul de transformare a energiei de combustie în energie electrică, pentru un kg de cărbune este de 3—4 ori mai mare decît în transformările obținute prin intermediul generatorilor de aburi. F.e.m.a.

elementelor cu combustie este 1,02 V la +25°C. Elementul solid cu combustie prezintă dezavantajul că necesită un combustibil lipsit de impurități care nu lasă cenușa prin ardere, fapt pentru care elementul modificat realizat de O. K. Davtian oferă perspective valoroase pentru dezvoltarea industriei de elemente și baterii galvanice.

Dintre elementele galvanice moderne, cu calități electrice foarte bune, își găsesc în ultimii ani o largă aplicare practică: pila cu clorură de argint și pila cu oxid de cupru, datorită curenților debitați mari și tensiuni de descărcare aproape constantă.

I. Pila cu clorură de argint

Realizarea unui model perfecționat al acestei pile a fost studiată de un colectiv condus de prof. Vasilescu Karpen în cadrul secției de electricitate a Institutului de fizică al Academiei R.P.R.

Lucrările de specialitate publicate anterior, dau puține date asupra acestei pile cu calități excepționale, datorită proprietăților electrochimice foarte bune ale clorurii de argint utilizată la catod. Din cîteva articole publicate recent, precum și din discuțiile ample care au avut loc în cadrul ședințelor de comunicări la I.F.A. a reieșit modul de funcționare și procesele fizico-chimice care au loc în interiorul acesteia.

Scopul cercetărilor noastre a fost de a realiza condițiile optime de construire și funcționare ale pilei cu clorură de argint, care poate să dea curenți de intensitate constantă mai mari în comparație cu pilele și acumulatorii utilizați în mod curent.

Temperatura de funcționare a acestei pile are limite largi, cuprinse între temperatura obișnuită și — 30°C.

Modelul de pilă cu clorură de argint, realizat de colectivul nostru este bazat pe lanțul electrochimic

$$- \text{Zn} \mid \text{NH}_4\text{Cl} \mid \text{AgCl (Ag)} +$$

și constă dintr-o placă, obținută din clorură de argint lipsită de impurități, topită, și prin turnare, eventual urmată de laminare, se realizează grosimea convenabilă. Aceasta este suspendată de corpul elementului, cu un fir de argint și constituie catodul, iar două plăci de zinc amalgamat servesc drept anod.

Electrolitul utilizat este o soluție de clorură de amoniu de circa 20—30 % cu un adaos de 0,2% clorură mercurică. Nivelul electrolitului trebuie să depășească nivelul electrozilor.

Perfecționările aduse de colectivul nostru în construcția acestei pile [1], față de modelul cunoscut, constau în:

1. *Suprimarea foiței de argint* care servește ca suport pentru clorura de argint, și înlocuirea acesteia cu un fir de argint. Această modificare reduce prețul de cost și simplifică o serie de probleme în ceea ce privește buna funcționare a pilei: necesitatea depunerii simetrice a straturilor de clorură de argint pe ambele fețe ale foiței de argint și așezarea electrodului la egală distanță între electrozii de zinc.

2. *Argintarea prealabilă a suprafeței clorurii de argint*, în scopul de a obține de la început funcționarea normală a pilei, eliminînd astfel timpul de amorsare. Argintarea catodului se face prin reducerea fețelor acestuia cu zinc pulverizat, umectat cu electrolit (prin simplă frecare).

3. *Laminarea clorurei de argint* topită pînă la grosimi convenabile. Utilizarea plăcilor de clorură de argint, de grosimi mici, are importanță pentru obținerea unei densități mari de curent fără polarizarea pilei și o scădere a rezistenței interioare a pilei.

La proiectarea construcției pilei cu clorură de argint pentru diferite utilizări, trebuie luată în considerație proporționalitatea între densitatea de curent debitat și grosimea catodului, pentru ca f.e.m. și curentul să rămînă constante în timpul descărcării.

Caracteristicile pilei. Un element poate fi format, de exemplu, din două plăci groase de aproximativ 2 mm, din clorură de argint, legate în paralel, constituind catodul. Clorura de argint chimic pură, a fost preparată de noi în laborator. Electrozii pot fi recuperați după epuizarea pilei, prin clorurarea

argintului rezultat, la o temperatură de 70...100°C, cu soluția n/1 de HCl. Anodul este format din trei plăci din tablă de zinc de 0,8 mm grosime legate în paralel.

Izolația în interiorul pilei trebuie bine asigurată încă de la început, pentru evitarea scurtcircuitării elementului. Electrolitul de compoziția arătată mai sus poate fi imobilizat cu amidon, prin metoda clasică utilizată la elementele Leclanché.

F.e.m. a elementului este 1,04 V și ajunge la sfîrșitul descărcării 0,9 V.

Pentru ca tensiunea utilă să nu scadă sub limita corespunzătoare (0,7—0,8 V), trebuie ca densitatea de curent debitat în timpul funcționării pilei să fie proporțională cu grosimea stratului de argint spongios ($d = 4{,}18$ g/cm^3) format la catod pe baza reacției

$$Ag\,Cl + e^- = Ag + Cl^-.$$

Prof. Vasilescu Karpen, după cum se arată și într-o lucrare [1] publicată anterior, a stabilit experimental că valoarea produsului id între densitatea i de curent și grosimea d a stratului de argint este $id = 0{,}015$, pentru a obține un bun randament energetic al pilei. Rezistența interioară este 0,05—0,06 Ω și descrește în timpul descărcării, datorită formării argintului metalic.

Capacitatea elementului este calculată în funcție de volumul clorurii de argint și corespunde valorii teoretice de 0,187 Ah pentru 1 g clorură de argint.

În cazul cînd pila trebuie să debiteze un curent de descărcare mare, menținînd aceeași capacitate și f.e.m., se mărește numărul electrozilor, reducînd în același timp grosimea plăcilor de clorură de argint. În felul acesta se reduce rezistența interioară a pilei, cauzată de grosimea catozilor. Este cunoscută rezistivitatea mare a clorurii de argint.

Pentru a evita autodescărcarea pilei, în afară de precauțiile menționate în ceea ce privește buna izolare a pilei, în cazul utilizării electrolitului lichid, am înfășurat catodul în prealabil cu hîrtie de filtru, suspendîndu-l la o mică distanță de la bază.

Clorura de argint prezintă avantajul solubilității foarte reduse, în comparație cu oxizi și peroxizi de argint utilizați în alte pile.

În ultimii zece ani, utilizarea pilelor cu clorură de argint își găsește aplicații tot mai vaste, de exemplu în aparatura medicală, electronică etc.

II. Elementul cu oxid de cupru («cupron»)

Actualmente, elementul cu oxid de cupru este considerat cel mai bun element cu electrolit lichid (alcalin), datorită tensiunilor perfect constante în timpul descărcării, rezistenței interne foarte mici și întreținerii relativ puțin pretențioasă pentru perioade lungi de funcționare. Electrodul pozitiv al acestui element poate fi regenerat în repetate rînduri. Elementele «cupron» sînt utilizate ca sursă de curent în special la căile ferate, pentru alimentarea dispozitivelor de semnalizare (semnale de atenție, semnale luminoase la macazuri etc.), focuri de alarmă și lumini ajutătoare navigației, înlocuind cu succes acumulatorii cu acizi. De la prima construcție a lui Lalande, la sfîrșitul secolului trecut, s-au publicat numeroase lucrări, care se ocupă cu perfecționările aduse acestui element și larga lor aplicare practică.

În prezent sînt cunoscute mai multe tipuri de elemente cu oxid de cupru, care vor fi descrise, și care diferă doar prin felul de a dispune componentele. Părțile componente ale acestei pile sînt următoarele:

Electrodul pozitiv, care conține ca depolarizant oxid de cupru (CuO) ce se poate obține prin diferite metode.

În secția de electricitate a Institutului de fizică în cadrul colectivului condus de ing. L. Fihman am obținut acest produs în felul următor:

1. Prin prăjirea în aer (oxidarea) șpanurilor de cupru provenite de la strung, cu formarea consecutivă la suprafața șpanurilor a oxidului ce era desfăcut prin ușoară lovire sau scuturare;

2. Tratarea cu carbonat de sodiu a soluției de sulfat sau azotat de cupru, filtrarea, spălarea și uscarea în etuvă a carbonatului bazic de cupru, urmată de calcinarea în capsulă direct pe flacără, a

produsului obținut. Această ultimă metodă a dat rezultate foarte bune și un bun randament de lucru. Se obține astfel o pulbere fină, neagră, de oxid cupric. Se prepară o pastă din: 16 părți oxid negru de cupru, o parte clorură de magneziu și o parte oxid de magneziu, sau, după alte indicații, numai cu oxid de cupru și una din soluțiile: KOH, NaOH, $CuSo_4$ sau $CuCl_2$. Această pastă se presează puternic pe un schelet de sită de cupru, formînd electrozi de aproximetiv 1 cm grosime și se calcinează. La exterior, electrozii sînt îngrădiți cu o sită sau un grătar de cupru.

În modelul elaborat n U.R.S.S. de inginerul K s e n o f o n t o v, partea depolarizantă a plăcilor pozitive este făcută din oxid de cupru, sticlă solubilă și zahăr. Pe suprafața exterioară a plăcii se depune un strat de cupru redus.

Alte modele utilizează un vas de fontă cu pereții interiori acoperiți pe cale galvanică cu un strat de cupru. În canalele făcute de-a lungul pereților, se presează pasta depolarizantă făcută din oxid de cupru, strujitură de cupru și apă. Prin încălzire la 100°C pasta se întărește. Acest model de element permite regenerarea depolarizantului prin simpla încălzire a vasului de fontă eliberat de electrolit, la circa 150°C, după epuizarea elementului.

Literatura tehnică mai descrie și alte metode de confecționare a electrodului pozitiv, de exemplu din Cu (OH_2) cu Mg (OH_2) și grafit. Uneori se încorporează în masa electrodului ulei, care la montarea pilei se ridică la suprafața electrolitului, avînd rol protector.

Rezistivitatea oxidului de cupru este de circa 2×10^6 Ω cm. În timpul funcționării pilei conductibilitatea electrodului pozitiv crește, datorită reducerii CuO la Cu metalic. Electrodul de CuO rămîne activ, oricît ar dura perioada de nefuncționare a pilei. Densitatea $CuO_{20}{}^{5}C = 6{,}4$ și devine după reducere $d = 8{,}89$. Este important de remarcat faptul că electrolitul poate pătrunde în toată masa electrodului pozitiv și datorită reacțiilor chimice din timpul funcționării elementului.

Coeficientul de utilizare al oxidului de cupru este 76%.

Electrodul negativ este turnat din zinc metalic cu un adaos de mercur, în formă de placă sau cilindru perforat. Coeficientul de utilizare al zincului este 94%, restul reprezentînd pierderile prin acțiunile locale, datorită electrolitului alcalin. La turnare, în cazul elementelor cu mai mulți electrozi negativi, plăcile extreme din zinc se fac cu grosimi diferite în trei zone de-a lungul muchiei inferioare, pentru a putea aprecia gradul de descărcare al elementului în timpul funcționării.

Cele trei zone ale plăcilor exterioare sînt dispuse astfel, încît cea mai mică grosime se perforează după un consum de 50% din capacitatea pilei, zona a doua după un consum de încă 25 % din capacitate și perforarea celei de a treia zone să indice că ne apropiem de sfîrșitul descărcării, elementul necesitînd regenerarea.

Pe restul plăcilor de zinc care au o grosime uniformă, consumul se face la fel pe toată suprafața.

Datele experimentale arată că consumul de zinc la debitarea a 500 Ah este de circa 1,229 g Zn/Ah.

Montarea elementului. Figura 1 arată modul de dispunere a electrozilor unei pile cu oxid de cupru pentru 500 Ah, elementul conținînd doi electrozi de oxid de cupru (c_1, c_2) și trei electrozi de zinc (a, b, c).

Izolarea electrozilor de semn contrar se face prin piese de porțelan sau ebonită, și totul se suspendă rigid prin borne de nichel pe capacul elementului care închide etanș vasul de sticlă.

În cazul cînd vasul este făcut din fontă, avînd depolarizantul montat în canale, pereții vasului servesc drept catod și capacul este etanșeizat printr-o garnitură de cauciuc, care-l izolează de restul elementului.

Pe capac se suspendă electrodul de zinc (fig. 2).

Se adaugă apoi electrolitul alcalin necesar și un strat de ulei mineral, dacă acesta nu a fost inclus în plăcile cu oxid de cupru.

Electrolitul utilizat la pila cu oxid de cupru este o soluție de hidroxid de sodiu, în loc de hidroxid de potasiu, întrucît oxidul de zinc care rezultă în timpul funcționării pilei este mai solubil în hidroxidul de sodiu. De exemplu, un element care are o capacitate de 500 Ah conține

circa 4400 cm^3 electrolit cu circa 24 % NaOH, avînd o densitate de 25°Bé la temperatura camerei. Apa întrebuințată trebuie să fie cît mai lipsită de săruri, dacă se poate apă distilată.

Experimental s-a stabilit concentrația de mai sus ca fiind cea mai potrivită obținerii unei capacități maxime la temperatura de 21°C și o concentrație de circa 35 % sodă caustică pentru temperaturi mai ridicate (49—50°C), pila avînd capacitatea evaluată la 582 Ah.

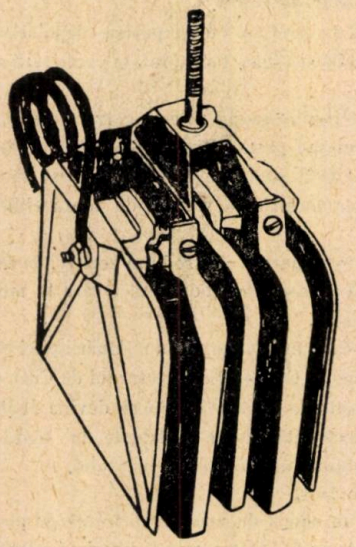


Fig. 1. — Dispunerea electrozilor unei pile cu oxid de cupru.

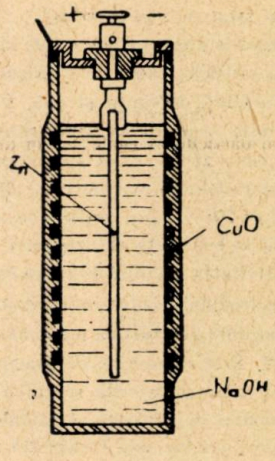


Fig. 2. — Elementul cu oxid de cupru în vas de fontă.

Are mare importanță poziția electrolizilor în electrolit. În poziția normală, electrozii trebuie plasați astfel, încît să fie complet acoperiți cu electrolit și acesta să poată circula liber printre ei. S-a constatat că la temperatura normală, capacitatea elementului este redusă pe măsură ce electrozii sînt mai coborîți în electrolit și cristalii de zincat încep să se formeze mai devreme dacă aceștia sînt prea jos.

V. G. Socevanov menționează că adăugarea unei cantități mici de tiosulfat de sodiu în electrolit precipită ionii de cupru din soluție, care cauzează creșterea autodescărcării, îmbunătățind astfel coeficientul de utilizare al zincului. Coeficientul de utilizare al electrolitului este 72 %.

Recipientul se face dintr-o sticlă rezistentă la încălzire, la soluții puternic alcaline și lispită de zgîrieturi sau defecte. Se fac o serie de încercări speciale, stabilite de serviciile care utilizează aceste pile, pentru alegerea calității sticlei. Trebuie să se țină seama la alegerea sticlei, de faptul că dizolvarea sodei se face exoterm; montarea sau remontarea elementului se face numai după răcirea completă a electrolitului afară, de cazul cînd descărcarea se face imediat.

Uleiul mineral se adaugă la suprafața electrolitului, pentru a evita evaporarea și carbonatarea acestuia în contact cu aerul. Uleiul se poate încorpora în electrodele de oxid de cupru, după cum s-a menționat, sau în soda caustică, punîndu-se în libertate din acestea la adăugarea apei. Dizolvarea sodei, în ultimul caz, se face mai puțin energic.

Elementul trebuie montat înaintea adăugării uleiului și în general trebuie evitat contactul electrozilor de zinc cu stratul de ulei.

Reacțiile chimice în pila cu oxid de cupru corespund ecuației generale.

$$Zn + 2\,NaOH + CuO = Zn\,(ONa)_2 + Cu + H_2O.$$

În tabloul nr. 1 se poate urmări mersul reacțiilor la anod și catod, în timpul descărcării elementului.

Tabloul nr. 1

Reacțiile la anod și catod în timpul descărcării elementului (după V i n a l)

	Reacțiile la anod	Electrolitul	Reacțiile la catod
Materiale inițiale	Zn	2 NaOH H_2O	Cu O Cu. $(OH)_2$
Procesul de ionizare		2 OH^- $2Na^+$	$2(OH)^-$ Cu^{++}
Procesul de producere a curentului	$-2e$ $++$ Zn Zn $(OH)_2$		$+2e$
Stadiul de descărcare	ZnO + H_2O		
Produsele finale	Na_2ZnO_2 + H_2O	$2H_2O$ — Cantitat. utilizată H_2O Rămîne H_2O	Cu

În general, la anod are loc oxidarea zincului și la catod reducerea oxidului de cupru la cupru metalic. În timpul descărcării elementului, au loc unele reacții intermediare. Astfel, se presupune după unii autori că la catod reducerea electrochimică a oxidului cupric (CuO) se face în două etape prin intermediul formării oxidului cupros (Cu_2O) și anume:

$$2\ CuO + 2\ e \rightarrow Cu_2O \quad (I)$$

$$Cu_2O + 2\ e \rightarrow 2\ Cu \quad (II).$$

Oxidul cupric poate de asemenea să reacționeze chimic cu cuprul metalic, formînd un oxid intermediar:

$$CuO + Cu \rightarrow Cu_2O.$$

Actualmente, presupunerea formării oxidului cupros are o semnificație nepractică în funcționarea normală a elementului. Produsele obținute din reacția electrodului de zinc la descărcare, sînt

dependente de concentrația electrolitului. Dacă concentrația remanentă a electrolitului este suficient de înaltă și temperatura joasă, se formează cristali aciculari de zincat de sodiu.

La o concentrație mică a sodei caustice, se formează cristali mai mici și mai îngrămădiți de oxid de zinc hidratat, aderenți pe pereții recipientului și pe electrozi. În general, acești cristali se observă în pilele epuizate.

Se mai separă din electrolit o a treia formă, aparent amorfă (rezultînd o soluție lăptoasă), care conține cristali foarte fini de oxid de zinc.

Factorii care condiționează curentul maxim al acestor pile sînt determinați de suprafața de zinc expusă și de distanța între electrozi. Capacitatea specifică a pilei este limitată de concentrația electrolitului, de volumul acestuia și de numărul plăcilor. Rezistența interioară la punerea în funcțiune a

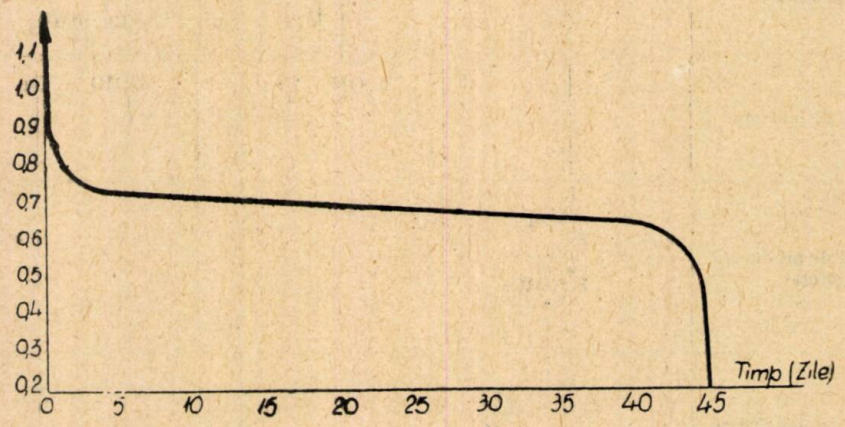


Fig. 3. — Curba descărcării elementului cu oxid de cupru.

pilei cu oxid de cupru trebuie să fie mică, realizînd aceasta prin stratul superficial de cupru redus, la catod ($R_i = 0{,}03 \ldots 0{,}05\Omega$).

F.e.m. scade brusc de la 1,1—1,2 V la 0,8—0,9 V rămînînd constantă în timpul descărcării. Valoarea ridicată a voltajului la punerea în funcțiune a pilei, este atribuită oxigenului absorbit pe oxidul de cupru, sau dizolvat inițial în electrolit.

După cum se vede din figura 3, tensiunea la borne este aproape constantă între 0,7—0,6 V pînă ce elementul cedează 90...95 % din capacitatea sa. Capacitatea elementelor cu oxid de cupru poate atinge valori de la 75...1000 Ah., în funcție de mărimea acestora, debitînd curenți pînă la 10 A.

Redăm tabloul nr. 2 cu caracteristicile elementelor cu oxid de cupru construit de ing. Ksenofontov (U.R.S.S.), publicate de Socevanov [2].

Dezavantajul elementelor descrise constă în scăderea capacității la scăderea concentrației electrolitului și la scăderea temperaturii.

Totuși aceste pile sînt utilizate în S.U.A., la temperaturi scăzute pînă la —23°C, datorită temperaturii scăzute de solidificare a electrolitului.

Marele avantaj al elementelor cu oxid de cupru constă în ușurința de regenerare a depolarizantului prin simplă încălzire, posibilitatea de repetare continuă a acestei operații și coeficientul bun de utilizare, al materialelor.

În timpul inactivității elementului, fenomenul de autodescărcare nu are loc, dacă electrolitul este pur. Socevanov citează exemplul unui element «cupron», care fiind regenerat a continuat să funcționeze normal mai mult de 30 de ani de la fabricarea sa.

Tabloul nr. 2

Caracteristicile elementelor cu oxid de cupru construite de ing. Ksenofontov (U.R.S.S.)

Marca	Destinaţia	Gabaritul minim		Greutatea fără electrolit	Caracteristicile electrice la temperatura camerei						Volumul electrolitului în 1 soluţie de NaOH, greutatea specifică 1,19—1,27
		Înălţimea	Baza		f. e. m. v	Tensiunea v	Capacitatea Ah	Regimul de descărcare: Intensit. curentului A	Regimul de descărcare: Tensiunea finală v	Curentul de secţiune circulară	
MO Э 1000	Alimentarea mijloacelor de telecomunicaţie staţionare, automate de blocare etc. . . .	460	225×180	12,5	0,9—0,84	0,65 0,57	1000 600	2 10	0,5 0,5	50	10,50
MO Э 500	Idem	350	168×193	7,2	0,9—0,84	0,65 0,57	500 300	1 5	0,5 0,5	25	5,25
MO Э 250	Idem	350	108×170	3,8	0,9—0,84	0,65 0,57	250 150	0,50 2,5	0,5 0,5	12	2,65

Există încă numeroase posibilități de elaborare a noi tipuri de elemente ușor adaptabile, la o producție de masă, și de îmbunătățire a modelelor existente, ținînd legătura strînsă între munca de cercetare și nevoile de dezvoltare și modernizare ale industriei.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Disposition des électrodes d'une pile électrique à oxyde de cuivre.
Fig. 2. — Elément électrique à oxyde de cuivre, dans un récipient en fonte.
Fig. 3. — Courbe de décharge d'un élément électrique à oxyde de cuivre.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Расположение электродов электрического элемента с окисью меди.
Рис. 2. — Электрический элемент с окисью меди в чугунном сосуде.
Рис. 3. — Кривая разрядки электрического элемента с окисью меди.

BIBLIOGRAFIE

1. V. G. Homiakov, V. P. Maşoveț și L. L. Kuzmin, *Tehnologia industriilor electrochimice*. Ed. tehnică, București, 1953, p. 16—165.
2. V. G. Socevanov, *Galvaniceskie elementî*. Moscova, 1951.
3. I. I. Spijevski, *Baterii galvanice și acumulatorii*. Ed. energetică de Stat, București, 1953.
4. N. Vasilescu-Karpen, *Noua teorie a pilelor electrice*. București, 1944.
5. O. K. Davtian, *Problema neposredstvennogo prevrașcienia himiceskoi energhii topliva v elektriceskuiu* Izs. Akad. Nauk SSSTR, Moscova-Leningrad, 1947.
6. — *Elemente și baterii galvanice*. Ed. tehnică, București, 1951.
7. G. W. Vinal, *Primary Batteries*. New York, 1950.
8. N. Vasilescu-Karpen, *Pila electrică cu clorură de argint*. Studii și cercetări de fizică, t, IV, nr. 1—2, 1953.
9. M. Păun, *Pentru modernizarea industriei de elemente și baterii galvanice din R.P.R.* Electrotehnica, nr. 3—4, 1953.

ACTIVITATEA INSTITUTULUI DE FIZICĂ

DIN ACTIVITATEA ASPIRANȚILOR

În Institutul de fizică al Academiei R.P.R. sînt înscriși pînă în prezent un număr de patru tovarăși la aspirantură cu frecvență, și zece tovarăși la «examenele obligatorii de candidat» (fără a fi scoși din producție).

Repartizarea la aspirantura cu frecvență este următoarea:

— Electricitate — doi aspiranți (cu specializarea în electronică)

— Spectroscopie — un aspirant

— Geofizică — un aspirant cu specializarea în «magnetism terestru»

Repartizarea la examenele obligatorii de candidat este următoarea:

— Structura materiei — trei tovarăși (dintre care doi cu specializarea în «raze X» și un tovarăș, cu specializarea în «magnetism nuclear»).

— Optică — un tovarăș, cu specializarea în «fotoelasticitate»

— Spectroscopie — doi tovarăși

— Chimie fizică — trei tovarăși, cu specializarea în «coloizi, soluții și fotochimie».

— Fizica teoretică — un tovarăș cu specializarea în «electrodinamica cuantică».

In cadrul aspiranturii cu frecvență, doi tovarăși (B. Iosifescu și C. Moțoc) vor susține examenele de materialism dialectic și istoric, iar un tovarăș (B. Iosifescu) și examenele la limba rusă și limba franceză.

În pregătirea examenelor de specialitate, sub îndrumarea prof. Tr. Gheorghiu și conf. D. Gelberg, aspiranții în specialitatea «electricitate» au prezentat în aprilie 1954, în cadrul seminarului de «fizica solidelor», referatele:

— *Teoria cuantică a conductibilității* (B. Iosifescu) și

— *Teoria clasică a conductibilității și teoria efectelor galvanomagnetice* (C. Moțoc),

iar în cadrul examenului de «mecanică cuantică» au susținut în iunie 1954 referatele:

— *Metoda statistică în «calculul lucrului de ieșire a electronilor»* (B. Iosifescu și

— *Calculul energiei de coeziune prin metoda Wigner-Seitz-Bordeen* (C. Moțoc).

În pregătirea acestui examen, aspiranții au avut ca studiu de bază: *Introducerea în mecanica cuantică* de Blohințev și, ca material ajutător, unele capitole din Fröhlich (*Elektronentheorie der Metalle*) și Bethe-Sommerfeld (*Handbuch der Physik*, XXIV-2) și unele lucrării originale.

Temele de disertație sînt din domeniul proprietăților emisive ale monocristalelor și comportă lucrări cu caracter experimental.

Aspirantul B. Iosifescu studiază anizotropia lucrului de ieșire a monocristalelor de wolfram, cu ajutorul metodei deplasării caracteristicilor. Această problemă a fost pînă în prezent puțin studiată; singurele date mai exacte au fost obținute în studiul emisiei autoelectronice, adică printr-o metodă mult mai puțin precisă decît metoda deplasării caracteristicilor. Problema are o importanță practică, din cauză că o serie de proprietăți ale catodelor policristaline cer, pentru a fi explicate, un studiu amănunțit al comportării catodelor monocristaline.

Aspirantul C. Moţoc, studiază variaţia cu temperatura a lucrului de ieşire, mai întîi pe policristale, apoi pe monocristale de wolfram; se va utiliza tot metoda deplasării caracteristicilor. După cum se ştie, rezultatele privitoare la coeficientul de temperatură al lucrului de ieşire sînt contradictorii. Este probabil că studiul acestui fenomen pe monocristale va da rezultate interesante şi va permite explicarea rezultatelor obţinute pînă acum cu policristalele.

Tot în iunie 1954, aspirantul Ilie Cucurezeanu (specialitatea «spectroscopie», conducător ştiinţific acad. prof. Ş t. V e n c o v) a susţinut examenul de mecanică cuantică, iar în octombrie 1954, aspirantul Titus Neştianu (specialitatea «geofizică», conducător ştiinţific prof. G. A t a n a s i u) a susţinut examenul de gravimetrie.

În cadrul examenelor obligatorii de candidat, s-au susţinut examene la:

— Materialism dialectic şi istoric (doi aspiranţi)

— Limba rusă (un aspirant)

— Limba franceză (doi aspiranţi)

— Limba germană (doi aspiranţi).

Sub conducerea îndrumătorilor de specialitate, aspiranţii fără frecvenţă îşi pregătesc tezele de disertaţie, astfel:

— Sub îndrumarea prof. H. H u l u b e i:

1. D. Dragomirescu, *Precizarea condiţiilor optime pentru analiza chimică prin raze X de fluorescenţă.*
2. V. Voljin, *Metode de dozare cantitativă prin spectre de raze X de fluorescenţă.*
3. D. Neagu, *Studiul rezonanţei magnetice a protonilor în diferite substanţe organice. Încercări de a da structura moleculelor.*

— Sub îndrumarea acad. prof. I. M u r g u l e s c u:

4. Y. Davidescu, *Contribuţiuni la studiul gradului de dispersiune al unui coloid electrolitic: sistemul săpun-apă-electrolit.*
5. O. Hörer, *Determinarea greutăţii moleculare medii la macromolecule prin metoda difuziunii luminii.*
6. M. Nicolae, *Influenţa pH-ului în formarea imaginii latente.*

— Sub îndrumarea acad. prof. Ş t. V e n c o v:

7. I. Vieroşanu. *Spectre de fluorescenţă ale unor compuşi organici.*
8. O. Gheorghiţă, *Influenţa cîmpului electric asupra spectrelor de difuzie combinată.*

— Sub îndrumarea acad. prof. E. B ă d ă r ă u şi prof. ing. N. I o s i p e s c u:

9. E. Teodorescu, *Lumina difuză în fotoelasticitate.*

— Sub îndrumarea prof. Ş. Ţ i ţ e i c a:

10. A. Hristev, *Corecţii radiative la lărgirea naturală a liniilor spectrale.*

RECENZII

A. I. AHIEZER și V. B. BERESTEȚKI, *Kvantovaia elektrodinamika* (*Electrodinamica cuantică*). Gostehizdat, Moscova, 1953, 428 pag., 66 fig.

Apariția cărții lui A. Ahiezer și V. Berestețki este un eveniment însemnat, deoarece această carte este prima expunere monografică a metodelor noi din teoria cuantică a cîmpurilor. Cartea prezintă un interes deosebit pentru teoreticieni, conținînd însă în același timp material care poate fi de folos și experimentatorilor la interpretarea materialului experimental (de exemplu, secțiuni eficace pentru diferite procese, tabele de coeficienți de conversiune internă etc.). Întreaga expunere se face pe baza teoriei invariante a perturbațiilor (studiul matricii S), care s-a dezvoltat în ultimii ani (din 1947); autorii nu se mărginesc însă numai la o expunere a acestei metode, ci cu ajutorul ei se tratează și o serie de probleme mai vechi, care se pot trata prin metoda uzuală. Prin aceasta, expunerea a căpătat un caracter mai unitar și închegat și contrar așteptărilor, pare mai inteligibilă decît teoria mai elementară, neinvariantă.

Cartea începe cu un capitol dedicat mecanicii cuantice a fotonului. În acest capitol din ecuațiile lui Maxwell se deduce o ecuație pentu « funcția de undă a fotonului » în spațiul impulsurilor (și se arată dificultățile introducerii unei astfel de funcții în spațiul configurațiilor). Sînt tratate în mod amănunțit diferite reprezentări ale cîmpului electromagnetic, mai ales descompunerea în stări cu polarizație și impuls definit și în stări cu moment cinetic și paritate definită. Cu această ocazie se expune și teoria dezvoltării cîmpurilor vectoriale după vectori sferici (aceste rezultate aparțin lui V. Berestețki). Capitolul se încheie cu studiul unui sistem format din doi fotoni (Landau) și cu clasificarea stărilor acestuia, importante pentru aplicațiile ulterioare.

Capitolul II conține o expunere sistematică a teoriei lui Dirac. Expunerea se face pornind de la reprezentarea spinorială a funcției de undă a electronului și se introduc diferitele moduri de reprezentare ale matricilor lui Dirac (matricile ρ și $\vec{\sigma}$, matricile α și $\vec{\rho}$, matriclie γ_i). Deosebit de clară este expunerea conjugării de sarcină, a reprezentării funcțiilor de undă ale pozitronului și descompunerea funcției de undă a electronului după diferite sisteme ortogonale. Foarte util este § 9, unde este expusă foarte clar metoda lui Casimir pentru sumarea asupra diferitelor polarizații și calculul urmelor matricilor γ_i, importante pentru aplicații. Se expun deasemenea rezultatele lui Berestețki, relative la descompunerea spinorilor după spinori sferici și clasificarea stărilor după moment și paritate. Capitolul continuă cu expunerea teoriei mișcării electronului într-un cîmp dat, cu accent asupra problemei structurii fine a hidrogenului și problema difuziunii coulombiene a electronilor. Sînt tratate și chestiuni mai noi ca deplasarea izotopică a nivelelor și rolul dimensiunilor finite ale nucleului. Capitolul se încheie cu expunerea aproximației nerelativiste de primul și al doilea ordin (ecuația lui Pauli cu termenii lui Darwin). Se discută în ce măsură ecuația lui Dirac poate fi aplicată la nucleoni.

După această parte introductivă de 100 pagini, care în sine poate fi destul de utilă, urmează partea dedicată electrodinamicii propriu-zise.

Capitolul III se ocupă cu cuantificarea cîmpului electromagnetic și a cîmpului electron-pozitronic. După transcrierea cuadri-dimensională a ecuațiilor de cîmp, se introduc regulile de comutare pentru amplitudinile cuantificate. Autorii folosesc metrica indefinită în spațiul Hilbert (cu definiția corespunzătoare a valorilor medii) pentru a exclude fotonii longitudinali și temporali (metoda lui Gupta și Bleuler) și pentru definiția vidului. Se indică de asemenea legătura între cuantificarea a doua și

reprezentarea în spaţiul impulsurilor (reprezentarea lui Fock) şi se expun ideile metodei funcţionalelor lui Fock (aceste metode au căpătat din nou importanţă în cîteva lucrări apărute în ultimul timp). De mare utilitate practică este § 16, unde se construiesc funcţiile invariante D, $D^{(1)}$, D^F, se dă definiţia produsului cronologic (D y s o n) şi a produsului normal (W i c k) pentru operatorii cîmpului electromagnetic. Paragrafele dedicate cuantificării cîmpului electron-pozitronic încep cu formularea principiului variaţional pentru ecuaţia lui Dirac. Folosirea anticomutatorilor este justificată abia în anexe, însă consecinţele sînt discutate în amănunt în § 17. Paragraful 18 se ocupă cu construcţia funcţiilor $\Delta(x)$, $\Delta^{(1)}(x)$, $\Delta^F(x)$, $\Delta^R(x)$ şi a spintensorilor S, $S^{(1)}$, S^F. Aici se discută conjugarea de sarcină, se introduc produsele cronologice după D y s o n şi produsul normal după W i c k, a operatorilor şi de asemenea produsul T al lui W i c k, care vor fi utilizate mai tîrziu. Punctul 5 al acestui paragraf dă cîteva reprezentări ale funcţiilor Δ, însă, atragem atenţia că formulele (18.48) pînă (18.50) sînt greşite, funcţia Δ din ele fiind de fapt funcţia $\overline{\Delta}$ a lui Schwinger $\left(\overline{\Delta}(x) = \frac{1}{2}\,\varepsilon(x)\;\Delta(x)\right)$.

Această eroare se datoreşte faptului că P a u l i şi V i l l a r s*) notează cu Δ (gras) funcţia $\overline{\Delta}$, fapt care, pare-se, a scăpat autorilor, care au folosit expresiile date de P a u l i şi V i l l a r s pentru reprezentarea funcţiei Δ.

Capitolul IV se ocupă de studiul interacţiunii între cele două cîmpuri şi cu formularea teoriei invariante a perturbaţiilor. Se discută în amănunt noţiunea de «paritate de sarcină» şi aplicabilitatea noţiunilor de cîmp «exterior», curent «dat». Reprezentarea de interacţiune se introduce pornind dela o reprezentare Schrödinger, în care stările sistemului sînt specificate prin numere de ocupaţie. Se arată cum se dezvoltă matricea de difuzie (matricea S) după puterile lui e^2. Cu acest material, cititorul este pregătit pentru a aborda aplicaţiile care nu necesită regularizare, din capitolele V, VI, VII. Teoria invariantă a perturbaţiilor se deduce pe încă o cale (metoda lui G. Källén) din reprezentarea Heisenberg şi cu această ocazie se pune în evidenţă şi legătura cu formalismul lui S c h w i n g e r.

Capitolul V se ocupă în întregime de analiza matricii S. Un loc central în acest capitol îl ocupă teoremele lui Wick (p. 177) şi reprezentarea grafică a elementelor de matrice (§. 23). Această problemă este expusă deosebit de clar şi cu multe exemple. Urmează trecerea în spaţiul impulsurilor, teorema lui Furry şi un rezumat al regulilor lui Feynman pentru scrierea elementelor de matrice (p. 159).

Analiza singularităţilor din matricea S, făcută în § 25, 26 este o reproducere exactă a articolului lui A. A h i e z e r şi R. P o l o v i n**), cu excepţia numărului 6 din § 26, unde se analizează divergenţele suprapuse şi reductibile (după A. S a l a m). Se arată că nu există decît 4 tipuri de divergenţe. În § 27 se arată cum se pot elimina aceste divergenţe (din păcate numai în prima aproximaţie a teoriei perturbaţiilor) cu ajutorul renormării masei şi sarcinii electronului. În acest paragraf se expune pe scurt şi metoda de regularizare cu mase auxiliare a lui Pauli şi Villars. Şi aici (formulele (27.20)—(27.22)) funcţia $\Delta(x)$ trebuie înlocuită cu $\overline{\Delta}(x) = \frac{1}{2}\,\varepsilon(x)\,\Delta(x)$. La sfîrşitul paragrafului se discută convergenţa seriilor regularizate. Autorii sînt de părere că pentru evitarea tuturor dificultăţilor din electrodinamica cuantică, va trebui să se ţină seama şi de interacţiunile cu alte cîmpuri în speţă diferitele cîmpuri mezonice. Capitolul se încheie cu un paragraf în care se dau relaţiile fundamentale între elemente de matrice, probabilităţile diferitelor procese şi secţiuni eficace şi se arată cum trebuie efectuată sumarea în raport cu stările de polarizare.

Capitolele VI şi VII sînt dedicate aplicaţiilor teoriei perturbaţiilor (fără renormare). În capitolul VI se tratează interacţiunile foton-electron. Se consideră următoarele efecte: difuziune Compton, emisia şi absorbţia fotonilor de către multipoli electrici şi magnetici (efect fotoelectric, radiaţia de frînare, generare şi anihilare de perechi, dezintegrarea pozitroniului, dispersia).

*) Rev. Mod. Phys., 1949 t. 21, p. 434.
**) Usp. fiz. nauk, 1953, t. 51, p. 3.

Un paragraf întreg este dedicat «catastrofei infraroșii» și eliminării ei cu ajutorul metodelor lui Bloch-Nordsieck și Feynman (masa finită a fotonului); se discută legătura între cele două metode. În acest capitol sînt incluse o serie de rezultate mai recente, în speță corelația de direcție la emiterea în cascadă a doi fotoni.

O notă la sfîrșit (adăugată probabil în corectură) redă rezultatele importante obținute de Landau și Pomeranciuk*) relative la radiația de frînare în medii dense, care arată că la energii mari fotonii și electronii devin mult mai penetranți.

Capitolul VII se ocupă de interacțiunea retardată a doi electroni. Aici se deduce «funcția de interacțiune» a două sarcini și cu ajutorul ei se arată cum poate fi justificat «principiul de corespondență», în tratarea radiației sistemelor cuantice. Ca aplicații se tratează difuziunea electronilor și pozitronilor pe electroni (formulele lui Möller și Bhabha), formula lui Breit și rezultatele lui Pirenne, Landau și Berestețki, relative la interacțiunea de schimb între electron și pozitron. Problema pozitroniului și a conversiunii interne a razelor γ (rezultatele aparțin în mare măsură lui V. Berestețki) sînt tratate foarte amănunțit; se dau tabele cu coeficienți de conversiune utile pentru interpretarea datelor experimentale. La sfîrșitul capitolului sînt tratate tranzițiile 0—0 importante pentru fizica nucleară.

Multe dintre rezultatele expuse în capitolele VI și VII au fost cunoscute înainte de apariția metodelor noi în electrodinamica cuantică (1947). Rezultatele din capitolul VIII se refera însă tocmai la acele probleme pentru care aparatul vechi era inadecuat**), anume la așa numitele «corecții de radiație». Pentru a introduce corecțiile la diferite efecte, trebuie ținut seama de termenii de ordin superior în dezvoltarea matricii S. Acești termeni diverg însă, și în capitolul VIII se arată în ce mod se pot separa din termenii infiniți, corecții finite, ce pot fi puse în evidență experimental. Expunerea urmează în esență ideile lui Feynman. Se arată cum se calculează expresiile divergente și cum se elimină divergențele infraroșii. Aceste rezultate sînt aplicate apoi la calculul corecțiilor de ordinul doi la momentul magnetic al electronului (se dă și valoarea corecției de ordinul patru) și corecțiile la difuziunea electronului. Secțiunea eficace pentru efectul Compton (Brown și Feynman) cu corecții care sînt date fără deducere. Alte probleme tratate sînt: lărgimea liniilor spectrale, deplasarea nivelelor de energie a hidrogenului (efectul Lamb), deplasarea nivelelor μ-mezohidrogenului, difuziunea luminii pe lumină (aici o contribuție însemnată a fost făcută de A. Ahiezer și I. Pomeranciuk încă în 1937), difuziunea coerentă a razelor γ pe nuclee (efectul Delbrück). Capitolul se încheie cu o analiză succintă a corecțiilor neliniare la lagrangeian și a semnificației generale a rezultatelor obținute.

Cartea mai conține trei anexe. Prima este consacrată teoriei generale a cîmpurilor. Cîmpurile sînt clasificate după reprezentările ireductibile finit-dimensionale ale grupului Lorentz ***). Autorii urmează aici în esență articolele lui I. Ghelfand și A. Iaglom. Apoi se construiesc toate ecuațiile relativist-invariante de ordinul întîi. Se arată că singurele ecuații cu sarcină definită, de ordinul I, cu matricea Γ_0 diagonală, sînt ecuațiile lui Dirac, iar singurele ecuații cu energii pozitiv definite sînt ecuațiile lui Duffin-Kemmer pentru particule de spin 0 și 1. În § 53 este expusă teorema lui Pauli, relativă la legătura între spin și statistică. Expunerea urmează destul de aproape articolul original ****).

A doua anexă, scrisă de A. Galanin, expune pe scurt rezultatele obținute de acesta*****) în teoria stărilor legate. Se deduce pe această cale ecuația lui Bethe-Salpeter pentru doi electroni,

*) DAN, 1953, t. 92, nr. 3.

**) Deși el poate fi modificat astfel încît să includă și corecțiile relativiste (a se vedea de exemplu cartea *Kvantovaia teoria polia* de D. Ivanenko și A. Sokolov), metoda este greoaie și mai puțin transparentă.

***) Autorii înțeleg prin «grup Lorentz total», ceea ce se numește uneori «grupul Lorentz ortocron», adică se exclude inversiunea timpului.

****) Pauli, Phys. Rev., 1940, t. 58, p. 716.

*****) JETF, 1952, t. 22, p. 448; 1952, t. 23, p. 488.

însă nu se dau nici un fel de aplicații ale acestei ecuații (deși ar fi fost interesant să se reproducă cel puțin rezultatele lui E. Salpeter*) în teoria structurii fine).

Anexa a treia, matematică, conține un paragraf despre calculul integralelor divergente (în esență, ceea ce este cuprins în anexa la articolul al doilea al lui Feynman; ar fi fost util să se includă metodele expuse în articolul lui Brown și Feynman (Phys. Rev., 1952, t. 85, nr. 2) despre efectul Compton). Un al doilea paragraf (§ 57) este dedicat teoriei L-vectorilor și a funcțiilor sferice generalizate. Prin L-vectori autorii înțeleg mărimile care formează substratul unei reprezentări de ordinul $2L+1$ a grupului rotațiilor. Se arată pe scurt cum se poate construi algebra L-vectorilor, folosindu-se, fără deducere, proprietățile coeficienților Racah (coeficienții din dezvoltarea Clebsch-Gordan).

Din rezumatul precedent se vede că această carte are un conținut bogat și foarte variat, pe care autorii au încercat să-l expună într-un mod unitar, ceea ce au reușit în mare măsură. Ca mai mare parte a cărții este foarte clară și inteligibil scrisă.

Totuși cartea nu este lipsită de defecte. Astfel, în unele locuri, materialul original nu a fost adaptat la restul cărții; de exemplu, reprezentările menționate ale funcțiilor Δ, care au fost luate din articolul lui Pauli și Villars; la expunerea metodei lui Bloch-Nordsieck se folosește o descompunere a cîmpului în unde staționare, deși în restul cărții se folosește mereu descompunerea în unde progresive; §§ 32, 33, 36 și 38 sînt scrise în unități Gauss cu $\hbar \neq c \neq 1$, deși în tot restul cărții se folosesc unități raționale cu $\hbar = c = 1$. Apoi, o serie de probleme care au fost rezolvate mai de mult (formulele lui Klein-Nishina, Bhabha, Möller, Bethe-Heitler) au fost preluate din original (respectiv din cartea lui Heitler) fără a se da deducerea lor (la unele efecte se dau indicații scurte).

Acest lucru face ceva mai dificil studiul cărții, deși formulele menționate reprezintă foarte bune exerciții pentru verificarea cunoștințelor.

Expunerea multor chestiuni din carte nu este mai amănunțită decît conținutul articolelor originale, deși aceasta ar fi făcut cartea mai utilă.

Astfel expunerea renormării din carte este prea redusă (acest lucru a fost observat și de A. Abrikosov, I. Pomeranciuk, I. Șmușkevici în recenzia apărută de curînd în Uspehi fiziceskih nauk **)

În expunerea metodei lui Gupta și Bleuler (metrica indefinită în spațiul Hilbert), autorii nu specificau, că, pentru ca valorile medii după definiția nouă să aibă sens, este necesar ca vectorul de stare să îndeplinească condiția suplimentară Lorentz-Fermi (15.50).

În unele locuri, alegerea notației nu este prea fericită. Astfel de exemplu, în § 7, simbolul * se folosește, pe lîngă semnificația lui de conjugare complexă, și pentru spinorii adjuncți (conjugați și transpuși), care se înmulțesc de la dreapta cu matrici (vezi formula (7.31) $\bar{\psi} = \psi^*\beta$, (7.34) $j_0 = \psi^*\psi$ în loc de $\bar{\psi} = \psi + \beta$, $j_0 = \psi + \psi$, unde $\psi + = (\psi^*)^{\Gamma}$, T denotînd transpusa).

Problemele de interpretare fizică, măsurabilitate etc. sînt atinse numai tangențial.

Includerea unui index alfabetic ar fi ușurat mult folosirea cărții.

Nu trebuie uitat însă, că această carte este prima de genul ei în literatura mondială și că într-o primă ediție, defecte de natura celor menționate sînt inevitabile. În orice caz, ele nu micșorează cu nimic valoarea științifică ridicată a monografiei, care va fi un ajutor prețios atît pentru aspiranții și studenții din anii superiori, cît și pentru specialiștii în domeniul fizicii teoretice.

M. E. Mayer

---

*) Phys. Rev., 1952, t. 87, p. 328: a se vedea și culegerea «*Noveișee razvitie kvantovoi elektrodinamiki*», Moscova, 1953.

**) 1954, t. 53, p. 442.

D. I. BLOHINȚEV; *Bazele mecanicii cuantice*. Ed. tehnică, București, 1954.

Apariția în vara anului 1954 a traducerii în limba romînă a cunoscutului tratat de mecanică cuantică al lui D. I. Blohinţev a fost salutată cu bucurie de cercurile de fizicieni din R.P.R.

Într-adevăr, încă de multă vreme se simțea nevoia unui asemenea tratat în limba romînă, care să pună la îndemîna fizicienilor, eventual și anumitor grupuri de ingineri sau chimiști și studenților, de la Facultatea de fizică, expunerea bazelor mecanicii ondulatorii nerelativiste și a unora din aplicațiile ei mai importante.

Editura tehnică s-a văzut în situația destul de grea, de a trebui să se decidă între cele cîteva tratate de acest fel din limba rusă. Credem că alegerea tocmai a cărții lui D. I. Blohinţev a fost cea mai nimerită, dat fiind faptul că această carte se adresează unor categorii mai variate de cititori.

Într-adevăr, nu numai fizicienii teoreticieni trebuie să cunoască problemele puse în mecanica cuantică, ci în general, toți fizicienii angajați în problemele de cercetare, trebuie să se țină la curent cu fizica modernă, măcar în ceea ce privește ideile ei esențiale și aplicațiile mai importante. În acest sens, pentru toți fizicienii cercetători, cartea lui Blohinţev e de un real folos, deoarece ea nu utilizează un aparat matematic prea complicat și de obicei nu presupune lucruri cunoscute din alte părți.

De asemenea, pentru studenți sînt folositoare anumite capitole, direct la cursurile de facultate, iar din altele pot să-și completeze cunoștințele. În plus, anumite cercuri de ingineri și chimiști, citind capitolele ei de la început sau cîteva aplicații, vor putea să-și facă o idee de problemele din mecanica cuantică.

În aceste condiții, apariția traducerii în vara anului 1954 marchează editarea primului tratat de acest gen în limba romînă *).

Traducerea este întocmită după ediția a II-a a tratatului din 1949, revăzută.

Una din calitățile principale ale lucrării lui Blohinţev o constituie preocuparea autorului de a da o interpretare fizică, cît mai justă, aparatului matematic din mecanica cuantică. El arată că în mecanica cuantică trebuie părăsit modul clasic de a privi fenomenele, că fenomenele la scara atomică au un alt caracter, decît acela cu care ești obișnuit în lumea macroscopică. Autorul pornește de la ideea că, pentru a putea înțelege mecanica cuantică, trebuie să începi prin a te familiariza cu principiile ei.

Neurmînd mersul istoric al fizicii, autorul caută, pe o cale experimentalo-inductivă, să ajungă la postulatele de bază ale mecanicii cuantice.

În capitolul *Bazele teoriei cuantice*, autorul se mărginește să expună cîteva idei fundamentale ale mecanicii cuantice, cum ar fi: postulatele lui Bohr, descrierea stării particulei libere cu ajutorul undei lui De Broglie ș. a., arătînd natura experimentală a acestor idei.

În capitolul 2, *Bazele mecanicii cuantice*, introducînd mai întîi noțiunea de ansamblu pur și mixt, ca o noțiune decurgînd direct din experiență, autorul familiarizează pe cititor cu interpretarea statistică a funcțiunii de undă, reprezentanta matematică a ansamblului pur. Totodată arată, într-un caz particular, cum în problemele de calcul ale valorilor medii se introduce în mod natural, în locul lui p_x operatorul diferențial $-ih\frac{\partial}{\partial x}$. Acest rezultat va fi generalizat în capitolul 3, intitulat *Reprezentarea mărimilor mecanice prin operatori*.

Înainte de a ajunge însă acolo, tocmai în scopul de a obișnui cititorul cu noua mecanică, se studiază relația de nedeterminare a lui Heisenberg, criticînd interpretarea ei falsă. Arată că nedeterminarea simultană a poziției și impulsului unei particule microscopice nu înseamnă o imposibilitate în cunoașterea realității, ci efectiv că particula de «dimensiuni» microscopice nu mai posedă proprie-

*) Cu excepția unei broșuri de mecanică ondulatorie a prof. Novacu, epuizată de mulți ani.

tățile cunoscute din fizica clasică și că ea efectiv nu posedă simultan un impuls și o coordonată bine determinate (nu posedă o traiectorie). În fine, el insistă asupra rolului aparatului de măsurat în trecerea de la un ansamblu pur, la unul mixt.

Abia în capitolul 3, autorul trece la fondarea principiilor de bază ale mecanicii cuantice, într-o formă matematică mai riguroasă. Nu trebuie uitat însă, că aceste rezultate sînt o consecință directă a analizei experimentalo-inductive din celelalte două capitole.

Autorul dă definiția operatorilor liniari auto-adjuncți, arătînd justificarea introducerii lor, ca reprezentanți în mecanica cuantică a oricărei mărimi fizice clasice; studiază problema valorilor medii și a funcțiunilor și valorilor proprii, ca singurele valori ce pot fi obținute experimental; de asemenea modul de calcul al probabilităților de a obține într-o experiență una din aceste valori proprii. Analizează apoi, într-un paragraf special, condițiile posibilităților de măsurare simultană a diferitelor mărimi mecanice.

Una din aplicațiile importante ale capitolului este găsirea funcțiunilor caracteristice ale momentului cinetic al unei microparticule, adică a funcțiilor sferice. Pentru a nu îngreuna lectura textului, autorul face dese trimiteri, atît în capitolul 2, cît și în 3, la anexele de la sfîrșit, unde sînt dezvoltate unele calcule mai laborioase.

După ce introduce hamiltoniana în capitolul 4, autorul ajunge la ecuația lui Schrödinger. Introducerea acestei ecuații fundamentale în mecanica cuantică ondulatorie se face de către diferiți autori în diferite feluri. La Blohințev, procedeul este următorul: a extrapola un rezultat, din cazul particulei libere, în cazul general, sub formă de postulat. Procedeul este simplu, ușor de înțeles. Autorul subliniază că ecuația lui Schrödinger constituie de fapt un postulat al mecanicii ondulatorii.

Totuși, credem că n-ar fi fost inutil a arăta că există și o cale corespondențială, prin așa-numitul principiu de corespondență, ce dă o justificare acestei ecuații fundamentale. Credem că ar fi fost nimerit ca autorul să folosească și explicit principiul de corespondență, în loc să-l folosească numai tacit (așa procedează în fond la construirea operatorilor din mecanica cuantică).

De asemenea credem că ar fi trebuit insistat mai pe larg asupra importanței principiale a stărilor staționare și a modului de derivare al operatorilor în mecanica cuantică.

Unul din capitolele foarte importante ale cărții este capitolul 6, *Legătura mecanicii cuantice cu mecanica clasică și optică*. Acest capitol prezintă un interes deosebit prin aceea că în el se arată legătura indisolubilă între mecanica cuantică și teoriile clasice, menționîndu-se că la limita clasică teoria cuantică tinde la cea clasică. Astfel se remediază în mare măsură una din lipsurile semnalate mai sus.

Capitolul 7, *Bazele teoriei reprezentărilor* conține, expuse într-o formă unitară și riguroasă, procedeele de calcul matricial și semnificația lor. Deși conține chestiuni în fond complicate, de transformări în spațiul Hilbert (nu se specifică acest lucru), autorul reușește să expună într-o formă ușor accesibilă chestiunile de bază, în această problemă.

Capitolul 8 și 9 sînt de mare importanță pentru cei ce vor să se familiarizeze cu felul cum se aplică teoria expusă pînă acum în cazuri concrete. Sînt prezentate următoarele aplicații: oscilatorul armonic în reprezentarea coordonatei și reprezentarea energiei, mișcarea în cîmp central și în special în cazul cîmpului coulombian, molecula biatomică și mișcarea unei sarcini libere într-un cîmp magnetic omogen.

De semnalat aplicația importantă: *Mișcarea electronului în cîmp periodic*, care în majoritatea tratatelor de acest tip este lăsată la o parte, deși prezintă un interes deosebit, în teoria corpului solid.

Autorul reușește într-un număr restrîns de pagini să prezinte un material bogat. E drept că nu poate să adîncească chestiunile, dar lucrurile de bază fiind spuse, cel ce vrea să adîncească problemele va putea să consulte o bibliografie specială, unde nu-i va mai fi așa greu să se descurce. Totuși, credem că ar fi fost necesar să fie tratate mai pe larg și polinoamele Laguerre, la fel ca cele Hermite și Legendre, arătîndu-se proprietățile principale și procedeul de normare (eventual într-o anexă).

Începînd cu capitolul 10, este introdus operatorul spinului electronic și funcțiunile de spin, care vor permite abordarea unor aplicații, altfel inaccesibile din punct de vedere teoretic. Autorul introduce spinul în mecanica cuantică pe baza rezultatelor fizice experimentale. Este introdusă ecuația

lui Pauli, însă într-o formă particulară a ei. Se fac și cîteva aplicații, dintre care este de remarcat paragraful *Proprietățile momentului total*.

Dar aplicațiile încep să necesite procedee matematice de abordare noi. De aceea, în capitolele 11—15, autorul expune bazele teoriei perturbației staționare și nestaționare, făcînd și cîteva aplicații caracteristice, cum ar fi, pentru teoria perturbației staționare: descompunerea liniilor spectrale ale atomului de hidrogen în cîmp electric, descompunerea liniilor spectrale într-un cîmp magnetic slab, aplicații în legătură cu ciocnirile, iar pentru teoria perturbațiilor nestaționare: emisia, absorbția, dispersia, efectul fotoelectric.

De remarcat iarăși o mare diversitate de aplicații într-un spațiu extrem de redus. Credem că ar mai fi trebuit restrîns numărul de aplicații, astfel încît autorul să nu fie silit pe alocuri numai la expunerea unor observații asupra metodei de lucru. De asemenea, credem că ar fi fost de preferat o prezentare mai unitară, cu notații mai unitare, indiferent de bogata și variata bibliografie utilizată. Sînt și anumite greșeli de tipar și neatenții în demonstrare, de exemplu în § 73 în originalul în limba rusă, care din nefericire n-au fost corectate în traducerea românească *).

După încă o aplicație: *Trecerea microparticulelor prin bariere de potențial*, autorul, în capitolele 17—22, face teoria generală a mai multor corpuri și a sistemelor de micro-particule identice Bose și Fermi și introduce principiul lui Pauli. Este o expunere unitară și sistematică, prezentată într-o formă relativ ușor de urmărit.

Demn de remarcat este capitolul 20, *A doua cuantificare si statistica cuantică*, capitol greu, dar foarte important prin legătura sa cu metodele de lucru și cu formalismul matematic din electrodinamica cuantică. E poate cel mai greu capitol al cărții, adresîndu-se în special teoreticienilor.

În fine, ca o exemplificare a chestiunilor teoretice de mai sus, capitolele 21, 22 și 23 conțin aplicații în legătură cu atomi cu mai mulți electroni (studiază heliul), și molecula cu mai mulți atomi (studiază hidrogenul). Prezentarea este mult mai limpede decît în partea centrală a cărții. Autorul reușește să pună problemele de bază, cei ce vor să aprofundeze putînd citi literatura de specialitate.

Capitolul 24, *încheiere*, este de un mare interes principial și filozofic. Autorul recapitulează principiile de bază ale mecanicii ondulatorii. Aici mai mult ca ori unde, își expune tezele sale, susținute de altfel nu fără destul succes, cu ocazia discuțiilor în domeniul fizicii sovietică. Situîndu-se pe o poziție materialistă, caută să înlăture interpretările occidentale în mecanica cuantică, combătînd principiul complementarității al lui B o h r, ideile școlii din Kopenhaga etc.

Fără îndoială că tratatul lui B l o h i n ț e v reușește într-un număr relativ mic de pagini (558 în ediția a II-a în limba rusă și 532 în ediția românească) să dea cititorului cunoștințele de bază de mecanică cuantică.

Evitînd folosirea explicită a principiului de corespondență **), autorul caută să inducă principial mecanica cuantică direct din realitatea fizică, fără a porni de la mecanica clasică. Abia apoi compară rezultatele cu cele clasice.

Traducerea românească editată de Editura tehnică se prezintă sub un aspect plăcut extern și intern, spre deosebire de exemplu, de volumul 2 din cartea *Fizica Atomică* de E. V. S p o l s k i. Din nefericire lipsește o unitate în traducere. În cursul expunerii, aceiași termeni din originalul rusesc apar în traducere cu nomenclaturi diferite, după locul unde se găsesc în volum, deci după traducătorul respectivei părți.

Astfel, de exemplu, « momentul cinetic » este numit « momentul impulsului », simplu « moment » sau mai rar chiar « moment cinetic ». Era de preferat a se utiliza numai nomenclatura « moment cinetic », pentru a putea vorbi corect de momentul cinetic total, ca sumă vectorială a momentului cinetic orbital total și momentul de spin total. De observat că uneori în text se spune « moment orbital », alteori « momentul orbitei », termen cu totul neutilizat în limba română, iarăși datorită unei lipse de

*) S-ar fi putut utiliza procedeul unei note din partea redacției, cum s-a procedat de exemplu în traducerea lucrării lui L e o n t o v i c i: *Introducere în termodinamică*.

**) Un scurt comentar se poate vedea în § 87.

coordonare şi de verificare suficientă. Alt exemplu: cred că se obişnueşte a se spune mai ales «radiaţie dipolară» şi «radiaţie cvadrupolară» şi nu «radiaţie de dipol,», respectiv «radiaţie de cvadrupol». Nu mai vorbim despre întorsăturile gramaticale, care încurcă sensul.

Demn de remarcat este însă că toate aceste lipsuri enumerate mai sus sînt incomparabil mai puţine decît în traducerea volumului 2 din *Fizica Atomică* de E. V. Spolski, ceea ce reprezintă o calitate a traducerii lucrării lui Blohinţev. O lipsă mult mai gravă este păstrarea greşelilor de tipar din textul rusesc, la formule, şi introducerea de greşeli noi.

Astfel, de exemplu, la pagina 255 din originalul romînesc se menţin greşelile evidente de tipar de la formulele (72,1), (72,2), care luate împreună sînt contradictorii cu (72,4), iar la pagina 261, greşelile de la formulele (73,16). (Totuşi ar fi putut fi uşor corectate de un specialist!). De asemenea, în deducerile de la § 82, unele formule sînt incomplete, ca de exemplu: (82,13), (82,14), dar rezultatul final e corect. Nu mai vorbim de anumite greşeli de semne, care sînt cele mai uşor de îndreptat.

În fine, sînt anumite inconsecvenţe de notaţii, care s-ar fi putut îndrepta, faţă de originalul rusesc. Astfel, de exemplu, uneori autorul notează sarcina electronului cu e, alteori cu $-e$, uneori lucrează pentru particula liberă cu funcţiunea de undă $e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-\vec{p}\vec{r})}$, alteori cu $e^{+\frac{i}{\hbar}(Et-\vec{p}\vec{r})}$, ceea ce corespunde la o definire diferită pentru i.

Ar mai fi de observat că era necesară o mai mare atenţie în exprimarea, mai ales în anumite paragrafe principiale, cum ar fi de exemplu § 14.

Apariţia traducerii tratatului de mecanică cuantică nerelativistă a lui D. I. Blohinţev reprezintă fără îndoială un mare succes pentru literatura ştiinţifică de fizică de la noi din ţară. Într-o versiune romînească, cartea serveşte totodată ca manual de studiu şi de consultare pentru probleme principiale destul de mult discutate şi la noi în ultimul timp, printre fizicieni. Conţinînd în parte chiar tezele proprii de interpretare fizică a mecanicii cuantice, traducerea romînească pune la dispoziţia fizicienilor romîni un material bogat de discuţie şi lămuriri.

Cred însă că este de dorit ca ediţia viitoare să fie făcută în condiţii mai bune, înlăturîndu-se lipsurile.

Aretin Corciovei

E. V. SPOLSKI, *Atomnaia fizika*, Vol. II (Fizica atomică) GITTL, Moscova-Leningrad, 1950.

Apariţia celui de-al doilea volum al *Fizicii atomice* a lui Spolski a fost salutată de un numeros public cititor, care se recrutează nu numai din rîndurile specialiştilor fizicieni şi ale studenţilor facultăţilor de fizică, ci şi de specialişti din alte ramuri ale ştiinţei şi tehnicii.

Cu toată actualitatea ei, expunerea sistematică a fizicii atomice este o problemă dificilă, în primul rînd din cauză că domeniul pe care-l cuprinde este foarte vast, în al doilea rînd, pentru că această ramură a fizicii moderne se dezvoltă într-un ritm nemaivăzut. Astfel se explică numărul redus de manuale de fizică atomică. E. V. Spolski a rezolvat cu succes această sarcină pe care şi-a asumat-o, ceea ce se dovedeşte prin faptul că într-un interval de timp foarte scurt *Fizica atomică* a apărut în limba rusă în a treia ediţie.

Fizica atomică volumul II în limba romînă, este traducerea celei de a treia ediţii ruseşti îmbunătăţită şi completată.

Volumul al doilea se compune din două părţi principale: *Bazele mecanicii cuantice* şi *Fizica nucleului atomic*. În prima parte, care cuprinde şase capitole, sînt date noţiunile fundamentale ale mecanicii cuantice şi ale calculului cu operatori, cu aplicaţii la problemele cele mai interesante cu privire la învelişul exterior al atomului: mişcarea electronilor în cîmpul nucleului, spectrele alcalinelor şi structura fină a spectrelor, spinul electronului, sistematica razelor Roentgen, principiul lui Pauli şi atomii excitaţi.

A doua parte a volumului II se ocupă de nucleul atomic şi particule elementare. În şase capitole se tratează mai întîi, în general, nucleul atomic şi părţile sale componente, iar apoi reacţiile

nucleare. Într-un capitol special se descriu metodele experimentale folosite în fizica nucleară — acceleratori, camere Wilson etc. — acordîndu-se o importanţă deosebită dificultăţilor care apar la lucrările experimentale. De asemenea se tratează mai amănunţit problema neutronului, a fisiunii nucleare şi a utilizării energiei nucleare, subliniindu-se rolul conducător pe care-l joacă U.R.S.S. în aplicarea paşnică a energiei nucleare. Ultimul capitol este dedicat razelor cosmice.

La sfîrşitul cărţii se află anexe în care se tratează probleme ce aparţin altor capitole ale fizicii, şi care sînt necesare pentru înţelegerea expunerii. De asemenea se găseşte o tabelă a izotopilor şi alte tabele cu constante atomice, tabloul lui M e n d e l e e v etc. La sfîrşitul fiecărui capitol se află trimiteri bibliografice la literatura originală, de specialitate.

Privind această carte în primul rînd ca un manual de fizică atomică experimentală, trebuie menţionat că autorul a reuşit pe deplin să îmbine într-un tot întreg teoria cu experienţa. În toate capitolele, cu excepţia celor pur teoretice, fiecare deducere teoretică este completată cu o descriere a metodei experimentale, dîndu-se în multe cazuri, pentru ilustrare rezultate numerice. La descrierea metodelor experimentale şi a mijloacelor folosite, autorul insistă asupra diferitelor dificultăţi de ordin teoretic, constructiv sau experimental.

Autorul se opreşte mai mult asupra părţilor esenţiale ale diferitelor probleme, folosind comparaţii sau ilustraţii sugestive, care uşurează înţelegerea fenomenelor, chiar dacă ele nu sînt perfect riguroase. Drept exemplu, arătăm comparaţia dintre spin şi polarizarea undelor, sistemul de nucleoni şi lichidul nuclear şi multe altele.

Trebuie să facem o observaţie cu privire la ultimul capitol, *Razele cosmice*, care faţă de legătura strînsă, închegată, care există între toate capitolele anterioare, apare ca un apendice, fără legătură cu restul cărţii. Sîntem de părere că multe paragrafe din acest capitol ar trebui înglobate în capitolul despre particule elementare, despre reacţii cu particule de energii foarte mari, ceea ce ar fi întărit legătura logică dintre acest capitol şi restul cărţii.

Apariţia celui de-al doilea volum al *Fizicii atomice* a lui S p o l s k i constituie un eveniment important în viaţa ştiinţifică a ţării noastre. Studenţii facultăţilor în care se predau cursuri de fizică atomică sau fizică nucleară, găsesc în această carte materialul necesar pentru dezvoltarea şi aprofundarea cunoştinţelor primite la cursuri şi seminarii. Pentru profesori, cercetători sau colaboratori ştiinţifici care activează în ramuri direct sau indirect legate de fizica atomică sau nucleară, această carte constituie un îndreptar în munca lor didactică sau ştiinţifică.

Pe lîngă aceasta, trebuie subliniată importanţa ideologică a cărţii în care cititorii din ţara noastră găsesc o interpretare materialist-dialectică a fenomenelor, fără deformări idealiste a interpretării unor fenomene cum ar fi, de exemplu, defectul de masă, formarea perechilor de electroni etc.

În încheiere trebuie să facem o observaţie cu privire la traducerea volumului al II-lea al *Fizicii atomice* de S p o l s k i, care nu este la înălţimea conţinutului său.

Pe lîngă unele lipsuri de ordin tehnic — numeroase greşeli de tipar neintroduse în erată, care la rîndul ei necesită o «erată a eratei» — traducerea este lipsită de omogenitate în ceea ce priveşte folosirea termenilor ştiinţifici şi stilul. Astfel putem găsi termenul «elemente transuraniene» alături de «elemente transuranice», în unele locuri găsim «captează», în altele «capturează», uneori «energii foarte mari», alte ori «energii supraînalte».

De asemenea găsim fraze traduse cu sens deformat, sau total lipsite de sens, cum ar fi de exemplu: «... cele mai mari numere de izotopi»*) sau «... coeficienţii care permit trecerea de la o unitate de energie (de exemplu MeV) la alte unităţi atomice de masă (ergi, grame, etc.**) sau «... cea mai recomandabilă proprietate a pozitronului»***) şi altele.

Sîntem convinşi că a doua ediţie a acestui volum va fi lipsită de asemenea greşeli, inadmisibile la o carte de nivelul şi importanţa *Fizicii atomice* a lui Spolski.

Alper Sighard

*) p. 274.
**) p. 298.
***) p. 433.

ABONAMENTELE SE FAC LA OFICIILE POŞTALE,
PRIN FACTORII POŞTALI ŞI DIFUZORII VOLUNTARI
DIN ÎNTREPRINDERI ŞI INSTITUŢII

ÎNTREPRINDEREA
POLIGRAFICĂ nr. 4
BUCUREŞTI

C. 307

Preţul Lei 5

Müller. K. F 979

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE FIZICĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI DE FIZICĂ

2

ANUL VI

APRILIE—IUNIE 1955

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE FIZICĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI DE FIZICĂ

2

ANUL VI

APRILIE—IUNIE 1955

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACȚIE

Academician HORIA HULUBEI ; T. TĂNĂSESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R. ; GH. ATANASIU, membru corespondent al Academiei R.P.R. ; A. GELBERG ; M. GIURGEA ; D. BALLY. V. NOVACU, membru corespondent al Academiei R.P.R. — *redactor responsabil.*

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE FIZICĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI DE FIZICĂ

Tomul VI, nr. 2 Aprilie-mai-iunie 1955

SUMAR

Pag.

ŞERBAN ŢIŢEICA, Asupra aplicaţiilor formulării cvadridimensionale în mecanica clasică 149

GH. ATANASIU, T. NEŞTIANU şi D. ZUGRĂVESCU, Cercetări de magnetism terestru în regiunea Cluj, în anii 1953—1954 (valea Mureşului, valea Arieşului, valea Someşului) 159

VALER NOVACU, Asupra bazelor clasice ale teoriei particulelor elementare.. 171

I. TEODORESCU, O metodă de determinare a variaţiilor mici de impedanţă.. 217

E. FRIEDLÄNDER, C. IUSSIM şi M. MAYER, Studiul experimental al componentei nuclear active a radiaţiei cosmice la energii de $\sim$ 25 GeV. Nota I. Măsurători asupra jerbelor electrono-nucleare cu $\xi > 10$ GeV. 229

E. FRIEDLÄNDER, Studiul experimental al componentei nuclear active a radiaţiei cosmice la energii de $\sim$ 25 GeV. Nota II. Despre studiul interacţiunii particulelor cosmice de mare energie cu nucleele din atmosferă prin metoda de compensaţie 237

M. RĂDULESCU, Introducere în studiul cîmpului electromagnetic alternativ în metoda de prospecţiune Turam 245

M. NACHMAN şi A. GEORGESCU, O metodă de inducţie pentru măsurarea intensităţii cîmpului magnetic 293

MARIUS BORNEAS şi ERVIN KALMAN, Un nou aspect al mişcărilor particulelor 299

MIRCEA HEROVANU, Caracterizarea optică a aerosolului atmosferic..... 309

AL. GRIGORIU şi GH. GIURGEA, Formarea şi disiparea norilor şi ceţii prin variaţia bruscă a razei picăturilor 319

MARIETA NICOLAE, Influenţa vaporilor de mercur asupra emulsiilor fotografice groase 339

C. BERCEA, Contribuţii la problema naturii particulelor care generează « stele » în emulsii nucleare 343

V. SERGIESCU, Asupra stărilor de suprafaţă ale dielectricilor cristalini..... 349

NOTE 369

ACTUALITĂŢI ŞI DISCUŢII ÎN FIZICĂ 383

ACTIVITATEA INSTITUTULUI DE FIZICĂ 401

RECENZII 403

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE PHYSIQUE

ÉTUDES ET RECHERCHES DE PHYSIQUE

Tome VI, nº 2 Avril-mai-juin 1955

SOMMAIRE

Page

ŞERBAN ŢIŢEICA, Sur les applications de la formulation quadridimensionnelle en mécanique classique 149

GH. ATANASIU, T. NEŞTIANU et D. ZUGRĂVESCU, Recherches de magnetisme terrestre dans la région de Cluj en 1953—1954, (vallées du Mureş, de l'Arieş et du Someş) 159

VALER NOVACU, Des bases classiques de la théorie des particules élémentaires. 171

I. TEODORESCU, Une méthode de détermination des faibles variations d'impédance 217

E. FRIEDLÄNDER, C. IUSSIM and M. MAYER, Experimental Study of the *N* Component of Cosmic Rays at Energies of $\sim$ 25 Ge V. I. Measurements on Electron-Nuclear Showers at Energies above 10 GeV ... 229

E. FRIEDLÄNDER, Experimental Study of the *N* Component of Cosmic Rays at Energies of $\sim$ 25 GeV. II. Concerning the Study, by the Compensation Method, of the Interactions of High Energy Cosmic-Ray Particles with Nuclei in the Atmosphere 237

M. RĂDULESCU, Introduction à l'étude du champ électromagnétique alternatif dans la méthode de prospection Turam 245

M. NACHMAN et A. GEORGESCU, Une méthode d'induction pour mesurer l'intensité du champ magnétique 293

M. BORNEAS et ERVIN KALMAN, Un nouvel aspect du mouvement des particules..... 299

MIRCEA HEROVANU, Caractérisation optique de l'aérosol atmosphérique.. 309

AL. GRIGORIU et G. GIURGEA, La formation et la dissipation des nuages et du brouillard par variation brusque du rayon des gouttes..... 319

MARIETA NICOLAE, L'influence des vapeurs de Hg sur la sensibilité des émulsions photographiques épaisses 339

C. BERCEA, Contribution au problème de la nature des particules qui génèrent des « étoiles » dans des émulsions nucléaires 343

V. SERGIESCU, Sur les états de surface des diélectriques cristallins..... 349

NOTES 369

ACTUALITÉS ET DISCUSSIONS DE PHYSIQUE 383

L'ACTIVITÉ DE L'INSTITUT DE PHYSIQUE 401

COMPTES RENDUS 403

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ФИЗИКЕ

Том VI, № 2 Апрель-май-июнь 1955

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Ш. ЦИЦЕЙКА, О применениях четырехмерной формулировки в классической механике	149
Г. АТАНАСИУ, Т. НЕШТИАНУ и Д. ЗУГРАВЕСКУ, Исследования земного магнетизма в области Клужа в 1953 и 1954 гг. (Валя Мурешулуй, Валя Ариешулуй, Валя Сомешулуй)	159
В. НОВАКУ, О классических основах теории элементарных частиц	171
И. ТЕОДОРЕСКУ, Метод определения малых изменений полного сопротивления	217
Е. ФРИДЛЕНДЕР, К. ЮССИМ и М. МАЙЕР, Экспериментальное изучение ядерно-активной компоненты космических лучей при энергиях $\sim$ 25 GeV. Сообщение I. Исследование электронно-ядерных ливней с $\epsilon > 10$ GeV	229
Е. ФРИДЛЕНДЕР, Экспериментальное изучение ядерно-активной компоненты космических лучей при энергиях $\sim$ 25 GeV. Сообщение II. Исследование взаимодействия космических частиц большой энергии с ядрами атмосферы компенсационным методом	237
М. РЭДУЛЕСКУ, Исследование переменного электромагнитного поля методом электромагнитной разведки Турама	245
М. НАХМАН и А. ДЖОРЖЕСКУ, Индукционный метод измерения напряженности магнитного поля	293
И. БОРНЕАС и Э. КАЛЬМАН, Новый аспект движения частиц	299
М. ГЕРОВАНУ, Оптическая характеристика атмосферного аэрозоля	309
А. ГРИГОРИУ и Г. ДЖУРДЖА, Образование и рассеивание облаков и тумана вследствие внезапных изменений радиуса капель	319
М. НИКОЛАЕ, Влияние паров ртути на толстослойные фотоэмульсии	339
К. БЕРЧА, К вопросу о природе частиц, генерирующих «звезды» в ядерных эмульсиях	343
В. СЕРДЖИЕСКУ, О поверхностных состояниях кристаллических диэлектриков	349
ЗАМЕТКИ	369
ДИСКУССИИ И ОБСУЖДЕНИЯ	383
В ИНСТИТУТЕ ФИЗИКИ	401
РЕЦЕНЗИИ	403

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

STUDII ŞI CERCETĂRI DE FIZICĂ
Tomul VI, nr. 2, 1955

ASUPRA APLICAŢIILOR FORMULĂRII CVADRIDIMENSIONALE ÎN MECANICA CLASICĂ *)

DE

ŞERBAN ŢIŢEICA

INTRODUCERE

Problema masei şi a energiei în fizica clasică poate fi privită din mai multe puncte de vedere. Vom enumera pe scurt cîteva dintre ele, care fiecare prezintă interesul său, dar care nu vor fi adoptate în expunerea care urmează, pentru a preciza apoi pe acela care stă la baza acestei expuneri.

Este fără îndoială interesant să se urmărească evoluţia istorică a celor două noţiuni, pentru a pune în evidenţă procesul de clarificare treptată, pe care ele l-au suferit. O expunere a problemei din acest punct de vedere ar cere însă cunoştinţe adînci de istoria ştiinţei şi din această cauză depăşeşte competinţa referentului.

Un alt punct de vedere interesant ar fi acela de a găsi procedeul metodologic cel mai potrivit pentru a expune unor începători problematica legată de aceste noţiuni. Procedeul ar trebui să fie în acelaşi timp suficient de elementar pentru a fi accesibil unor începători, dar suficient de riguros pentru a-i feri de greşelile care se fac încă, cum sînt de exemplu confuzia dintre masă şi greutate, sau aceea de a considera lucrul mecanic ca « o formă de energie », confuzie care este destul de răspîndită, chiar în multe manuale.

Am considerat totuşi că o discuţie dusă în sînul Academiei trebuie să depăşească acest nivel elementar, şi să adîncească mai mult problema, din punct de vedere ştiinţific. Cum tema discuţiei este aceea de a preciza semnificaţia progreselor aduse de teoria relativităţii în problema masei, a energiei şi a relaţiei dintre ele, cred că expunerea situaţiei acestei probleme în fizica clasică trebuie astfel făcută, încît comparaţia cu situaţia din teoria relativităţii să fie cît mai uşoară. Nu trebuie să uităm că teoria relativităţii nu îşi trage numele din principiul relativităţii pe care-l foloseşte, ci din relativizarea unor mărimi, care în fizica clasică au un caracter absolut. Într-adevăr, şi fizica clasică cunoaşte un principiu al relativităţii, care are o formulare identică cu cel din fizica relativistă, şi anume: *legile fizicii nu depind de alegerea unui sistem de referinţă, dacă acest sistem face parte din familia sistemelor de referinţă inerţiale*; *două*

*) Lucrare prezentată Institutului de fizică la data de 12 noiembrie 1954.

sisteme de referinţă din această familie au unul faţă de celălalt o mişcare de translaţie rectilinie şi uniformă. De asemenea, în fizica clasică, exact ca şi în fizica relativistă, caracterizarea unui « eveniment » trebuie făcută precizînd poziţia spaţială şi momentul în care se petrece acest eveniment, prin urmare mulţimea evenimentelor alcătuieşte în ambele cazuri o varietate cu patru dimensiuni, pe care o vom denumi cu termenul de « univers », consacrat în teoria relativităţii. Ceea ce deosebeşte cele două teorii este în fond faptul că fizica clasică admite posibilitatea unor semnale avînd o viteză de propagare arbitrar de mare, pe cînd fizica relativistă postulează existenţa unei margini superioare pentru viteza de propagare a oricărui semnal. De aici rezultă deosebiri esenţiale între cele două teorii în legătura dintre reperarea unui eveniment faţă de două sisteme inerţiale distincte. În teoria clasică, aceâstă legătură este dată de aşa-numita transformare a lui Galileu, pe cînd în teoria relativităţii ea este dată de transformarea lui Lorentz. Pentru a sublinia analogiile şi deosebirile dintre cele două teorii, în cele ce urmează vom folosi termenul de « relativitate galileană » în loc de cel de « fizica clasică », iar termenul de « relativitate lorentziană » în loc de cel de « teoria relativităţii ».

UNIVERSUL RELATIVITĂŢII GALILEENE

Vom expune deci problema masei şi a energiei în relativitatea galileană, postulînd că legătura dintre coordonatele de univers t, x, y, z şi t', x', y' z' ale unui eveniment oarecare, raportat la două sisteme de referinţă inerţiale S şi S' oarecare este dată de transformarea lui Galileu

$$\left.\begin{aligned} t' &= t + t_0, \\ x' &= \alpha_{xx}\, x + \alpha_{xy}\, y + \alpha_{xz}\, z + \beta_x\, t + x_0, \\ y' &= \alpha_{yx}\, x + \alpha_{yy}\, y + \alpha_{yz}\, z + \beta_y\, t + y_0, \\ z' &= \alpha_{zx}\, x + \alpha_{zy}\, y + \alpha_{zz}\, z + \beta_z\, t + z_0, \end{aligned}\right\} \qquad (G)$$

unde constantele t_0, x_0, y_0, z_0 exprimă posibilitatea unei schimbări a originii, coeficienţii $\alpha_{r,s}$ $(r, s = x, y, z)$ sînt elementele unei matrice ortogonale, prin care se ţine seama de o eventuală schimbare a direcţiei axelor, iar coeficienţii β_x, β_y, β_z, sînt componentele vitezei de translaţie a sistemului S faţă de S'. Mai observăm că relaţiile (G) reprezintă o adevărată schimbare de variabile, deoarece pot fi rezolvate faţă de variabilele t, x, y, z, că aceste transformări sînt liniare şi că totalitatea acestor transformări formează un grup, denumit grupul lui Galileu.

Pentru a înlesni comparaţia cu situaţia din relativitatea lorentziană, este bine să comparăm transformarea lui Galileu (G) cu transformarea lui Lorentz

$$\left.\begin{aligned} t' &= \alpha_{tt}\, t + \alpha_{tx}\, x + \alpha_{ty}\, t\, y + \alpha_{tz}\, z + t_0, \\ x' &= \alpha_{xt}\, t + \alpha_{xx}\, x + \alpha_{xy}\, y + \alpha_{xz}\, z + x_0, \\ y' &= \alpha_{yt}\, t + \alpha_{yx}\, x + \alpha_{yy}\, y + \alpha_{yz}\, z + y_0, \\ z' &= \alpha_{zt}\, t + \alpha_{zx}\, x + \alpha_{zy}\, y + \alpha_{zz}\, z + z_0, \end{aligned}\right\} \qquad (L)$$

unde coeficienții $\alpha_{\rho,\sigma}$ ($\rho\,\sigma = t, x, y, z$) satisfac cunoscutele relații

$$\sum_{r=x,y,z} \alpha_{rp}\,\alpha_{rq} - c^2 \cdot \alpha_{tp}\,\alpha_{tq} = \delta_{pq}\,, \qquad (p, q = x, y, z)$$

$$\sum_{r\times x,y,z} \alpha_{rp}\,\alpha_{rt} - c^2\,\alpha_{tp}\,\alpha_{tt} = 0, \qquad (p = x, y, z)$$

$$\alpha_{tt}^2 - \frac{1}{c^2} \sum_{r=x,y,z} \alpha_{rt}^2 = 1\,,$$

c fiind viteza luminii, considerată ca marginea superioară a vitezei de propagare a oricărui semnal. Se știe că transformarea (L) tinde către transformarea (G) atunci cînd $c \to \infty$. Acest proces pur matematic nu are însă sens fizic, deoarece viteza luminii este o mărime fixă. Fizicește trebuie să spunem că transformarea lui Galileu reprezintă o aproximație bună a transformării lui Lorentz, atunci cînd vitezele care intervin în problemă sînt mici față de viteza luminii c.

Conform terminologiei uzuale, evenimentele, adică punctele din univers, sînt obiecte geometrice, dar nu sînt mărimi geometrice. Cea mai simplă mărime geometrică este vectorul de univers, sau cvadrivectorul; reprezentantul cel mai simplu al unui cvadrivector este segmentul orientat care are ca origine și extremitate două evenimente date. Pentru cele ce urmează este suficient să examinăm cazul în care aceste evenimente sînt infinit vecine. Atunci cvadrivectorul respectiv este definit față de sistemul de referință inerțial S prin componentele sale dt, dx, dy, dz. Componentele dt', dx', dy', dz' față de sistemul S' se pot deduce atunci prin formulele liniare și omogene

$$\left.\begin{aligned} dt' &= dt \\ dx' &= \alpha_{xx}\,dx + \alpha_{xy}\,dy + \alpha_{xz}\,dz + \beta_x\,dt\,, \\ dy' &= \alpha_{yx}\,dx + \alpha_{yy}\,dy + \alpha_{yz}\,dz + \beta_y\,dt\,, \\ dz' &= \alpha_{zx}\,dx + \alpha_{zy}\,dy + \alpha_{zz}\,dz + \beta_z\,dt\,. \end{aligned}\right\} \qquad (G')$$

Acest cvadrivector este fundamental pentru dinamica punctului (la care ne vom mărgini în cele ce urmează, pentru a nu complica expunerea).

Vom numi de asemenea « cvadrivector contravariant » orice mărime definită față de sistemul S prin patru componente a_t, a_x, a_y, a_z care se transformă la schimbarea sistemului de referință prin relații de aceeași formă (G'). Observăm, că componenta « temporală » a_t a oricărui cvadrivector contravariant este o mărime invariantă la schimbarea sistemului de referință; în special, dacă această mărime este nulă într-un anumit sistem de referință, ea este nulă în orice alt sistem. Vom spune că un vector pentru care $a_t = 0$ este un vector pur spațial.

Spre deosebire de relativitatea galileană, în relativitatea lorentziană componenta temporală a unui cvadrivector nu este invariantă. În schimb, în relativitatea lorentziană, orice cvadrivector contravariant admite invariantul pătratic

$$a_x^2, + a_y^2, + a_z^2, - c^2 a_t^2\,. \qquad (I)$$

Consecința existenței acestui invariant este de o importanță covîrșitoare. Într-adevăr, cu ajutorul lui se poate trece imediat la componentele covariante ale cvadrivectorului a

$$-c^2\,a_t,\ a_x,\ a_y,\ a_z$$

care la o transformare Lorentz suferă transformarea contragradientă transformării (L′) analoge cu (G′). Această posibilitate nu există în relativitatea galileană. Un cvadrivector galilean covariant, avînd componentele A_t, A_x, A_y, A_z este definit prin aceea că expresia

$$A_t\, a_t + A_x\, a_x + A_y\, a_y + A_z\, a_z \qquad (1)$$

este invariantă oricare ar fi cvadrivectorul contravariant a_t, a_x, a_y, a_z. Legea de transformare a componentelor cvadrivectorului covariant, adică transformarea contragradientă lui (G′) are forma

$$A'_t = A_t - \sum_{r,s=x,y,z} \beta_r\, \alpha_{rs}\, A_s\,,$$

$$A'_r = \sum_{s=x,y,z} \alpha_{rs}\, A_s\,, \quad (r = x,\ y,\ z).$$

În general, în relativitatea galileană este imposibil de a vorbi de componentele covariante ale unui cvadrivector contravariant dat şi reciproc.

CINEMATICA PUNCTULUI MATERIAL

Odată precizat punctul de plecare, putem trece la studiul cinematicii şi dinamicii punctului în relativitatea galileană. Pornind de la cvadrivectoru contravariant fundamental « durată-deplasare »

$$\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}x,\ \mathrm{d}y,\ \mathrm{d}z \qquad (\text{« durată-deplasare »}), \quad (2)$$

obţinem, prin împărţire cu invariantul $\mathrm{d}t$, un nou cvadrivector contravariant, cvadrivectorul « unu-viteză »

$$1, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \qquad (\text{« unu-viteză »}). \quad (3)$$

Faptul că acest vector are componenta temporală diferită de zero atrage după sine faptul că viteza este o mărime relativă. Relaţia de transformare pentru acest cvadrivector se reduce, în afară de identitatea banală $1 = 1$ a componentelor temporale, la cunoscuta lege de compunere: viteza relativă este egală cu viteza absolută minus viteza de transport.

Prin diferenţierea cvadrivectorului unu-viteză şi împărţire cu invariantul $\mathrm{d}t$ se obţine cvadrivectorul contravariant « zero-acceleraţie »

$$0, \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} \qquad (\text{« zero-acceleraţie »}). \quad (4)$$

Anularea componentei temporale, deci faptul că acceleraţia este un vector pur spaţial, are drept consecinţă caracterul invariant al acestei mărimi faţă de sistemele inerţiale.

DINAMICA PUNCTULUI. MASA ŞI IMPULSUL

Din punct de vedere dinamic, mărimea fundamentală este vectorul impuls. Cu altă ocazie am încercat să arăt că această mărime poate fi definită direct şi caracterizată într-un anumit sistem de referinţă prin următoarele proprietăţi:

1) Componentele spațiale ale impulsului sînt proporționale cu componentele vitezei punctului.

2) Rezultanta impulsurilor unui sistem de puncte în interacțiune este un vector constant.

Conform postulatului fundamental de la care am pornit, aceste legi trebuie să fie invariante față de schimbarea sistemului de referință. Admitem deci că, componentele spațiale p_x, p_y, p_z ale impulsului trebuie completate cu o componentă temporală p_t, care *a priori* ar putea fi nulă. De asemenea, relația de proporționalitate

$$\frac{dx}{p_x} = \frac{dy}{p_y} = \frac{dz}{p_z}, \tag{5}$$

obligator trebuie să fie completată cvadridimensional pentru ca postulatul relativității să fie satisfăcut

$$\frac{dt}{p_t} = \frac{dx}{p_x} = \frac{dy}{p_y} = \frac{dx}{p_z}. \tag{5'}$$

Cvadrivectorul de componente p_t, p_x, p_y, p_z trebuie să fie contravariant deoarece dx, dy, dz nu poate fi completat pentru a forma un cvadrivector covariant.

Din (5) rezultă imediat

$$p_x = p_t \frac{dx}{dt}, \quad p_y = p_t \frac{dy}{dt}, \quad p_z = p_t \frac{dz}{dt}, \tag{6}$$

sau, scris tridimensional

$$\vec{p} = p_t \cdot \vec{v}.$$

Acest rezultat fundamental ne dă imediat semnificația fizică a componentei p_t; ea este masa punctului material.

Prin urmare:

În relativitatea galileană (sau, cu alte cuvinte, în fizica clasică), masa unui punct material este componenta temporală a unui cvadrivector contravariant ale cărui componente spațiale definesc impulsul punctului.

Această afirmație rămîne perfect valabilă și în relativitatea lorentziană, deoarece și în această teorie singurul mod invariant de a întregi cvadridimensional relațiile (5) este dat de relațiile (5'). Avem însă în acest caz o posibilitate în plus, care lipsește în relativitatea galileană, anume aceea de a trece la componentele covariante.

În concluzie:

a) Mărimea fundamentală a dinamicii punctului este cvadrivectorul contravariant « masă-impuls ».

$$m\,(=p_t),\ p_x,\ p_y,\ p_z \qquad (\text{« masă-impuls »}).$$

b) Componenta temporală a acestui cvadrivector, masa, este independentă de sistemul de referință, adică este un invariant.

c) Din valabilitatea legii conservării impulsului la interacţia dintre mai multe puncte materiale şi din postulatul relativităţii rezultă legea de conservare pentru masa totală a sistemului

$$\sum m_i = \sum m'_i$$

unde m_i sînt masele punctelor înainte de interacţiune, iar m' masele după interacţiune.

Relativitatea lorentziană nu schimbă decît a doua concluzie, masa devenind o mărime relativă care depinde de alegerea sistemului de referinţă. În schimb apare invariantul pătratic

$$m^2 - \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{c^2}$$

denumit « pătratul masei de repaus ».

De obicei, în relativitatea lorentziană se vorbeşte de cvadrivectorul energie-impuls, şi nu despre cvadrivectorul masă-impuls. Acest mod de a vorbi nu ar trebui folosit de cei care nu admit că masa şi energia sînt mărimi care exprimă aceleaşi proprietăţi fizice.

În general, atunci cînd se face dinamica punctului material, nu se obişnuieşte să se introducă în sistem toate punctele cu care punctul considerat este în interacţiune, ci influenţa celorlalte puncte este ţinută în seamă global prin introducerea unei mărimi noi, numită forţă. Ecuaţiile de mişcare se scriu atunci tridimensional

$$\frac{dp_x}{dt} = F_x, \quad \frac{dp_y}{dt} = F_y, \quad \frac{dp_z}{dt} = F_z. \tag{7}$$

Aceste ecuaţii trebuie completate cvadridimensional pentru a satisface cerinţelor postulatului relativităţii. Completarea obişnuită este următoarea

$$\frac{dp_t}{dt} = \frac{dm}{dt} = 0, \quad \frac{dp_x}{dt} = F_x, \quad \frac{dp_y}{dt} = F_y, \quad \frac{dp_z}{dt} = F_z. \tag{7'}$$

Acest mod de a completa ecuaţiile nu este însă valabil decît dacă punctul este izolat în mod special de lumea înconjurătoare. În lipsa unui termen mai potrivit, vom spune că punctul este «izolat masic» de lumea înconjurătoare. Astăzi, cînd propulsia prin reacţie joacă un rol atît de important în tehnică, nu mai avem dreptul să considerăm acest caz ca fiind singurul interesant. Dacă punctul nu este izolat masic, ecuaţiile de mişcare trebuie scrise

$$\frac{dm}{dt} = F_t, \quad \frac{dp_x}{dt} = F_x, \quad \frac{dp_y}{dt} = F_y, \quad \frac{dp_z}{dt} = F_z. \tag{7''}$$

Deosebirea dintre ecuaţiile (7') şi (7'') este esenţială. În primul caz, acel al izolării masice, cvadrivectorul contravariant « forţă » are componenta temporală nulă; el este un vector pur spaţial care are o semnificaţie absolută. În al doilea caz, componenta temporală fiind diferită de zero, forţa nu mai are semnificaţie

absolută, ci numai componenta temporală rămîne invariantă. Legea de transformare a cvadrivectorului este atunci

$$F'_t = F_t$$
$$F'_r = \sum_{s=x,y,z} \alpha_{rs} F_s + \beta_r F_t , \qquad (r = x, y, z). \tag{8}$$

Se știe că problemele mișcării unor puncte cu masă variabilă prezintă dificultăți nu numai pentru începători, dar chiar cei experimentați în mecanică fac uneori greșeli. Aceste greșeli se datoresc în general faptului că, din obișnuința căpătată în cazul punctului izolat masic, nu se ține seama de termeni cu F_t în ecuațiile de transformare (8). Este interesant de văzut ce simplificări aduce în această problemă scrierea cvadridimensională și folosirea sistematică a postulatului relativității. Totuși urmărirea acestei linii ne-ar conduce prea departe de tema discuției, așa încît în cele ce urmează ne vom mărgini la studiul cazului obișnuit al punctului izolat masic. În acest caz legea de transformare (8) se reduce la

$$0 = 0$$
$$F'_r = \sum \alpha_{rs} F_s \tag{8'}$$

ENERGIA

Pînă acum nu am întîlnit în expunerea noastră nici un cvadrivector covariant. Acești vectori nu sînt *indispensabili* pentru dezvoltarea mecanicii. Totuși este interesant de văzut, dacă nu este posibil de a construi un astfel de cvadrivector, avînd semnificație fizică simplă. Legea de transformare (Γ') a acestor vectori ne arată că componentele lor spațiale se transformă între ele, printr-o transformare ortogonală, deci suferă aceeași transformare (8') ca și componentele forței. Este deci de bănuit că vom putea obține un cvadrivector covariant completînd vectorul spațial « forță », printr-o componentă temporală $\mathcal{F}_t$ convenabil aleasă. Prima relație (Γ') ne arată că dimensiunile acestei componente trebuie să fie acelea ale unui produs dintre forță și viteză. Se vede atunci imediat că mărimea $-\vec{F} \cdot \vec{v}$ are proprietățile dorite

$$-\vec{F}' \cdot \vec{v}' = -\vec{F} \cdot \vec{v} - \sum_{r,s=x,y,z} \beta_r \alpha_{rs} F_s .$$

Această relație, împreună cu a doua relație (8') spune că mărimea avînd componentele

$$\vec{\mathcal{F}}_t = -\vec{F} \cdot v$$
$$\mathcal{F}_x = F_x$$
$$\mathcal{F}_y = F_y \qquad \text{(« putere-forță »)} \tag{9}$$
$$\mathcal{F}_z = F_z$$

este un cvadrivector covariant. Vom numi acest cvadrivector «cvadrivectorul putere-forță ». Acest cvadrivector prezintă deosebită importanță pentru aplicații, ca și cvadrivectorii care rezultă din el prin anumite operații simple. În special, dacă înmulțim componentele acestui cvadrivector cu invariantul dt și integrăm

de-a lungul unei porţiuni oarecare a mişcării punctului, obţinem cvadrivectorul covariant « lucru mecanic-percusie ».

$$-\int \vec{F} \cdot \vec{ds}, \int F_x \, dt, \int F_y \, dt, \int F_z \, dt \quad (\text{« lucru mecanic-percusie »}) \quad (10)$$

Componentele acestui cvadrivector pot fi calculate imediat prin aplicarea legilor dinamicii. Componentele spaţiale dau creşterile componentelor spaţiale ale impulsului, iar componenta temporală dă (pînă la semn) creşterea *energiei cinetice* a punctului

$$-\Delta \frac{mv^2}{2}, \ \Delta p_x, \ \Delta p_y, \ \Delta p_z.$$

Aceste patru mărimi sînt şi ele componentele unui cvadrivector covariant. Am fi tentaţi să alegem ca limită inferioară a integrării un moment în care punctul se găsea în repaus, şi să spunem că mărimea « energie-impuls », de componente

$$-W = \left(-\frac{mv^2}{2}\right), \ p_x, \ p_y, \ p_z. \quad (11)$$

constituie un cvadrivector covariant. Acest lucru este însă imposibil, deoarece repausul este o noţiune relativă; cele patru mărimi (11) nu sînt componentele unui cvadrivector covariant.

De asemenea, mărimea biliniară

$$p_x \, dx + p_y \, dy + p_z \, dz - W \, dt \quad (12)$$

nu este un invariant, ci numai mărimea

$$\Delta p_x \cdot dx + \Delta p_y \, dy + \Delta p_z \, dz - \Delta W \cdot dt. \quad (12')$$

Totuşi, mărimea (12) formează un « cvasi-invariant », în sensul că la trecerea la un nou sistem de referinţă i se adaugă o diferenţială totală exactă în dx, dy, dz, dt.

De aici rezultă că integrala pe o curbă închisă

$$\oint p_x \, dx + p_y \, dy + p_z \, dz - W \, dt$$

este un invariant. Această proprietate joacă un rol important în mecanica analitică.

În concluzie, în fizica clasică (adică în relativitatea galileană) masa şi energia sînt două mărimi complet distincte. Ambele sînt legate de impuls, constituind componenta temporală a unui vector contravariant, respectiv a unui cvasi-vector covariant. Deoarece nu există o corespondenţă liniară între cele două tipuri de vectori, nu există relaţie directă între cele două mărimi.

CONCLUZIE. COMPARAŢIA CU RELATIVITATEA LORENTZIANĂ

Alta este însă situaţia în relativitatea lorentziană. Datorită existenţei invariantului pătratic (I), avem posibilitatea de a stabili o corespondenţă liniară între vectorii covarianţi şi contravarianţi. Ba chiar se spune că unul şi acelaşi vector are anumite componente covariante şi anumite componente contravariante. În special cvadrivectorul ale cărui componente spaţiale sînt

componentele impulsului, poate fi întregit cvadri-dimensional în două moduri absolut echivalente: fie dînd componentele contravariante

$$m,\ p_x,\ p_y,\ p_z, \qquad \text{(masă-impuls)}$$

fie cele covariante

$$-W = -mc^2,\ p_x,\ p_y,\ p_z, \qquad \text{(energie-impuls)}.$$

Relaţia celebră dintre masă şi energie rezultă imediat

$$W = mc^2.$$

Privind deci situaţia din acest punct de vedere, rezultă clar că în relativitatea lorentziană masa şi energia sînt numai două moduri diferite de a exprima aceleaşi proprietăţi fizice ale unui sistem.

О ПРИМЕНЕНИЯХ ЧЕТЫРЕХМЕРНОЙ ФОРМУЛИРОВКИ В КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Для облегчения сравнения с теорией вероятности законов классической физики, связанных с механикой точки, эти последние выражаются в виде четырехмерной формы инвариантной относительно группы преобразований Галилея. При такой формулировке становится очевидным, что некоторые инвариантные величины классической механики представляют собой ничто иное как временные компоненты каких-либо квадривекторов. Результатом, имеющим наибольшее значение, является доказательство, что для того чтобы стать контрвариантным квадривектором трехмерный импульс может быть дополнен одним лишь способом, что соответствующая временная компонента представляет собой массу точки, а закон сохранения массы является четырехмерным дополнением закона сохранения импульса. Равным образом представляется возможность ввести имеющий практическое значение ковариантный квадривектор, имеющий в качестве пространственных компонент возрастание импульса, а в качестве временной компоненты возрастание кинетической энергии. Так как в классической механике не представляется возможным установить инвариантного соответствия между ковариантными и контрвариантными векторами, то между массой и энергией не существует никакого прямого соотношения. Известное в теории относительности соотношение является следствием существования основного метрического тензора.

SUR LES APPLICATIONS DE LA FORMULATION QUADRIDIMENSIONNELLE EN MÉCANIQUE CLASSIQUE

(RÉSUMÉ)

Pour faciliter la comparaison entre les lois de la mécanique du point, de la physique classique, avec celles de la théorie de la relativité, les lois de la mécanique classique sont écrites sous forme quadridimensionnelle, invariante

par rapport au groupe de transformations de Galilée. Il est donc évident que certaines grandeurs invariantes de la mécanique classique ne sont que des composantes temporelles de certains quadrivecteurs. Le résultat le plus important consiste à acquérir la preuve que l'impulsion tridimensionnelle peut être complétée d'une seule manière pour devenir un quadrivecteur contrevariant; la composante temporelle respective est la masse du point, tandis que la loi de conservation de la masse est le complément quadridimensionnel de la loi de conservation de l'impulsion. Il est également possible d'introduire un quadrivecteur covariant d'importance pratique ayant pour composantes spatiales l'augmentation de l'impulsion et pour composante temporelle l'augmentation de l'énergie cinétique.

Etant donné que dans la mécanique classique, on ne peut établir de correspondance invariante entre les vecteurs covariants et contrevariants, il n'existe nulle relation directe entre la masse et l'énergie. La relation bien connue de la théorie de la relativité est une conséquence de l'existence d'un tenseur métrique fondamental.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE FIZICĂ
Tomul VI, nr. 2, 1955

CERCETĂRI DE MAGNETISM TERESTRU ÎN REGIUNEA CLUJ, ÎN ANII 1953—1954

(valea Mureşului, valea Arieşului, valea Someşului) *)

DE

GH. ATANASIU
MEMBRU CORESPONDENT AL ACADEMIEI R.P.R.
T. NEŞTIANU şi D. ZUGRĂVESCU

1. Introducere

Continuînd şi în anul 1953 lucrările de magnetism terestru în Ardeal [1], [2], am făcut măsuri magnetice absolute şi profile de variometru magnetic vertical, pe valea Mureşului de la Aiud pînă la Tg. Mureş, iar pe valea Arieşului de la Gura Arieşului pînă la Bistra şi pe unele văi şi drumuri laterale.

In cursul anului 1954, am făcut măsuri magnetice absolute în jurul Clujului şi mai ales profile de variometru vertical între staţiunile absolute şi radiind în diferite direcţii, plecînd de la Cluj.

In anul 1953, s-au măsurat cu variometrul magnetic vertical toate staţiunile absolute ale reţelei noastre de pe traseul Bucureşti — Cluj. In 1954, aceleaşi staţiuni au fost măsurate cu variometrul vertical şi orizontal. Aceste măsuri s-au făcut în scopul realizării transportului valorilor absolute Z şi H, cu ajutorul variometrelor, pe un profil de lung parcurs.

2. Metoda de lucru, aparatele utilizate şi funcţionarea lor

Metoda de lucru a fost cea indicată în lucrările anterioare. Aparatele de măsuri absolute au fost aceleaşi, cu deosebire că la măsura înclinaţiei, galvanometrul cu coardă Edelmann, defectat, a fost înlocuit cu un galvanometru cu cadru mobil, model S H, cu scală luminată aşezată în cutia aparatului.

Sensibilitatea acestui galvanometru este de 10^{-8} A/div. scală. Cu circuitul închis pe rezistenţa mică a inductorului terestru, cadrul galvanometrului are o inerţie de mişcare care face ca citirea poziţiei de zero să fie mai grea ca la galvanometrul Edelmann. Socotim totuşi că eroarea făcută asupra lui I nu depăşeşte $\pm 1'$.

Eroarea cu care s-a măsurat componenta orizontală este de ordinul de mărime $\pm 25 - 30\ \gamma$.

---

*) Lucrare prezentată Institutului de fizică la data de 30 ianuarie 1955.

Profilele de variometru magnetic au fost ridicate, în anul 1953, cu un variometru magnetic vertical, model Fanselau, cu magnetul suspendat pe fir de torsiune (aparat utilizat şi în campania din 1952). In campania din anul 1954 am utilizat două variometre magnetice (vertical şi orizontal), cu magneţii oscilînd pe cuţite şi umeri de cuarţ, model Askania. Aceste variometre au funcţionat în foarte bune condiţii, păstrîndu-şi timp îndelungat poziţia de zero neschimbată. Ele au fost etalonate cu ajutorul bobinelor Helmholtz, la începutul campaniei, la Observatorul magnetic Surlari-Căldăruşani, apoi pe teren şi, de asemenea, la sfîrşitul campaniei. Sensibilitatea lor s-a menţinut constantă; ea a fost de 10,30 γ/div. pentru variometrul vertical Fanselau, de 10,28 γ/div. pentru variometrul vertical Askania (cuarţ) şi de 10 γ/div. pentru variometrul orizontal Askania (cuarţ).

Corecţiunea variaţiilor diurne s-a făcut cu ajutorul datelor puse la dispoziţia noastră de Observatorul magnetic sus-amintit.

Toate măsurile cu variometrul vertical sînt raportate la mai multe staţiuni de bază care, la rîndul lor, sînt raportate la staţiunile absolute care formează scheletul lucrării. Distanţa dintre staţiile de variometru a fost de 2 — 4 km.

In fiecare profil de variometru, eroarea cu care este dat ΔZ nu depăşeşte $\pm$ 5 γ.

3. Numărul staţiunilor

In cele două campanii din anii 1953 — 1954 s-au făcut măsuri absolute (H şi I) în 9 staţiuni. In alte 3 staţiuni s-a măsurat, din cauză de forţă majoră, numai componenta orizontală. Cunoaşterea lui H şi I, în staţiunile absolute, permite calcularea lui Z şi ca urmare raportarea tuturor măsurilor efectuate cu variometrul vertical, la valori absolute.

Numărul staţiunilor de pe profilele de variometru vertical a fost, în total, de 268. Unele dintre aceste staţiuni, şi anume acelea care au fost luate ca staţiuni de bază, au fost măsurate de multe ori. Astfel staţiunea de bază nr. 1 vest Războieni (1953) a fost măsurată de 30 de ori, staţiunea vest Cluj km 486 (1954) de 16 ori, etc.

In numărul mai sus indicat, nu intră măsurile de variometru făcute în staţiunile absolute de pe traseul Bucureşti — Cluj şi nici repetiţiile.

Profilele principale de variometrul vertical s-au făcut astfel încît să lege staţiunile absolute. O serie de profile secundare s-au făcut însă şi în alte direcţii, pentru a urmări conturul anomaliilor găsite.

4. Coordonarea lucrărilor efectuate în ani diferiţi

Legarea lucrărilor efectuate într-un an, de cele din anii precedenţi, s-a făcut prin intermediul unor staţiuni comune celor două reţele de izogame din ani diferiţi. Astfel reţeaua de izogame din 1952 a fost legată de cea din 1953, prin intermediul staţiunii absolute Teiuş, iar reţeaua din 1953 a fost legată de cea din 1954, prin mijlocirea staţiunii absolute Turda. S-a ţinut seama de variaţia seculară a componentei verticale.

In felul acesta, s-a putut desena o hartă generală a izogamelor componentei verticale, cuprinzînd toate rezultatele obţinute în anii 1952, 1953 şi 1954.

Staţiunea cea mai sudică este Alba-Iulia şi cea mai nordică Dej; cea mai estică Tg. Mureş şi cele mai vestice Bistra şi Ciucea.

Toate staţiunile absolute şi relative, măsurate în anii 1952, 1953 şi 1954, sînt aproximativ cuprinse între paralelele geografice 46° şi 47° latitudine N şi meridianele 23° — 24°30′ E Gr. In această vastă regiune au mai rămas încă multe porţiuni necercetate magnetic, care vor fi explorate într-o campanie viitoare.

Numărul staţiunilor noastre absolute, vechi şi noi, cuprinse în această regiune, este de 25.

Lucrarea efectuată de G. Barta [3], care a măsurat în 1943 componenta orizontală şi înclinaţia într-un număr de 30 de staţiuni din Ardeal, interesează numai partea de nord a regiunii cercetate de noi. In această parte, G. Barta a măsurat pe *H* şi *I* în staţiunile Cluj şi Budeşti (Budatelek), iar în staţiunea Deuş a măsurat numai componenta orizontală. Despre această lucrare a lui G. Barta, vom vorbi mai mult în lucrarea noastră referitoare la măsurătorile absolute.

5. Efectuarea lucrărilor

La lucrările de teren şi birou, făcute cu prilejul acestor cercetări, au mai adus contribuţii ing. P. Suciu şi I. Stratilescu. P. Suciu a luat parte la determinările absolute şi relative pe teren, în perioada 8 — 19 august 1953.

I. Stratilescu, colaboratoare la I. F. A., a lucrat la corecţiunile datelor de variometru din 1954, la calculul staţiunilor absolute din 1953 şi 1954 şi la desenarea izogamelor componentei verticale pentru ambele campanii.

Lucrarea s-a făcut sub auspiciile I. F. A., cu aparatura şi mijloacele materiale puse la dispoziţie de Academia R.P.R. prin Institutul de fizică. Pregătirea ambelor campanii, cît şi prelucrarea datelor obţinute pe teren, s-au făcut în laboratorul de geofizică şi fizică generală al Facultăţii de matematici şi fizică (Universitatea «C. I. Parhon»).

Serviciul de geofizică din cadrul întreprinderii (Prospecţiuni) a Comitetului Geologic, ne-a permis etalonarea aparatelor la Observatorul magnetic, folosirea înregistrărilor Observatorului, cît şi unele documentări bibliografice şi cartografice necesare acestei lucrări.

6. Rezultatele obţinute

1. În cursul campaniei din anul 1953, în lunile iulie şi august s-au realizat următoarele:

a) S-au făcut măsuri de *H* şi *I* în staţiunile absolute: Ocna Mureşului, Luncani, Luduş II, Iernut, Tîrnăveni şi Tg. Mureş.

Primele trei staţiuni sînt noi, pe cînd celelalte fac parte din reţeaua de staţiuni absolute măsurate de Gh. Atanasiu în trecut [2]. În staţiunile absolute de pe valea Arieşului şi anume: Turda, Lunca Arieşului şi Bistra, s-a măsurat numai componenta orizontală. Valoarea componentei orizontale, măsurată în 1953 în staţiunile enumerate, variază între 0,2126 Oe la Tg. Mureş şi 0,2146 Oe la Tîrnăveni. Valoarea înclinaţiei (necorectate) variază între 62°51′ la Tîrnăveni şi 63°6′ la Tg. Mureş.

b) S-a ridicat profilul de variometru pe valea Mureşului de la Unirea (Vinţul de Jos) pînă la Tg. Mureş.

c) Pe o rază de circa 20 km în jurul localității Războieni, s-au făcut stațiuni mai dese de variometru pentru conturarea anomaliilor găsite.

d) S-a făcut legătura cu regiunea studiată în anul precedent 1952, prin măsuri făcute în stațiuni de variometru comune celor două rețele de izogame (din 1952 și din 1953).

e) S-a efectuat profilul de variometru ce leagă stațiunile absolute de pe valea Arieșului, de la Gura Arieșului pînă la Bistra și profilul ce leagă stațiunile absolute Iernut și Tîrnăveni.

Numărul de stațiuni de pe profilele de variometru magnetic a fost de 170. Toate valorile componentei verticale au fost raportate la stațiunea de bază nr. 1 vest Războieni, pentru care s-a considerat, în vederea trasării izogamelor regiunii, $\Delta Z = 0$.

Rezultatele cele mai importante găsite pe valea Mureșului sînt următoarele:

Localitatea Luduș se află pe o depresiune a valorilor lui Z de circa -70γ față de Războieni. În jurul acestei depresiuni magnetice se conturează, la distanțe aproape egale (circa 10 km), trei anomalii pozitive și anume: spre vest la Luncani, $\Delta Z = +140\gamma$; spre est la Iernut, $\Delta Z = +160\gamma$ și spre sud-est, între satele Ciuci — Găbud — Gheja, $\Delta Z = +240\gamma$ față de Războieni (și $+310\ \gamma$ față de Luduș).

Această ultimă anomalie se prelungește spre sud—sud-vest pînă la Fărău, pe o lungime de circa 13 km. Izogama cu valoarea zero închide toate aceste trei anomalii într-un platou de valori pozitive ale lui ΔZ. Acest platou magnetic se întinde spre nord-vest pînă la cîmpia Turzii, spre sud pînă la Fărău, spre vest pînă la Războieni și spre est pînă la Ugra (6 km est de Iernut); spre nord de Iernut delimitarea nu este încă precizată.

Este neîndoios, cum vom arăta mai departe, că aceste anomalii pozitive sînt anomalii de profunzime, datorite fundamentului bazinului Transilvaniei.

Urmărind Valea Mureșului spre Tg. Mureș, se mai observă două anomalii pozitive de mică întindere,una la Ungheni cu $\Delta Z = +111\gamma$ și alta la Cristești cu $\Delta Z = +100\gamma$; aceste anomalii restrînse apar pe un fond de valori ușor crescute ale lui ΔZ.

Pentru stația absolută Tg. Mureș $\Delta Z = +62\gamma$.

Figura 1 dă profilul magnetic Chețani — Tg. Mureș (valorile măsurate ale lui ΔZ).

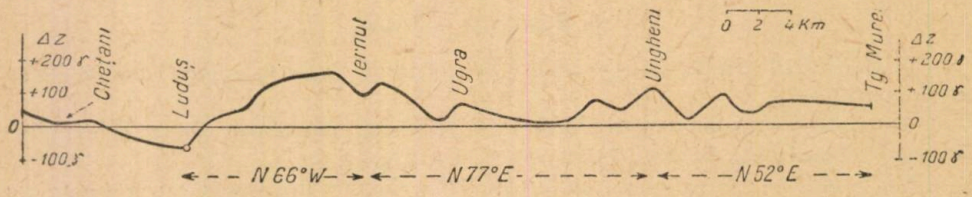


Fig. 1. — Profilul magnetic Cheţani-Tg. Mureș.

Profilul Iernut — Tîrnăveni arată o scădere rapidă a lui Z spre sud și anume de $\sim -200\gamma$ pe o lungime de meridian de circa 12 km, pe cînd scăderea normală ar trebui să fie numai de $50—60\ \gamma$.

Din punct de vedere geologic, regiunea cercetată de noi pe valea Mureșului, între Unirea și Tg. Mureș, face parte din chiuveta interioară a bazinului Transilvaniei și este caracterizată prin depozite neogene cutate în domuri. Ano-

maliile semnalate nu pot fi deduse din caracterul geologic de suprafață și nici din sondajele făcute, care pînă la adîncimi de peste 1 000 m, nu traversează decît strate sedimentare noi (ponțian, sarmațian). Diferitele tufuri andezitice sau dacitice, intercalate în ponțian și sarmațian sub formă de strate uneori foarte subțiri, alteori atingînd o grosime de cîțiva metri, nu ar putea contribui la producerea anomaliilor observate, mai ales că aceste tufuri se găsesc de

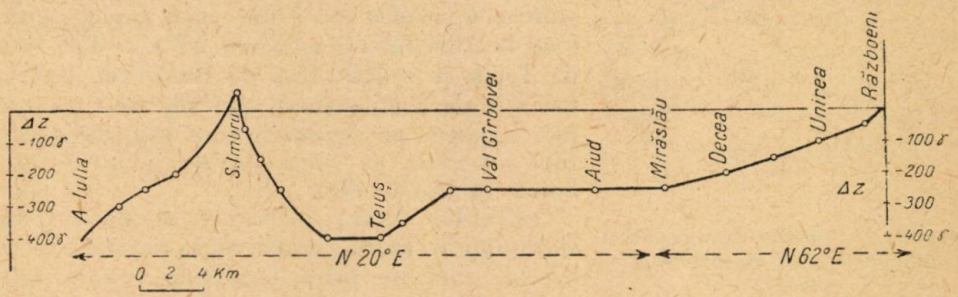


Fig. 2. — Profilul magnetic Alba Iulia-Războieni.

obicei la o adîncime de cîteva zeci sau sute de metri. Cu acest prilej, semnalăm că studiul proprietăților magnetice ale sedimentelor și în particular ale diferitelor tufuri din stratele bazinului Transilvaniei, nu este încă făcut. Un astfel de studiu ar fi folositor interpretărilor de magnetism regional.

Toate cele expuse vin în sprijinul interpretării date mai sus, anume că anomaliile observate pe valea Mureșului sînt datorite numai fundamentului bazinului Transilvaniei.

Pentru a arăta mai bine legătura dintre rezultatele obținute pe valea Mureșului în 1952 și 1953, să urmărim variația cîmpului magnetic pe un profil de la Războieni spre Teiuș. Observăm o scădere foarte rapidă a lui Z, conducînd la depresiunea magnetică de la Teiuș, pe care am găsit-o și am descris-o în precedenta noastră lucrare. Această depresiune are valoarea $\Delta Z = -400\,\gamma$ față de Războieni (fig. 2).

Și în figura 2, ΔZ reprezintă valorile *măsurate*, fără a ține seama de gradientul de latitudine. Dacă admitem pentru acest gradient valoarea aproximativă 4,5 γ/km, atunci anomalia de la Teiuș are valoarea de circa $-350\,\gamma$ față de Războieni.

Scăderea lui Z nu este uniformă, ci se face prin două trepte, și anume o treaptă mai lină de la Războieni la Mirăslău, și o alta mai rapidă de la valea Gîrbovei la Teiuș. Între Mirăslău și valea Gîrbovei, valoarea lui Z se menține aproape constantă, pe o distanță de 13 km, la valoarea $\Delta Z = -250\,\gamma$ față de Războieni. Așa cum am menționat și în lucrarea anterioară, subliniem că regiunea Teiuș este de asemenea sediul unei importante anomalii gravimetrice negative. Din cercetările gravimetrice conduse de ing. Sc. Stoenescu reiese că, înaintînd spre Teiuș dintr-o direcție sud-est sau est, scăderea lui g este de circa 35 miligali, pentru o distanță de numai 11 km.

Figura 3 arată paralelismul dintre anomalia magnetică și cea gravimetrică la Teiuș. În ambele profile s-a scăzut valoarea normală din valorile măsurate ale lui Δg și ΔZ, astfel încît curbele arată numai efectul anomaliei. Profilele traversează centrul anomaliei magnetice și sînt ridicate după direcția NV—SE. Scăderea paralelă a lui g și Z este un sprijin al interpretării date de

noi anomaliei de la Teiuș, în lucrarea anterioară [1], anume că este vorba de o anomalie de profunzime, datorită unui bazin secundar de scufundare.

Continuînd a urmări valea Mureșului spre sud, îndată după Teiuș se produce o creștere rapidă a valorilor lui Z, care culminează la Sîntimbru, cu o valoare $\Delta Z = +50\gamma$ față de Războieni și $+450\gamma$ față de Teiuș (anomalie semnalată în precedenta noastră lucrare [1]), pentru a scădea apoi din nou, rapid, ajungînd la Alba-Iulia la valoarea $\Delta Z = -15\gamma$ față de Teiuș și -415γ față de Războieni. Aceste variații ale componentei verticale sînt redate mai sugestiv pe figura 2, care reproduce profilul magnetic pe valea Mureșului, între Războieni și Alba-Iulia.

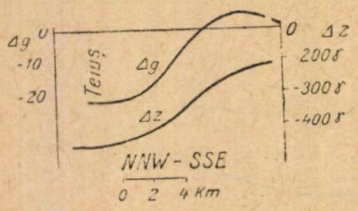


Fig. 3. — Curbele de anomalie gravimetrică și magnetică la Teiuș.

Profilul dintre stațiunile absolute Ocna Mureșului și Turda, arată valori negative pentru ΔZ, cuprinse între -50γ și -100γ față de Războieni; în statiunea absolută Turda $\Delta Z = -77\gamma$.

Pe șoseaua Turda — Petrești, spre Cheile Turzii, valorile componentei verticale arată o creștere bruscă pînă la $+170\gamma$. Acest maxim corespunde cu limita geologică cartată, spre est, a formațiunilor eruptive, care se continuă spre sud-vest și formează partea de sud a Cheilor Turzii. La Petrești, la intrarea de nord a Cheilor, se observă o puternică anomalie magnetică negativă de circa -350γ.

Profilul magnetic de pe valea Arieșului, de la Turda la Bistra are, în linii mari, următoarea topografie. Începînd de la vest de comuna Mihai-Viteazul, se manifestă o rapidă variație pozitivă care atinge la Cornești $\Delta Z = +210\gamma$ provocată, ca și cea de pe șoseaua Turda — Petrești, de formațiunea eruptivă menționată. La Buru, la Gura Ierii, am găsit o puternică anomalie *negativă* cu $\Delta Z = -530\gamma$. Înaintînd apoi mai departe spre vest pe valea Arieșului, valorile lui ΔZ se mențin, cu mici variații, în jurul valorii medii $\Delta Z = -375\gamma$, pînă aproape de Bistra unde, în stațiunea absolută, $\Delta Z = -266\gamma$.

Rezultatele găsite de noi asupra variației componentei verticale, pe valea Mureșului în jurul localității Luduș, pot fi apropiate de rezultatele cercetării gravimetrice și magnetice făcute în anii 1912—1913, în aceeași regiune, de savantul geofizician R. E ö t v ö s și colaboratorii săi. Odată cu stațiunile gravimetrice, sub conducerea lui E ö t v ö s s-au făcut în Ardeal și stațiuni magnetice absolute legate între ele prin profile de variometre magnetice. În acest fel s-a studiat între altele în anii 1912—1913 și valea Mureșului, de la Aiud la Tg. Mureș. Rezultatele acestor cercetări, numai în ce privește magnetismul, sînt rezumate în lucrarea lui J. F e k e t e [4], în care se semnalează un centru important de anomalie magnetică, situat puțin mai la est de Luduș. Efectele acestei anomalii s-ar întinde foarte departe în jur, pînă la Turda, Aiud, Alba-Iulia și chiar mult mai departe. Pentru confirmarea acestui punct de vedere, e necesar ca pentru toate valorile lui ΔZ obținute pînă acum de noi în întreaga regiune, înconjurînd pînă la mari distanțe localitatea Luduș, să ținem seama de gradientul normal de latitudine și de cel de longitudine al lui Z. Această operație se va putea face corect mai tîrziu, după ce vom deduce valorile normale ale componentei verticale, în funcție de coordonatele geografice, pentru Ardeal. În fiecare stațiune va trebui să scădem din valoarea măsurată Z_m

a componentei verticale, valoarea normală Z_n, pentru a obține numai cîmpul vertical Z_a datorit anomaliei magnetice ($Z_a = Z_m - Z_n$). Cu valorile astfel obținute, se trasează curbele izanomale care reprezintă numai efectul anomaliilor.

O asemenea lucrare, bazată pe măsura lui H și I, a fost făcută pentru partea nordică a Ardealului, cît și pentru Regiunea Autonomă Maghiară de G. B a r t a [3]. Unele din datele din această lucrare pot fi folosite, cu oarecare aproximație, și în partea de nord a regiunii cercetate de noi. Deocamdată cercetările noastre se mărginesc a confirma existența și a preciza forma, unor anomalii magnetice, la o distanță mai limitată în jurul localității Luduș, rezervîndu-ne a reveni asupra acestei chestiuni, de o deosebită importanță științifică.

2. În cursul campaniei din vara anului 1954 (iulie—august), s-au măsurat I și H în 3 stațiuni absolute și anume: Cluj-Observator, Cluj-Ameliorarea Plantelor și Bonțida. Valorile găsite pentru I (necorectate) au fost respectiv de 63°4′; 63°6′ și 63°17′. Pentru H am găsit valorile 0,2128, 0,2123 și 0,2111 Oe, în aceleași stațiuni.

Rezultatele în legătură cu variația seculară a lui H în aceste stațiuni vor fi publicate ulterior.

Toate cele trei stațiuni enumerate fac parte din rețeaua din 1937—1938 a profesorului G h. A t a n a s i u. Din aceeași rețea fac parte stațiunile absolute Gilău, Ciucea, Gherla, Dej și Moci, între care s-au făcut profile de variometru magnetic vertical.

Numărul stațiunilor măsurate pe profilele de variometru vertical a fost de 98; stațiunile de bază au fost acelea de la km 486 vest Cluj și de la km 5,4 est Cluj, spre Someșeni.

Toate valorile lui ΔZ au fost raportate la stațiunea de bază km 486 și apoi, prin legătura cu stațiunea absolută Turda, au fost raportate la stațiunea nr. 1 vest Războieni (din campania anului 1953).

Profilul magnetic Unirea (Vîntul de Jos) — Turda — Cluj permite a deduce una dintre cele mai importante concluzii din această campanie. Anume, înaintînd spre nord de la Unirea spre Cluj, componenta verticală păstrează o valoare puțin diferită, de exemplu $\Delta Z = -100\,\gamma$ la Unirea, $-95\,\gamma$ sud Turda. Apoi se observă o creștere a lui ΔZ de circa $180\,\gamma$ la ieșirea de nord—nord-vest din Turda, în dreptul satului Copăceni, cauzată de același masiv eruptiv care provoacă anomalia pozitivă de pe șoseaua Turda-Petrești, și care (masiv) apare aici, la zi, la Copăceni. Înaintînd spre nord—nord-vest urmează o scădere de circa $100\,\gamma$, datorită foarte probabil polului magnetic opus, al aceluiași masiv geologic, magnetizat prin inducțiunea cîmpului terestru.

Mai departe valorile lui ΔZ revin la $-110\,\gamma$ sud Feleac, $-80\,\gamma$ nord Feleac, $-78\,\gamma$ la mijlocul distanței Cluj—Feleac pe șosea și în sfîrșit $-85\,\gamma$ la stațiunea absolută Cluj-Ameliorarea Plantelor.

Cum se vede, pe acest profil care reprezintă o distanță proiectată pe meridian de circa 40 km, dacă eliminăm perturbarea datorită masivului eruptiv de la Copăceni, variația lui Z este neînsemnată. Luînd pentru gradientul normal de latitudine a lui Z în regiunea $4{,}5\,\gamma$/km (G. B a r t a [3][1])), variația normală a lui Z de la Unirea la Cluj ar fi de $+\,180\,\gamma$, adică ar trebui să obținem la Cluj $\Delta Z = 180-100$ (Unirea) $= +80\,\gamma$ față de Unirea, în loc de $-85\,\gamma$ cît dau

[1]) p. 20.

măsurile. Aceasta reprezintă o anomalie negativă de circa 165 γ pentru Cluj, faţă de Unirea.

În figura 4 se dă profilul magnetic Unirea—Cluj. Linia întreruptă, notată ΔZ_n, arată variaţia normală a componentei verticale pentru care am luat $\Delta Z/\Delta\varphi = 4{,}5\,\gamma$/km.

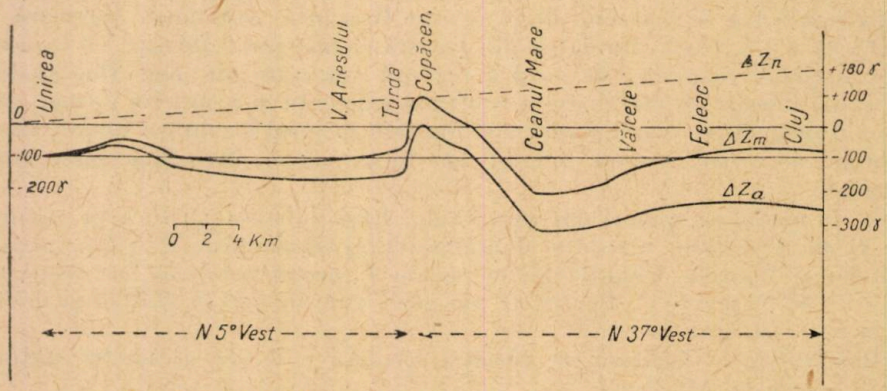


Fig. 4. — Profilul magnetic Unirea-Cluj pe şoseaua naţională.

Linia notată ΔZ_m ne dă valorile măsurate ale lui ΔZ faţă de Războieni, iar linia notată ΔZ_a ne dă valorile lui ΔZ datorite anomaliei, după relaţia $\Delta Z_a = \Delta Z_m - \Delta Z_n$.

Amploarea perturbării magnetice care se întinde (sud—sud-est, nord—nord-vest) pe o lungime de circa 14 km, între Turda şi Vîlcele, dovedeşte dimensiunile mari ale corpului geologic magnetic activ, din care numai o mică porţiune apare la zi, restul fiind acoperit de formaţiuni noi [5].

Valoarea scăzută a lui ΔZ se menţine pe profilele făcute spre vest de Cluj pe şoseaua Cluj—Gilău—Huedin—Ciucea şi pe valea Nădaşului. Numai pe profilele spre nord de Cluj, variaţia componentei verticale tinde a se normaliza şi valorile lui ΔZ încep a creşte; astfel pe profilul Cluj — Chinteni — Fodora ($\Delta Z = 0$) — Panticeu ($+40\,\gamma$) şi de asemenea pe profilul Apahida—Bonţida ($+28\,\gamma$) — Gherla ($+36\,\gamma$) — Dej ($+98\,\gamma$, sau $+183\,\gamma$ faţă de Cluj).

Observăm că profilul Cluj—Dej, cu o lungime proiectată pe meridian, de circa 43 km, ne dă o variaţie $\Delta Z = +183\,\gamma$, adică $\Delta Z/\Delta\varphi = 4{,}2\,\gamma$/km, ceea ce reprezintă un gradient de latitudine încă inferior celui normal de $4{,}5\,\gamma$/km. Porţiunea Apahida—Dej a aceluiaşi profil ne dă un gradient de latitudine de numai $3{,}1\,\gamma$/km. Toate acestea ne arată că variaţia lui Z cu latitudinea tinde a se normaliza, dar este încă inferioară valorii normale în nordul regiunii cercetată de noi.

Pe profilul spre est, Cluj—Apahida—Moci, s-a găsit o creştere uşoară a lui ΔZ, care atinge $+40\,\gamma$ la Moci, adică $85 + 40 = +125\,\gamma$ faţă de Cluj-Ameliorarea Plantelor.

Pe profilul Cluj—Gilău—Căpuşul—Izvoarele Crişului—Huedin—Ciucea, apar o serie de anomalii pozitive de întindere mai mică şi cu intensităţile faţă de Cluj $+180\,\gamma$ la Gilău, $+215\,\gamma$ la izvoarele Crişului, $+85\,\gamma$ vest Huedin şi $+55\,\gamma$ la Ciucea. Aceste anomalii localizate sînt datorite prezenţei la zi, sau la mică adîncime, a rocilor eruptive cartate geologic la sud de şosea, sau chiar lîngă ea.

La Căpușul Mic am pus în evidență o anomalie negativă cu $\Delta Z = -235\gamma$, față de Cluj. Această anomalie negativă poate fi interpretată ca fiind efectul polului contrar al unui corp geologic magnetizat prin inducție, situat la nu prea mare adîncime și a cărui anomalie pozitivă s-ar manifesta mai spre sud, ceea ce vom cerceta în campania viitoare.

În comparație cu profilul perturbat magnetic Cluj—Ciucea, descris mai sus, profilul de pe valea Nădașului, pînă la Aghireș, nu este perturbat decît în mod neînsemnat.

Profilul Apahida—Bonțida arată ore strînsă anomalie pozitivă de circa $+147\gamma$ la Jucul de Jos, pe malul Someșului.

Itinerariile magnetice Apahida—Cojocna și Someșeni—Pata nu relevă variații remarcabile ale componentei verticale.

Profile secundare s-au mai ridicat pe distanțele Florești—Săvădisla—Petrești (Cheile Turzii) și Săvădisla—Băișoara—Valea Ierii.

Primul dintre aceste două profile arată, începînd de la Săvădisla, o scădere rapidă și regulată a lui Z, care se termină în anomalia negativă de la Petrești cu $\Delta Z = -343\gamma$ (-258γ față de Cluj), anomalie găsită de noi în cursul anului 1953 și amintită mai sus.

Pe cel de al doilea profil, pe valea Ierii, punctul extrem la ieșirea de sud-est a satului Valea Ierii arată o scădere $\Delta Z = -140\gamma$ față de Cluj.

În rezumat, cercetările din anul 1954 pun în evidență o anomalie magnetică foarte întinsă, care se relevă prin variații mici ale lui Z pe distanța Unirea—Cluj, cît și pe profilele de la vest de Cluj. Pentru conturarea acestei foarte întinse anomalii, este nevoie mai întîi de completarea datelor în părțile regiunii unde nu am pătruns încă cu cercetarea magnetică și apoi, avînd un număr suficient de stațiuni, să deducem valoarea normală a lui Z și să întocmim harta izanomalelor componentei verticale în regiune, astfel cum am explicat mai sus cu prilejul discuției anomaliilor din jurul localității Luduș.

Aceste lucrări rămîn a fi realizate în programul viitor al cercetărilor noastre

7. Încheiere

În concluzie, în cursul cercetărilor magnetice din anii 1953 și 1954, s-au măsurat într-o serie de stațiuni absolute, din regiunea Cluj, elementele H și I, rămînînd ca valorile declinației să fie determinate într-o viitoare campanie. Compararea valorilor actuale cu cele vechi, îndeosebi pentru H și D, ne va da variația seculară a acestor elemente în perioada 1937—1954, permițînd a aduce la zi vechile noastre măsuri absolute în Ardeal.

Măsurarea lui H și I în toate stațiunile ne permite calcularea valorilor absolute ale componentei verticale Z și, ca urmare, raportarea tuturor stațiunilor de variometru la valori absolute.

Profilele de variometru ridicate între stațiunile absolute ne-au condus la găsirea și conturarea unor anomalii, unele dintre ele putînd prezenta un interes economic.

Anomaliile magnetice găsite de noi la Luncani, Iernut, Găbud-Ciuci, Teiuș și Sîntimbru, merită a fi cercetate mai amănunțit prin prospecțiuni magnetice de detaliu.

În general, s-au dat pentru prima oară rezultate ceva mai amănunțite asupra repartiției valorilor cîmpului magnetic (Z) într-o vastă regiune a R.P.R., puțin cunoscută pînă acum din acest punct de vedere.

În anii viitori vom completa aceste cercetări, atît în ce privește stațiunile absolute, prin remăsurarea stațiunilor vechi, prin introducerea de noi stațiuni absolute, cît și prin profile de variometru magnetic între stațiuni și în părțile regiunii Cluj, rămase pînă acum necercetate.

Extinderea cercetărilor spre nord și nord-est de regiunea pînă acum studiată, ne va aduce desigur date noi și interesante asupra magnetismului regional în nordul Ardealului.

Rezultatele privind mai de aproape măsurile absolute și variația seculară a elementelor magnetice măsurate, ca și transportul valorilor elementelor magnetice absolute cu ajutorul variometrelor, vor fi expuse în alte lucrări.

ИССЛЕДОВАНИЯ ЗЕМНОГО МАГНЕТИЗМА В ОБЛАСТИ КЛУЖА В 1953 И 1954 ГГ.

(Валя Муурешулуй, Валя Ариешулуй,, Валя Сомешулуй)

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В течении 1953 и 1954 гг. авторами были проведены исследования земного магнетизма в области Клужа (в Валя Мурешулуй и в Валя Сомешулуй).

Работы производились по тем же методам, что и в предыдущие годы.

Произведена обработка измерений 12 абсолютных станций и 268 станций с вертикальным магнитным вариометром. На абсолютных станциях производились измерения 1 и H. Между абсолютными станциями взяты профиля по данным вертикального магнитного вариометра.

Основные результаты следующие:

В местности Лудуш, расположенной в Валя Мурешулуй, наблюдается магнитная депрессия, окруженная положительными аномалиями с запада, востока и юго-запада. Эта положительная аномалия вызвана фундаментом трансильванского бассейна.

Ниже по Валя Мурешулуй от Рэзбоени до Теюша значения Z быстро снижаются, доходя в Теюше до величины $\Delta Z = -400\ \gamma$. На рисунке 3 показано параллельное снижение g и Z в аномалии Теюша. На рисунке 2 показан магнитный профиль в Валя Мурешелуй от Рэзбоени до Алба-Юлии, а на рисунке 1 магнитный профиль между Кецани и Тыргул-Муреш.

Быстрое снижение Z отмечается на профиле Иернут—Тырнэвени, доходящее до $\Delta Z = -200\ \gamma$.

На шоссейных дорогах Турда—Клуж, Турда—Петрешти и Турда—Корнешти заметны положительные аномалии средней интенсивности, вызванные массивом изверженных пород, выступающим в этой области на поверхность в направлении с северо-востока на юго-запад.

Магнитный профиль Турда—Клуж за исключением магнитного возмущения, существующего между Турдой и Вылчеле, показывает почти постоянную неизменяемость значения ΔZ в среднем равного $-90\ \gamma$. Это последнее обстоятельство указывает на существование обширной отрицательной аномалии, так как нормальное возрастание Z на этом профиле должно было бы быть около $180\ \gamma$.

Значение отрицательной аномалии возрастает по мере продвижения от Униря к северу, достигая в Клуже значения $\Delta Z = -165\,\gamma$.

Магнитный профиль Униря—Турда—Клуж показан на рисунке 4.

В настоящемй работе впервые приводятся более подробные результаты исследованй распределения магнитного поля (Z) в обширной области РНР, мало известной с этой точки зрения. Некоторые результаты могут иметь экономическое значение.

Результаты измерений, произведенных на обсолютных станциях, будут изложены в следующем сообщении.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Магнитный профиль Кецани — Тыргу-Муреш.
Рис. 2. — Магнитный профиль Алба-Юлия — Рэзбоени.
Рис. 3. — Кривые гравиметрической и магнитной аномалии в Теюше.
Рис. 4. — Магнитный профиль Униря — Клуж, по национальному шоссе.

RECHERCHES DE MAGNÉTISME TERRESTRE DANS LA RÉGION DE CLUJ, EN 1953—1954

(vallées du Mureș, de l'Arieș et du Someș)

(RÉSUMÉ)

Au cours des années 1953 et 1954, on a fait des recherches de magnétisme terrestre dans les vallées du Mureș, de l'Arieș et du Someș.

La méthode de travail des Auteurs a été celle utilisée dans leur précédent travail [1].

Les Auteurs ont mesuré 12 stations absolues et 268 stations de variomètre magnétiqué vertical. Dans les stations absolues on a mesuré les éléments H et I. Entre les stations absolues on a levé des profils de variomètre magnétique vertical.

Les principaux résultats obtenus sont les suivants :

Dans la vallée du Mureș, la localité de Luduș se trouve dans une dépression magnétique entourée à l'Ouest, à l'Est et au Sud-Ouest d'anomalies positives. Ces anomalies positives sont produites, probablement, par des parties culminantes du fondement du Bassin Transylvain. En descendant la vallée du Mureș, de Războieni vers Teiuș, les valeurs de Z diminuent pour atteindre $\Delta Z = -400\,\gamma$ à Teiuș.

La figure 1 montre le profil magnétique Războieni-Tg. Mureș. La figure 2 montre le profil d' Alba-Iulia à Războieni et la figure 3, les courbes d'anomalie gravimétrique et magnétique à Teiuș.

Une diminution rapide de Z se manifeste sur le parcours, vers le Sud, Iernut-Tîrnăveni avec $\Delta Z = -200\,\gamma$.

Sur les routes Turda—Cluj, Turda—Petrești et Turda—Cornești, on trouve des anomalies positives d'intensité moyenne de la composante verticale. Ces anomalies sont produites par le massif de roches éruptives qui apparaissent dans cette région et dont la direction est NE-SO.

Le profil magnétique Unirea—Cluj fait ressortir une très étendue anomalie magnétique négative, caracterisée par le fait que ΔZ a presque la même valeur

à Unirea qu'à Cluj, quoique cette dernière station se trouve à 40 km environ plus au Nord que Unirea. En admettant pour le gradient de latitude de Z la valeur 4,5 γ/km on obtient que la valeur de l'anomalie négative à Cluj, par rapport à Unirea, est $\Delta Z = -165\ \gamma$. Le profil magnétique Unirea—Cluj est donné dans la figure 4.

En conclusion, dans ce travail, on donne pour la première fois des résultats plus détaillés sur la répartition du champ magnétique dans une vaste région de la République Populaire Roumaine.

Quelques-uns des résultats trouvés peuvent présenter un intérêt économique.

Les résultats concernant les mesures absolues seront donnés dans un travail prochain.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Le profil magnétique Cheţani—Tîrgu Mureş.
Fig. 2. — Le profil magnétique Alba Iulia—Războieni.
Fig. 3. — Courbes d'anomalie gravimétrique et magnétique à Teiuş.
Fig. 4. — Le profil magnétique Unirea—Cluj, sur la route nationale.

BIBLIOGRAFIE

1. Gh. Atanasiu şi T. Neştianu, *Cercetări magnetice regionale în Ardeal şi Banat.* Studii şi cercet. de fizică, 1954, t. V, nr. 1—2, p. 7.
2. Gh. Atanasiu, *Hărţile magnetice ale Transilvaniei.* An. Inst. Geol., 1943, vol. XXII, p. 399.
3. G. Barta, A földmágnességi erö vizszintes összetevöjének és lehajlásának változásai Erdélyben (1943, 0), Budapest 1947.
4. J. Fekete, *Asupra măsurilor de magnetism terestru.* Comemorarea lui R. Eötvös, Budapesta, 1930.
5. A. Vancea, *Geologische Untersuchungen im West-SWest-Gebiete des Siebenbürgischen Beckens.* Bul. Soc. rom. de geol., 1942, vol. V, p. 177.

STUDII ȘI CERCETĂRI DE FIZICĂ
Tomul VI, nr. 2, 1955

ASUPRA BAZELOR CLASICE ALE TEORIEI PARTICULELOR ELEMENTARE*)

DE

VALER NOVACU
MEMBRU CORESPONDENT AL ACADEMIEI R.P.R.

În fizica clasică sau precuantică, materia era considerată ca fiind compusă din particule elementare, considerate corpuri solide în miniatură, sau uneori simple puncte materiale, ce se mișcă în cadrul general al spațiu-timpului euclidian, considerat independent, sub acțiunea cîmpurilor de forță care sînt responsabile de mișcarea particulelor materiale. În această schemă deosebim pe de o parte legile de cîmp, care explică mișcarea particulelor supuse acțiunii lor, pe de altă parte legile de mișcare, care determină mișcarea particulelor prin interacția dintre cîmp și particule. În particular, cîmpul electromagnetic, ale cărui legi erau exprimate prin ecuațiile lui Maxwell, se încerca să fie explicat prin postularea unui mediu fictiv continuu și elastic, susceptibil să transmită acțiunile din aproape în aproape. Prin formularea teoriei relativității restrînse, Einstein a arătat că trebuie să renunțăm la acest postulat. Pe de altă parte, modelul clasic al electronului propus de Lorentz, o sferă mică încărcată cu sarcini electrice, a trebuit să fie abandonat, prin faptul că era legat de ipoteza originii electromagnetice a masei electronului care este în contrazicere cu faptele experimentale. În particular, acest model s-a dovedit neconsistent, și în cazul unei mișcări neuniforme se produce o acțiune a electronului asupra lui însuși, ceea ce nu permite ca mișcarea electronului să fie explicată în cadrul electrodinamicii clasice. Modelul lui Lorentz s-a dovedit cu toate acestea valoros și valabil în cazul cînd cîmpul electromagnetic nu variază prea repede și accelerația electronului nu este prea mare. Cît privește modelul punctiform al electronului, deși ne permite o descriere corectă a fenomenelor electromagnetice în domeniul clasic pînă la distanțe de ordinul «razei clasice», el este legat de o serie de dificultăți grave ca: energia proprie infinită, autoaccelerarea sa. În teoria cuantică, acestor dificultăți li se adaugă altele prin expresiile divergente ce se obțin din cauza intereacției electronului punctiform cu cîmpul electromagnetic.

Cercetările făcute pentru a extinde bazele electrodinamicii lui Maxwell-Lorentz în scopul de a remedia în cadrul clasic aceste neajunsuri ale teoriei au condus la rezultate pozitive, punînd totodată sub o formă nouă problema

*) Lucrare prezentată Institutului de fizică la data de 31 ianuarie 1955.

masei și a spinului electronului, arătînd legătura lor cu structura internă a particulei, care în nici un caz nu se poate neglija. Ele au arătat că există diferite metode de a introduce ideea particulei extinse și deci de a defini rațional masa particulei, dîndu-se în același timp o interpretare fizică a procedeelor formale de tăiere utilizate curent în teoria cîmpurilor.

1. *Teoriile dualiste.* Se consideră particulele independente de cîmp, în particular electronul de cîmpul electromagnetic.

Introducînd notațiile 4-dimensionale obișnuite : $x_\mu(\vec{r}, \mathrm{i}\, c\, t)$ pentru coordonatele cîmpului, $\xi_\mu[\vec{r}_0(\tau), ict(\tau)]$ pentru un punct de pe linia de univers al electronului, τ fiind timpul propriu, avem

$$\dot{\xi}_\mu = \frac{\mathrm{d}\xi_\mu}{\mathrm{d}\tau}, \quad \dot{\xi}_\mu \dot{\xi}_\mu = -c^2.$$

Ecuațiile cîmpului și ecuațiile de mișcare se obțin dintr-un principiu variațional

$$\delta S = \delta (S_1 + S_2 + S_3) = 0,$$

unde acțiunea S_1 se referă la particula liberă

$$S_1 = \int L_1 \,\mathrm{d}\tau = -mc \int \sqrt{-\dot{\xi}_\mu \dot{\xi}_\mu}\,\mathrm{d}\tau,$$

S_2 se referă la cîmp

$$S_2 = \frac{-1}{4\pi} \int L_2 \,\mathrm{d}_4\, x,$$

iar S_3 descrie interacțiunea dintre cîmp și particule

$$S_3 = \int L_3 \,\mathrm{d}_4\, x,$$

unde L_1, L_2, L_3 sînt densitățile lagrangianelor respective.

Intensitatea cîmpului electromagnetic este definită prin

$$f_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}, \tag{1}$$

unde notația prescurtată înseamnă

$$A_{\nu,\mu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu},$$

A_ν fiind 4-potențialul respectiv.

Variația integralei de acțiune se efectuează față de potențiale, considerate ca variabile de cîmp ; se obțin astfel ecuațiile cîmpului sub forma ecuațiilor Euler-Lagrange dacă expresiile lagrangeanelor sînt precizate.

Alegerea lagrangeanelor se face astfel ca funcțiile acțiune să fie invariante față de transformarea Lorentz și transformarea de etalon (de speța a 2-a).

1. *Cazul electronului punctiform.* Densitatea lagrangeanei L_3 de interacție se scrie sub forma

$$L_3 = A_\mu \, j^\mu, \tag{2}$$

unde 4-vectorul densitate de curent-sarcină se poate exprima în mod convenabil cu ajutorul funcției δ a lui P. A. M. Dirac [1] sub forma

$$j^\mu = e \int \delta_4 (x^\nu - \xi^\nu) \dot{\xi}^\mu \mathrm{d}\tau, \tag{3}$$

unde $\delta_4 (x^\nu - \xi^\nu) = \delta (\vec{r} - \vec{r}_0) \, \delta (t - t_0)$.

1 *a)* În cazul *cîmpului maxvellian* densitatea lagrangeanei L_2 are expresia obișnuită

$$L_2 = L_0 = -\frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} \tag{4}$$

și ecuațiile cîmpului ce se obțin din principiul variațional sînt

$$f_{[\mu\nu,\lambda]} = f_{\mu\nu,\lambda} + f_{\nu\lambda,\mu} + f_{\lambda\mu\nu} = 0, \tag{5}$$

$$p^{\mu\nu}_{,\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu, \tag{6}$$

unde tensorul excitație a cîmpului este prin definiție

$$p_{\mu\nu} = 4 \frac{\partial L_0}{\partial A_{\mu,\nu}} = f_{\mu\nu}, \tag{7}$$

iar ecuația (5) este echivalentă cu (1).

Cîmpul propriu al electronului este definit prin ecuațiile

$$\Box A_\mu = -\frac{4\pi}{c} j_\mu, \tag{8}$$

$$A_{\mu,\mu} = 0. \tag{9}$$

Tensorul energie-impuls al cîmpului are expresia cunoscută

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} f_{\mu\nu} f^\lambda_\nu - \delta_{\mu\nu} L_0 = \frac{1}{4\pi} f_{\mu\lambda} f^\lambda_\nu + \frac{1}{16\pi} \delta_{\mu\nu} f_{\alpha\beta} f^{\alpha\beta}. \tag{10}$$

Raportînd la sistemul propriu al electronului ar trebui să avem pentru electronul în repaus.

$$\int T^0_{44} \mathrm{d}_3 x = \text{finit},$$

condiție ce nu este îndeplinită în electrodinamica clasică. Pentru a obține o valoare finită trebuie să se execute o « tăiere », excluzînd interiorul electronului, adică introducînd o rază finită să se integreze în exteriorul sferei considerate. De asemenea, ar trebui ca

$$\int \rho^0 \mathrm{d}_3 x = \text{finit},$$

ceea ce nu este cazul în electrodinamica clasică.

De asemenea, energia electronului ar trebui să se transforme față de transformarea Lorentz ca și a patra componentă a unui 4-vector impuls, ceea ce nu are loc deoarece condiția lui von Laue nu este îndeplinită.

O deosebită dificultate prezintă scrierea ecuației de mișcare a electronului, care rezultă din legile de conservare a energiei și impulsului și se poate scrie sub forma

$$T^{\mu\nu}_{,\nu} = f^{\mu\nu} j_\nu . \tag{11}$$

Anume, ecuația de mișcare a lui Lorentz rezultă din condiția că forța totală ce acționează asupra electronului este nulă, adică forța Lorentz medie luată asupra unui volum arbitrar de mic ce înconjoară electronul punctiform este nulă.

După cum se știe, ecuația de mișcare a electronului se poate scrie, introducînd forța de radiație, în mod valabil numai pentru mișcări încete și cîmpuri a căror frecvență nu este prea înaltă.

1 *b)* Dirac [1] a arătat că se poate obține energie finită precum și o «rază» pentru electron fără modificarea ecuațiilor maxwelliene ale cîmpului. nici a ipotezei singularității punctiforme, adoptînd un proces de «substracție» care constă în a scrie cîmpul de radiație produs de electron sub forma

$$f^{\mu\nu}_{\text{rad}} = f^{\mu\nu}_{\text{ret}} - f^{\mu\nu}_{\text{av}} ,$$

unde $f^{\mu\nu}_{\text{ret}}$, respectiv $f^{\mu\nu}_{\text{av}}$, sînt cîmpurile calculate cu ajutorul potențialelor retardate, respectiv avansate. Forța radiativă va fi, de asemenea, de forma

$$\vec{F}_r = \frac{1}{2} (\vec{F}^{\text{ret}} - \vec{F}^{\text{av}}) ,$$

unde $\vec{F}^{\text{ret}}$, respectiv $\vec{F}^{\text{av}}$, sînt forțele Lorentz calculate folosind cîmpurile retardate, respectiv cele avansate.

Cîmpul radiativ satisface ecuația undelor omogenă și are o valoare definită în întreg spațiu-timpul, nefiind amestecat cu cîmpul coulombian ca și în teoria clasică obișnuită. Aplicînd legile de conservare a energiei și a impulsului, se obține ecuația de mișcare a electronului, de aceeași formă ca și cea dată de Lorentz, dacă se admite că masa finită a electronului se explică prin existența unei energii negative într-un domeniu de dimensiune finită din jurul singularității punctiforme, ce reprezintă electronul, care compensează energia pozitivă a cîmpului coulombian a electronului.

Interesul acestor cercetări ale lui Dirac este că dimensiunea finită a electronului, păstrînd valabilitatea cîmpului maxwellian și în interiorul electromului, se obține într-un sens nou și anume în sensul că proprietățile elementare ale spațiu-timpului nu sînt valabile în interiorul electronului, cîmpul radiativ trebuind să se propage cu viteză mai mare decît viteza luminii în interiorul electronului. Această concluzie rezultă din studiul mișcării accelerate a electronului sub acțiunea unui impuls electromagnetic. Căutînd să reducă forța de autoacțiune a electronului la forța de inerție și forța de radiație clasică, Dirac arată că în acest caz mișcarea electronului nu este bine determinată, fiind posibile anumite mișcări secundare care nu pot fi determinate decît dacă pe lîngă condițiile inițiale se mai dau și condiții «finale». Un lucru cu totul caracteristic a ipotezei făcute de Dirac este că particula poate să se accelereze pe sine însuși pînă la viteza luminii în contul energiei

sale interne. Pentru a elimina această posibilitate de mișcare instabilă din ecuațiile de mișcare, D i r a c arată că este nevoie să se impună condiții finale, în sensul că odată ce interacțiile electronului cu cîmpul extern se anulează, electronul se va mișca mai departe rectiliniu și uniform.

Importanța acestor cercetări ale lui D i r a c constă deci în faptul că se arată clar că în cazul mișcării electronului într-un cîmp extern se manifestă o mărire a gradelor de libertate cinetice prin faptul că există mișcări secundare posibile care nu pot fi eliminate prin ipoteze convenabile atît timp cît menținem valabilitatea ecuațiilor lui Maxwell pentru cîmp.

1 *c*) Insuficiențele teoriei clasice a lui Lorentz au condus la concluzia că ea trebuie completată prin introducerea de elemente teoretice absolut noi. Astfel trebuie asigurată energia și masa finită a electronului precum și asigurarea echilibrării forțelor de repulsie coulombiană a sarcinilor electronului. De asemenea, era nevoie de o completare convenabilă a tensorului energie-impuls pentru ca legile de conservare a energiei și a impulsului să fie puse de acord cu existența electronilor.

O depășire a teoriei lui Maxwell-Lorentz în ipoteza unui electron punctiform și în cadrul teoriilor dualiste prin generalizarea ecuațiilor fundamentale ale cîmpului microscopic a fost realizată de M. B o r n și L. I n f e l d [2], [3] și [4], în sensul construirii unei electrodinamici neliniare, care de altfel nu diferă sensibil de electrodinamica liniară clasică decît la distanțe mici de ordinul razei clasice din jurul electronului.

Generalizarea constă în a considera lagrangeana L_2 a cîmpului ca o funcție de invarianții relativiști

$$F = \frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} \quad , \quad G = \frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{*\mu\nu} , \tag{12}$$

unde $f^{*\mu\nu}$ este dualul tensorului $f^{\mu\nu}$. Spre deosebire de teoria liniară, cînd $L_2 = L_0 = F$, există o deosebire între tensorii antisimetrici $f_{\mu\nu}$ și $p_{\mu\nu}$, componentele celui din urmă fiind funcții de componentele primului. În locul definiției (7) vom considera

$$p_{\mu\nu} = 2 \frac{\partial L_2}{\partial f^{\mu\nu}} , \tag{13}$$

care este echivalentă cu (7), dacă ținem seama de definiția (1).

Ecuațiile cîmpului se obțin din principiul variațional considerat, dacă folosim definiția (1) echivalentă cu ecuația (5) și definiția (2). Exprimînd în L_2 pe $f_{\mu\nu}$ în funcție de A_μ și considerînd variația față de A_μ, obținem ecuația (6).

În formalismul acesta uzual bazat pe funcția lagrangeană se vede că potențialele joacă un rol fundamental. I n f e l d [5], [6] și [7], a arătat că se poate dezvolta o electrodinamică fără potențiale alegînd componentele $p_{\mu\nu}$ ca variabile fundamentale ale cîmpului prin faptul că din (13) $f_{\mu\nu}$ se poate defini în mod univoc în funcție de $p_{\mu\nu}$. Se poate defini anume o funcție H_2 duală funcției L_2, astfel ca

$$f_{\mu\nu} = - 2 \frac{\partial H_2}{\partial p_{\mu\nu}} . \tag{14}$$

Funcția H_2 va depinde de $p_{\mu\nu}$ prin intermediarul invarianților

$$P = -\frac{1}{4} p_{\mu\nu} p^{\mu\nu}, \quad Q = \frac{1}{4} p_{\mu\nu} p^{*\mu\nu} \tag{15}$$

Avînd relația

$$L_2 - H_2 = \frac{1}{2} p_{\mu\nu} f^{\mu\nu},$$

H_2 se poate deduce ori de cîte ori se cunoaște L_2 și invers. Ecuațiile cîmpului (5) și (6) rezultă din principiul variațional scris sub forma

$$\delta \left\{ -\frac{1}{4\pi} \int \left[H_2 + \left(p^{\mu\nu}_{,\nu} - \frac{4\pi}{c} j^{\mu} \right) A_{\mu} \right] \mathrm{d}_4 x + L_3 \right\} = 0, \tag{16}$$

unde se vede că A_{μ} joacă rolul multiplicatorilor lui Lagrange.

Folosind acest formalism I n f e l d [5] și [6], a arătat că se poate determina funcția H_2 dacă impunem condiția ca $f_{\mu\nu}$ să nu prezinte nici o singularitate și admitem caracterul selfdual al teoriei cîmpului. Astfel hamiltoniana cea mai simplă este

$$H = \frac{1}{2} \log (1 + P)$$

și

$$f_{\mu\nu} = \frac{p_{\mu\nu}}{1 + P}, \quad p_{\mu\nu} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4F}}{2F} f_{\mu\nu},$$

unde semnul din fața radicalului se alege astfel ca să asigurăm continuitatea componentelor cîmpului. Punctele critice sînt definite prin $1 + 4F = 0$ care definesc o suprafață. Deoarece la distanțe mari $p_{\mu\nu} \to f_{\mu\nu}$ putem spune că suprafața $F = -1/4$ înconjoară sarcina, în interior trebuind să luăm semnul minus.

În cazul unei sarcini punctiforme izolate scriind

$$H = \frac{b^2}{2} \log \left(1 + \frac{P}{b^2} \right)$$

și punînd $P = D^2$ unde

$$D_r = \frac{e}{r^2},$$

obținem

$$E_r = \frac{e}{r_0^2} \frac{x^2}{1 + x^4} \quad \text{unde} \quad x = \frac{r}{r_0}, \; r_0 = \sqrt{\frac{e}{b}}.$$

Densitatea sarcinilor libere este

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \nabla \vec{E} = \frac{e}{4\pi r_0^2} \frac{4x}{(1 + x^4)^2}$$

și integrala lui ρ extinsă asupra spațiului întreg ne dă o valoare finită egală cu e. Potențialul electrostatic este

$$V(r) = \int_r^\infty E_r dr = \frac{e}{r_0} \int_x^\infty \frac{y^2}{1+y^4} dy,$$

astfel că, pentru $r = 0$,

$$V(0) = \frac{e}{r_0} \frac{\pi\sqrt{2}}{4},$$

iar energia totală este finită

$$W_0 = \frac{e^2}{r_0} \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

unde r_0 este « raza » electronului, iar b este o constantă universală numită « cîmpul absolut », care uneori este luată chiar egală cu unitatea. Masa electronului este definită ca fiind legată de energia proprie a cîmpului singularității deci de origine electromagnetică și considerată ca fiind distribuită în cîmpul înconjurător.

În concluzie, aceste cercetări au arătat că se pot generaliza ecuațiile lui Maxwell astfel ca energia proprie unei sarcini punctiforme să rămînă finită. Însă sînt posibile o infinitate de astfel de generalizări fiecare din ele conducînd la o altă « structură » a electronului. Toate aceste generalizări păstrează valabilitatea ecuațiilor lui Maxwell pentru cîmpul « extern » electronului și expresia forței lui Lorentz produs de un cîmp extern asupra electronului. Aceste generalizări conduc însă la electrodinamici neliniare pentru care nu mai e valabil principiul suprapunerii cîmpurilor, ceea ce conduce la dificultăți serioase în privința cuantificării acestor cîmpuri și pe de altă parte, nu ne dă nici o indicație asupra structurii efective a electronului, deci a spinului.

1 *d*) Considerînd formalismul dezvoltat de B o r n. se poate obține o variantă liniară a generalizării ecuațiilor lui Maxwell, după cum a arătat F. B o p p [8], [9] și [10], considerînd pentru cîmp densitatea lagrangeană de forma

$$L_2 = L_2(f_{\mu\nu}; f_{\mu\nu,\gamma}, \ldots), \tag{17}$$

în care intervin derivatele cîmpului, definind în acest caz

$$p_{\mu\nu} = 2\frac{\delta L_2}{\delta f_{\mu\nu}} = 2\left\{\frac{\partial L_2}{\partial f_{\mu\nu}} - \left(\frac{\partial L_2}{\partial f_{\mu\nu,\gamma}}\right)_{,\gamma} + \ldots\right\}, \tag{18}$$

ecuațiile cîmpului vor fi tot de forma (5) și (6) unde j_μ este definit prin (3).

Anume, reluînd ideea formulată inițial de E. C. G. S t u e c k e l b e r g [11], B o p p consideră

$$L_2 = -\frac{1}{4}\left(f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} + \frac{1}{\varkappa^2} f_{\mu\nu,\gamma} f^{\mu\nu}_{,\gamma}\right), \; L_3 = A_\mu \, j^\mu, \tag{19}$$

de unde rezultă

$$p_{\mu\nu} = f_{\mu\nu} - \frac{1}{\varkappa^2} \Box f_{\mu\nu}. \tag{20}$$

Considerînd cîmpul $p_{\mu\nu}$ maxwellian satisfăcînd ecuațiile de forma (5) și (6), abaterea de la cîmpul maxwellian va fi dată de tensorul «polarizare»

$$m_{\mu\nu} = p_{\mu\nu} - f_{\mu\nu} = -\frac{1}{\varkappa^2}\Box f_{\mu\nu} \tag{21}$$

și de curentul respectiv $\frac{x^2 c}{4\pi} U_\nu$, astfel că

$$f^{\mu\nu}_{,\nu} = \varkappa^2 U^\mu . \tag{22}$$

Din

$$p^{\mu\nu}_{,\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu , \quad p_{\mu\nu} = \Phi_{\nu,\mu} - \Phi_{\mu,\nu} , \tag{23}$$

care reprezintă ecuațiile cîmpului Maxwell-Lorentz ale unui electron punctiform și din (21), (22) deducem ecuațiile care definesc 4-vectorul U_μ.

$$\Box U_\mu - \varkappa^2 U_\mu = -\frac{4\pi}{c} j_\mu \quad \text{și} \quad U^\nu_{,\nu} = 0 , \tag{24}$$

care este o ecuație de tip Gordon-Klein. Din principiul variațional, ținînd seama de ecuațiile (19), (21) și (22), deducem

$$m^{\mu\nu}_{,\nu} = -\varkappa^2 U^\mu + \frac{4\pi}{c} j^\mu , \; m_{\mu\nu} = U_{\nu,\mu} - U_{\mu,\nu} , \tag{25}$$

care reprezintă ecuațiile unui cîmp Proca-Yukawa produs de un mezon neutru punctiform.

Cîmpul $f_{\mu\nu}$ rezultă deci, conform relației (21), din substracția unui cîmp maxwellian $p_{\mu\nu}$ și a unui cîmp mezonic $m_{\mu\nu}$ care au o sursă punctiformă comună, de aceea teoria aceasta este cunoscută și sub numele de teoria «cîmpului substractiv». Din cauză că cele două cîmpuri sînt substractive, cîmpul $f_{\mu\nu}$ este finit în singularitate.

Avînd

$$f_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu} , \; A^\mu_{,\mu} = 0, \tag{26}$$

rezultă că

$$A_\mu = \Phi_\mu - U_\mu . \tag{27}$$

Deoarece

$$\Box \Phi_\mu = -\frac{\pi 4}{c} j_\mu , \tag{28}$$

din (27) și (24) rezultă că avem

$$U_\mu = -\frac{1}{\varkappa^2}\Box A_\mu . \tag{29}$$

Ecuația la care satisfac potențialele A_μ este de forma

$$\left(1 - \frac{1}{\varkappa^2}\Box\right)\Box A_\mu = -\frac{4\pi}{c} j_\mu . \tag{30}$$

Menționăm de altfel că lagrangeanele (19) pot fi scrise sub o formă mai explicită

$$L_2 = L_2' - L_2'' \quad , \quad L_3 = L_3' - L_3'' ,$$

unde

$$L_2' = L_0 = -\frac{1}{4} p_{\mu\nu} p^{\mu\nu} \quad , \quad L_2'' = -\frac{1}{4} m_{\mu\nu} m^{\mu\nu} - \frac{\varkappa^2}{2} U_\mu U^\mu ,$$

$$L'_3 = \Phi_\mu j^\mu \quad , \quad L_3'' = U_\mu j^\mu ,$$

care permite obținerea directă a ecuațiilor celor două cîmpuri care intervin în această teorie.

În mod corespunzător tensorul energie-impuls al cîmpului va fi

$$T_{\mu\nu} = T'_{\mu\nu} - T''_{\mu\nu} , \tag{31}$$

unde

$$T'_{\mu\nu} = p_{\mu\lambda} p^\lambda_\nu - \delta_{\mu\nu} L_2' , \tag{32}$$

$$T''_{\mu\nu} = m_{\mu\lambda} m^\lambda_\nu - \varkappa^2 U_\mu U_\nu - \delta_{\mu\nu} L_2'' ,$$

astfel că ecuația (11) rămîne valabilă.

În cazul static, din (24) și (28), obținem

$$\Delta\varphi' = -4\pi e\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad , \quad (\Delta - \varkappa^2)\,\varphi'' = -4\pi e\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) ,$$

sau în afară de singularități

$$\Delta\,\varphi' = 0 \quad , \quad (\Delta - \varkappa^2)\,\varphi'' = 0 , \tag{33}$$

de unde rezultă că

$$\varphi' = \frac{e}{r} \quad , \quad \varphi'' = \frac{e}{r} e^{-\varkappa r}, \tag{34}$$

ultimul fiind un potențial Yukawa.

Deci potențialul scalar al cîmpului $f_{\mu\nu}$ va fi

$$\Delta\,\varphi + \varkappa^2\,\varphi'' = 0, \quad \varphi = \varphi' - \varphi'' = e\,\varphi_0(r) = e\,\frac{1 - e^{-\varkappa r}}{r} , \tag{35}$$

care în centrul singularității ($r = 0$) este finit și la distanțe mari de singularitate se confundă cu cîmpul coulombian, ceea ce conduce la o energie proprie finită

$$W_0 = \frac{1}{4}\,\varkappa e^2 ,$$

care se poate calcula fie din

$$W_0 = -\int T_{44}\, \mathrm{d}_3\, \varkappa , \tag{36}$$

fie din

$$W_0 = \frac{1}{2}\int \rho\,\varphi\,\mathrm{d}_3\,\varkappa\,, \tag{37}$$

unde ρ se poate deduce din ecuația

$$\Delta\varphi + \varkappa^2\varphi'' = 0 \quad \text{adică} \quad \nabla\vec{E} = \varkappa^2\varphi'' = e\frac{\varkappa^2}{r}e^{-\varkappa r}\,, \tag{38}$$

deci

$$W_0 = \frac{1}{2}\int \rho\,\varphi\,d_3\,\varkappa = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^2\,\frac{\varkappa^2}{4\pi}\,\frac{e^{-\varkappa r}}{r}\,\frac{1-e^{-\varkappa r}}{r}\,4\pi\,r^2\,\mathrm{d}r =$$

$$= \frac{e^2\,\varkappa}{2}\int_0^\infty (e^{-\varkappa r} - e^{-2\varkappa r})\,\mathrm{d}r = \frac{\varkappa}{2}e^2\,.$$

Prin urmare, masa de repaus a electronului va fi dată de relația

$$m_0\,c^2 = \frac{\varkappa}{4}\,e^2\,.$$

Deoarece pentru mezon avem

$$m_\varkappa = \frac{h\varkappa}{2\pi c}\,,$$

rezultă că obținem

$$\frac{m_\varkappa}{m_0} = \frac{4hc}{2\pi e^2} = \frac{4}{\alpha} = 4.137\,, \tag{39}$$

ceea ce conduce la o valoare prea mare pentru m_n.

Teoria poate fi remediată, după cum a arătat L. de Broglie [12] și [13] considerînd mai general că electronul este în interacție cu două cîmpuri mezonice de constantă $\varkappa_1$, $\varkappa_2$. În locul lagrangeanului (19) consideră

$$L_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\,\frac{1}{\varkappa_1^2+\varkappa_2^2}\,f_{\mu\nu,\gamma}f^{\mu\nu}_{,\gamma} + \frac{1}{2}\,f_{\mu\nu}f^{\mu\nu} + \frac{\varkappa_1^2\varkappa_2^2}{\varkappa_1^2+\varkappa_2^2}\,A_\mu A_\mu\right], \tag{40}$$

menținînd valabile ecuațiile (26) și deci (5), de asemenea

$$L_3 = \frac{\varkappa_2^2-\varkappa_1^2}{\varkappa_2^2+\varkappa_1^2}\,A_\mu\,j^\mu\,, \tag{41}$$

unde 4-curentul este considerat de forma (3). Din principiul variațional se obține în acest caz ecuația

$$\frac{1}{\varkappa_1^2+\varkappa_2^2}\,f^{\mu\nu}_{,\nu\gamma} - f^{\mu\nu}_{,\nu} + \frac{\varkappa_1^2\varkappa_2^2}{\varkappa_1^2+\varkappa_2^2}\,A^\mu = \frac{4\pi}{c}\,\frac{\varkappa_2^2-\varkappa_1^2}{\varkappa_2^2+\varkappa_1^2}\,j^\mu. \tag{42}$$

Punînd

$$A^\alpha = A^\alpha_{(1)} + A^\alpha_{(2)}\,, \tag{43}$$

unde

$$(\Box + \varkappa_1^2)\, A^{\alpha}_{(1)} = \frac{4\pi}{c}\, j^{\alpha}$$

$$(\Box + \varkappa_2^2)\, A^{\alpha}_{(2)} = -\frac{4\pi}{c}\, j^{\alpha}\,, \tag{44}$$

atunci avem

$$(\Box + \varkappa_1^2)(\Box + \varkappa_2^2)\, A^{\alpha} = \frac{4\pi}{c}(\varkappa_2^2 - \varkappa_1^2)\, j^{\alpha} \tag{45}$$

și

$$f^{\mu\nu}_{,\nu} = -\Box A^{\mu},$$

se vede că ecuația (42) se verifică.

Tensorul impuls-energie va fi de forma

$$T^{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} L_2 - \frac{\partial L_2}{\partial A^{\alpha}_{,\mu}} A^{\alpha}_{,\nu} - \frac{\partial L_2}{\partial A^{\alpha}_{,\beta\mu}} + \frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left(\frac{\partial L_2}{\partial A^{\alpha}_{,\mu\beta}}\right) A^{\alpha}_{,\nu} =$$

$$= \delta_{\mu\nu}\left[\frac{1}{4}\frac{1}{\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2} f_{\alpha\beta,\gamma} f^{\alpha\beta}_{,\gamma} + \frac{1}{4} f_{\alpha\beta} f^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\frac{\varkappa_1^2 \varkappa_2^2}{\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2} A_{\alpha} A^{\alpha}\right] - \tag{46}$$

$$- f_{\alpha\mu} A^{\alpha}_{,\gamma} + \frac{1}{\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2}\left[\frac{1}{2}(f_{\alpha\beta,\,\mu\beta} + f^{\alpha\mu}_{,\beta\beta})\, A^{\alpha}_{,\nu} - \frac{1}{2}(f_{\alpha\beta,\mu} + f_{\alpha\beta,\,\beta})\, A^{\alpha}_{,\beta\nu}\right].$$

Cazul simplu al unui cîmp substractiv se obține considerînd

$$\varkappa_2 \gg \varkappa_1 \text{ și } \varkappa_1 \simeq 0. \tag{47}$$

În acest caz avem

$$W_0 = -\int T_{44}\, \mathrm{d}_3 x = -\int\left[\frac{1}{2}\frac{1}{\varkappa^2} f_{i4,j} f^{i}_{4,j} + \frac{1}{2} f_{i4} f^{i}_{4}\right] \mathrm{d}_3 x =$$

$$= \frac{1}{2}\int E^2 \mathrm{d}_3 x + \frac{1}{2}\frac{1}{\varkappa^2}\int (\Delta\varphi)^2\, \mathrm{d}_3 x,$$

ar din ecuațiile (44) rezultă că avem

$$\Delta\varphi_1 = \varkappa_1^2 \varphi_1 - 4\pi\rho', \qquad \Delta\varphi_1 = -4\pi\rho',$$
$$\text{respectiv}$$
$$\Delta\varphi_2 = \varkappa_2^2 \varphi_2 + 4\pi\rho', \qquad \Delta\varphi_2 = \varkappa^2 \varphi_2 + 4\pi\rho',$$

deci vom avea conform ecuației (43)

$$\Delta\varphi = \varkappa_1^2 \varphi_1 + \varkappa_2^2 \varphi_2 \quad \text{respectiv} \quad \Delta\varphi = \varkappa^2 \varphi_2.$$

Prin urmare

$$W_0 = \frac{1}{2}\int E^2\, \mathrm{d}_3 x + \frac{1}{2\varkappa^2}\int (\varkappa^2 \varphi_1)^2 \mathrm{d}_3 x = \frac{e^2 \varkappa}{2}, \tag{48}$$

ceea ce conduce la o masă mezonică diferită de (39)

$$\frac{m_\varkappa}{m_0} = 2.137 = 174,$$

care este sensibil egală cu masa mezonului π.

Din (48) rezultă că

$$m_0 c^2 = \frac{e^2 \varkappa}{2},$$

de unde

$$\frac{1}{\varkappa} = \frac{e^2}{2 m_0 c^2} = 1{,}40 \cdot 10^{-13}\, cm,$$

deci $1/\varkappa$ are dimensiunea unei lungimi și joacă rolul «razei» clasice a electronului, cîmpul suferind o variație importantă pe intervalul acesta.

Se verifică ușor că în acest caz avem pentru cîmpul unei sarcini cu simetrie sferică

$$\int T_{11}\, \mathrm{d}_3 x = \int T_{22}\, \mathrm{d}_3 x = \int T_{33}\, \mathrm{d}_3 x = 0,$$

deci această schemă a teoriei cîmpului substractiv satisface condiției Laue de stabilitate a electronului, avînd în punctele externe sarcinii punctiforme

$$T^{\mu\nu}_{,\mu} = 0.$$

Ecuația de mișcare a electronului se va scrie

$$T^{\mu\nu}_{,\nu} = - f^{\alpha\mu} \frac{\varkappa_2^2 - \varkappa_1^2}{\varkappa_2^2 + \varkappa_1^2}\, j^\alpha \quad \text{resp.} \quad T^{\mu\nu}_{,\nu} = - f^{\alpha\mu}\, j^\alpha$$

În concluzie, putem enunța în mod general că ipoteza cîmpului substractiv constă în a admite că orice particulă electrizată este în interacție în același timp cu mai multe cîmpuri de tip mezonic definite prin

$$\Box A_\mu^{(i)} + \varkappa_i^2 A_\mu^{(i)} = \frac{4\pi}{c}\, j_\mu^{(i)}, \tag{49}$$

unde

$$\varkappa_i = \frac{4\pi}{c} \mu_i c, \quad j_\mu^{(i)} = \varepsilon_i\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)\, \dot{\xi}_\mu,$$

și μ_i înseamnă masa proprie a mezonului (i), iar ε_i este «sarcina mezonică» (i) legată de crearea cîmpului mezonic respectiv, cu condiția ca potențialul cîmpului total să fie dat de

$$A_\mu = \Sigma_i A_\mu^{(i)} \text{ și } \Sigma_i \varepsilon_i = 0. \tag{50}$$

Potențialul A_μ se poate defini și printr-o ecuație de forma

$$\Pi_i (\Box + \varkappa_i^2)\, A_\mu = \frac{4\pi}{c} K J_\mu, \tag{51}$$

unde J_μ este curentul total. Astfel în cazul cînd avem două cîmpuri ($i = 1,2$) avem

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0,\ K = \varkappa_1^2 + \varkappa_2^2,\ J_\mu = \frac{\frac{\varepsilon_1}{\varkappa_1^2} + \frac{\varepsilon_2}{\varkappa_2^2}}{\frac{1}{\varkappa_1^2} + \frac{1}{\varkappa_2^2}} \delta(\vec{r} - \vec{r_0})\, \dot{\xi}_\mu$$

și în cazul cel mai simplu al unui electron se ia $\varepsilon_1 = e$ sarcina electronului, iar $\varkappa_1 \simeq 0$. Energia proprie finită a particulei electrizate va fi

$$W_0 = -\frac{1}{4} \sum_i \sum_j \varepsilon_i \varepsilon_j \frac{\varkappa_i + \varkappa_j^2}{\varkappa_i + \varkappa_j}.$$

Particula punctiformă este echivalentă cu o distribuție de sarcină concentrată în jurul singularității cu densitatea

$$\rho(r) = -\sum_i \frac{\varepsilon_i}{4\pi} \varkappa_i^2 \frac{e^{-\varkappa_i |r - r_0|}}{|r - r_0|},$$

care crează potențialul

$$\varphi(\nu) = \sum_i \varepsilon_i \frac{e^{-\varkappa_i r}}{r}$$

Menționăm că energia proprie se poate calcula și prin $W_0 = \frac{1}{2} \int \rho \varphi \mathrm{d}_3 x$.

Prin urmare, admițînd că particula elementară considerată punctiformă este în interacție cu mai multe cîmpuri, adică în afară de cîmpul electromagnetic (în cazul unei particule electrizate) cu unul sau mai multe cîmpuri mezonice, care sînt într-un fel fuzionate într-un *cîmp unic*, ajungem la o valoare finită a valorii proprii, la o anumită extindere a sarcinii și deci la atribuirea unei « raze », precum și la asigurarea stabilității particulei, eliminînd dificultățile semnalate în teoria clasică a lui Lorentz.

Teoria cîmpului substractiv fiind liniară poate fi cuantizată fără nici o dificultate prin metodele obișnuite.

Pentru scrierea ecuației de mișcare a electronului, B o p p [8], [9] și [10], a arătat că ele se pot determina prin condiția că numai cîmpul, și nu singularitatea, poartă energie și impuls, și forțele Lorentz ale cîmpului intern și extern sînt în echilibru. Această anulare a forțelor Lorentz în punctele singulare se obține scriind forța de radiație după procedeul indicat de D i r a c (a se vedea 1, *b*).

2. *Teoria cîmpurilor nelocalizabile.* Pentru a elimina dificultățile datorite valorilor infinite pentru energie proprie, masă proprie și sarcină ce provin din faptul că electronul este considerat ca o singularitate punctiformă s-a căutat să se dezvolte o teorie relativist invariantă a singularităților extinse considerînd pentru densitatea de curent-sarcină o distribuție răspîndită în spațiu care nu mai este rigid fixă față de centrul electronului în mișcare de-a lungul liniei sale de univers ci își schimbă forma după cum se schimbă mișcarea electronului. Aceasta se poate obține înlocuind în expresia (3) a densității

de 4-curent funcția improprie $\delta_4(x_\nu - \xi_\nu)$ printr-o funcție de structură $f[(x_\nu - \xi_\nu)^2]$ convenabil aleasă astfel ca să aibă valori diferite de zero numai pentru $(x_\nu - \xi_\nu)^2 < r_0^2$, unde r_0 este raza clasică a electronului. Anume cîmpul propriu al electronului poate fi definit printr-o ecuație de forma

$$\Box A_\mu(\vec{x}) = \frac{4\pi}{c} j_\mu(\vec{x}) = \frac{4\pi}{c}\int f[(\vec{x} - \vec{\xi})^2] \frac{d\xi_\mu}{d\tau_i} d\tau_i, \tag{52}$$

sau printr-o ecuație de forma

$$F(\Box) A_\mu(\vec{x}) = \frac{4\pi}{c}\int \delta_4(x_\nu - \xi_\nu) \dot{\xi}_\mu d\tau, \tag{53}$$

care este de tipul ecuației (51) în cazul cînd $F(\Box) = \Pi_i(\Box - \varkappa_i^2)$. De altfel de la ecuația (52) la ecuația (53) se poate trece prin intermediul unei transformări Fourier. Conform unei terminologii încetățenite o astfel de ecuație derivă dintr-un principiu variațional care se caracterizează prin faptul că acțiunea este nelocalizată, deși cîmpul este bine localizat, ea conduce la densități de energie și moment nelocalizabil.

Din punct de vedere clasic această teorie a fost dezvoltată în particular de B o p p [14] asupra unor ecuații de forma (53). O formulare relativist invariantă sub forma (52) a fost dată de D. I. B l o h i n ț e v [15] și R. P e i e r l s, M c. M a n u s [16]. Diferite modele de electroni cu sarcini extinse au fost studiate de G. I. Y e v i c k [17] și A. P a i s, G. E. U h l e n b e c k [18].

2*a*) Expresia potențialului retardat al unui electron punctiform se poate scrie sub forma

$$A_\mu^{\text{ret}} = \frac{e\dot{\xi}_\mu}{c\dot{\xi}_\mu(x_\mu - \xi_\mu)},$$

cu condiția $x_4 - \xi_4 > 0$ și

$$(x_\mu - \xi_\mu)(x_\mu - \xi_\mu) = 0.$$

Folosind relația

$$\int f(\tau)\delta[g(\tau)] d\tau = \int \frac{f(\tau)}{\dot{g}(\tau)} \delta[g(\tau)] dg(\tau) = \frac{f(\tau)}{\dot{g}(\tau)},$$

D i r a c [1] a scris expresia de mai sus sub forma

$$A_\mu^{\text{ret}} = \frac{2e}{c}\int \dot{\xi}_\mu \delta(\sigma) d\tau, \tag{54}$$

unde integrarea se face în conul de lumină posterior lui x

$$\sigma(\tau) \leqslant 0 \quad , \quad \sigma = \frac{1}{c^2}[(x_\mu - \xi_\mu(\tau))(x_\mu - \xi_\mu(\tau)]. \tag{55}$$

Această expresie a potențialelor maxwelliene a fost generalizată de B o p p [14] prin înlocuirea funcției improprii $\delta(\sigma)$ printr-o funcție improprie arbitrară $f(\sigma)$ astfel că

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma) d\sigma = 1.$$

Prin urmare fie

$$A_\mu(x) = \frac{2e}{c}\int_{-\infty}^{\tau_0} \dot{\xi}_\mu(\tau) f(\sigma)\, d\tau = \frac{2e}{c}\int_{-\infty}^{0} \frac{\dot{\xi}_\mu}{\dot{\sigma}} f(\sigma)\, d\sigma, \tag{56}$$

pe lîngă condiția

$$A_{\mu,\,\mu} = 0,$$

care este echivalentă cu $\sigma_0 = 0$, $t_0(\tau_0) < t$.

În acest caz ecuația care definește potențialul nu va mai fi o ecuație cu derivate parțiale, ci o ecuație integrală de forma

$$(K, A_\mu) = \int K(x, x') A_\mu(x')\, d_4x' = -\frac{4\pi}{c} j_\mu, \tag{57}$$

unde j_μ este definit ca deobicei prin (3).

Înmulțind ecuația de mai sus cu $f\left[\frac{1}{c^2}(x_\mu^0 - x_\mu')^2\right]$ și integrînd pe conul posterior lui x^0, obținem

$$f\left[\frac{1}{c^2}(x_\mu^0 - x_\mu'^2)\right] K(x,\ x')\, d_4x' = -4\pi\,\delta\,(\vec{x^0} - \vec{x}), \tag{58}$$

de unde se vede că f și K sînt nuclee reciproce pentru potențialul retardat.

Folosind reprezentarea integrală

$$\begin{aligned} K(x, x') &= -\frac{1}{(2\tau)^4}\int \widetilde{K}(k^2)\, e^{ik_\mu (x_\mu - x_\mu')}\, d_4k, \\ \delta(x - x') &= -\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{ik_\mu (x_\mu - x_\mu')}\, d_4k, \end{aligned} \tag{59}$$

și înlocuind în (57), ținînd seama de (3), aflăm

$$-\frac{2\pi i c}{\widetilde{K}(k^2)} = \int e^{-ik_\mu [x_\mu - \xi_\mu)} f(\sigma)\, d_4x. \tag{60}$$

Se verifică ușor, ținînd seama de funcțiile $D(x)$ și $\Delta(x)$ cu ajutorul cărora se exprimă funcțiile Green ale ecuației undelor și a ecuației lui Klein-Gordon [19], și de (59), (60), că dacă

$$f(\sigma) = \delta(\sigma) \text{ avem } \widetilde{K}(k^2) = (-k_\mu^2) \text{ deci } (K, A_\mu) = \Box A_\mu \tag{61}$$

și dacă

$$\begin{aligned} f(\sigma) &= \frac{\varkappa c}{2}\frac{J_1(\varkappa c\sqrt{-\sigma})}{\sqrt{-\sigma}} \text{ avem } \widetilde{K}(k^2) = (-k_\mu^2)\left[1 - \frac{1}{\varkappa^2}(-k_\mu^2)\right] \\ &\text{deci } (K, A_\mu) = \Box\left(1 - \frac{1}{\varkappa^2}\Box\right) A_\mu. \end{aligned} \tag{62}$$

Adică, în cazul special din urmă, ecuația (57) devine identică cu ecuația (30).

Introducînd notația

$$\widetilde{K}(k^2) = (-k_\mu^2)\,\widetilde{K}_0\,(k^2)$$

și folosind reprezentarea

$$\varepsilon(x, x',) = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int \widetilde{K}_0(k^2)\, e^{ik_\mu (x_\mu - x'_\mu)}\, \mathrm{d}_4 k), \tag{63}$$

cîmpul poate fi reprezentat prin tensorii

$$f_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}, \quad p_{\mu\upsilon} = (\varepsilon, f_{\mu\nu}) = \int \varepsilon, (x, x')\, f_{\mu\nu}(x')\, \mathrm{d}_4\, x'. \tag{64}$$

Se verifică ușor că ecuațiile (23) rămîn valabile dacă potențialele Φ_μ sînt definite prin

$$\Phi_\mu = (\varepsilon, A_\mu). \tag{65}$$

Deci potențialul electrostatic va fi definit prin

$$\Delta(\varepsilon, \varphi) = -4\pi e\, \delta(\vec{r}),$$

sau

$$k_\mu^2\, \widetilde{\varepsilon}(k^2)\, \widetilde{\varphi}(k) = 4\pi e,$$

de unde

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{2}{\pi}\frac{e}{r}\int_0^\infty \frac{\sin kr}{k\, \widetilde{\varepsilon}(\vec{k}, 0)}\, \mathrm{d}\vec{k},$$

deci

$$\frac{1}{\widetilde{\varepsilon}(\vec{k}, 0)} = -\frac{1}{e}\, k\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\int \varphi(r) \cos kr\, \mathrm{d}\vec{r}.$$

Prin urmare

$$W_0 = -\int T_{44}\, \mathrm{d}v = -\frac{1}{2\pi}\int \widetilde{T}_{44}(0, k_0)\, e^{-ikto}\, \mathrm{d}k_0.$$

Din expresia tensorului impuls-energie se deduce că

$$W_0 = \frac{1}{2}\, e\, \varphi(0),$$

deci se obține o energie proprie finită.

Ecuația de mișcare se poate scrie sub forma

$$T_{\mu\nu,\nu} = f_{\mu\nu} j^\nu$$

punînd condiția că singularitatea ce reprezintă electronul nu ia parte la schimbul de energie. Deci printr-o sferă din jurul singularității nu trece nici un flux de energie sau de impuls, ceea ce înseamnă că forța Lorentz mijlocie se anulează în interiorul unei sfere mici din jurul singularității

$$F_\mu = \int f_{\mu\nu}\, j^\nu\, \mathrm{d}v = 0.$$

Forța ce se exercită asupra electronului va fi deci

$$\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v}_{/c} \times B),$$

unde cîmpul se calculează cu ajutorul formulei

$$f_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu} = \frac{4e}{c^4}\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left[\frac{(x_\nu - \xi_\nu)\,\dot{\xi}_\mu - (x_\mu - \xi_\mu)\,\dot{\xi}_\nu}{\dot{\sigma}}\right] f(\sigma)\mathrm{d}\tau.$$

Se află

$$\vec{F} = \frac{2e^2}{c^3}\int_{-\infty}^{t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{(t-t')\,\vec{\varphi}' - \left(1 - \frac{\vec{\varphi}\,\vec{\varphi}'}{c^2}\right)(\vec{r} - \vec{r}') - \frac{1}{c^2}\vec{\varphi}\,(\vec{r} - \vec{r}')\,\vec{\varphi}'}{\frac{1}{c^2}(\vec{r} - \vec{r}')\,\vec{\varphi}' - (t-t',)}\right) f(\sigma)\,\mathrm{d}t'.$$

Prin integrare prin părți și dezvoltînd în serie după $T = t - t'$ se obține într-o primă aproximație forța de inerție

$$\vec{F}_1 - = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m\vec{\varphi}}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{ unde } m = \frac{e^2}{c^2}\int_0^\infty f(-t^2)\,\mathrm{d}t,$$

iar în aproximația următoare se află forța de radiație, care are aceeași formă ca și în teoria lui Lorentz.

Se poate dezvolta deci pe această cale o teorie a cîmpului care urmează de aproape teoria maxwelliană cu avantajul că energia proprie este finită și masa este stabilă, înlăturînd dezavantajele semnalate de D i r a c [1]. Cîmpul electronului accelerat sub influența unei forțe externe se deformează, ceea ce conduce la o modificare a energiei proprii și a masei, dar în cazul de față prin încetarea interacției se restabilește cîmpul obișnuit, deci este asigurată stabilitatea [20].

În definițiile (57) și (64) se vede că intervin operatori integrali liniari și singulari care definesc o distribuție în sensul lui L. S c h w a r t z. Relațiile acestea pot fi interpretate ca orice transformări funcționale, (K, A) respectiv $(\varepsilon, f_{\mu\nu})$ introducînd funcții noi, adică un cîmp nou diferit de primul într-un domeniu finit din jurul singularității. Această intervenție a unei funcții de distribuție sau factor de formă, care definește transformarea funcțională, este caracteristică teoriilor de cîmpuri nonlocale. Ele conduc la o interacție nelocalizabilă între cîmpuri, adică la interacții care nu se mai referă la un singur punct în spațiu-timp.

Un astfel de cîmp se poate defini printr-un principiu variațional dat de B l o h i n ț e v [15] în care S_1 și L_1, precum și S_2 L_2 au forma obișnuită [$L_2 = L_0$, a se vedea (4)], iar

$$S_3 = \int \mathrm{d}_1 x \int A_\mu(x)\, D\left[(x_\mu - \xi_\mu)^2\right] j^\mu(\xi)\,\mathrm{d}_4\,\xi,$$

unde j_μ are expresia obișnuită (3). Admițînd relația (1)

$$f_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu},\quad A_{\mu,\mu} = 0,$$

din principiul variațional se obține ecuația cîmpului

$$f^{\mu\nu}_{,\nu} = \frac{4\pi}{c} e \int D\left[(x_\mu - \xi_\mu)^2\right]\dot{\xi}^\mu\,\mathrm{d}s,$$

unde ds este elementul de linie. Obținem

$$\Box A_\mu = -\frac{4\pi}{c} e \int D\left[(x_\mu - \xi_\mu)^2\right] \dot{\xi}_\mu \, ds, \tag{66}$$

care conduce la existența unei surse extinse. Ecuația se poate integra cu ajutorul funcției lui Green a ecuației undelor [19].

$$A_\mu = A^0_\mu + \int ds \int G\left[(x_\mu - \xi_\mu)^2\right] D\left[(x_\mu - \xi_\mu)^2\right] \dot{\xi}_\mu \, d_4\xi \,. \tag{67}$$

De asemenea, principiul variațional ne permite să obținem ecuația de mișcare care în cazul staționar conduce la aceleași rezultate ca și cele obținute de Dirac [1].

2*b*) Cîmpul descris de Peierls și Mc Manus [16] este derivat dintr-un principiu variațional în care lagrangeanul de interacție L_3 este de forma

$$L_3 = \frac{1}{2} \int \left\{ j^\mu(x), A_\mu(x) \right\} d_4 x, \tag{68}$$

unde paranteza reprezintă $\{a, b\} = ab + ba$ și se utilizează notația

$$A_\mu(x) = \int F\left[(x - x')^2\right] A_\mu(x') \, d_4 x', \tag{69}$$

care reprezintă transformata potențialului A_μ. $I_{ar} F\left[(x - x')^2\right]$ este factorul de formă, avînd

$$F(x_\mu^2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{ik_\mu x_\mu} \widetilde{F}(k_\mu^2, \lambda) \, d_4 k, \qquad \int F(x^2) \, d_4 x = 1, \tag{70}$$

unde transformata Fourier este de forma

$$\widetilde{F}(k_\mu^2, \lambda) = \frac{1}{(1 + \lambda^2 k_\mu^2)^2} \text{ sau } e^{-\lambda^4 (k_\mu^2)^2} \tag{71}$$

deci $\widetilde{F}(k_\mu, \lambda) = 1$, adică devine 1 cînd $\lambda \to 0$.

Electronul se consideră reprezentat prin ecuația lui Dirac, deci $j^\mu = ie\,\psi^+ \gamma^\mu \psi$. Luînd $\hbar = c = 1$ din principiul variațional, dacă L_1 este cel corespunzător ecuației lui Dirac și L_2 este de forma (4), obținem

$$\begin{aligned} &\Box A_\mu = -j_\mu, \\ &\left(\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right) \psi = \frac{ie}{2} \left\{ \gamma^\mu \psi, A_\mu \right\}, \\ &\psi^+ \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} \gamma^\mu - m \right) = -\frac{ie}{2} \left\{ A_\mu, \psi^+ \gamma^\mu \right\}. \end{aligned} \tag{72}$$

Aceste ecuații se pot scrie sub forma unor ecuații integrale cu ajutorul unor potențiale retardate și avansate [21] și [22], anume

$$A_\mu = A^c_\mu(x) + \int D^{ret}(x - x')\ j_\mu(x')\ \mathrm{d}_4 x',$$

$$\psi(x) = \psi^c(x) + \frac{e}{2i}\int S^{ret}(x - x')\left\{\gamma^\mu \psi(x'), A_\mu(x')\right\}\mathrm{d}_4 x', \tag{73}$$

$$\psi^+(x) = \psi^{+c}(x) + \frac{e}{2i}\int\left\{A_\mu(x'), \psi^+(x')\,\gamma^\mu\right\} S^{ret}(x - x')\,\mathrm{d}_4 x',$$

unde $A^c_\mu(x)$ reprezintă potențialul undei convergente, iar $D^{ret}(x - x')$ și $S^{et}_{(x-x')}$ sînt funcțiile Green ale ecuațiilor de mai sus. La fel se mai pot scrie ecuații analoge cu ajutorul undelor divergente și funcțiile Green $D^{av}(x - x')$ și $S^{av}(x - x')$.

Cuantizarea cîmpului se face — după cum a arătat J. Rayski [23] — prin metoda directă a matricei S a lui Heisenberg, construită pentru surse extinse.

Un alt tip de interacție nelocalizabilă este considerată de Rayski [23] cu un lagrangean de forma

$$L_3 = j^\mu A_\mu,$$

unde

$$j^\mu = \frac{ie}{2}[\underline{\psi}^+, \gamma^\mu \underline{\psi}], \tag{74}$$

$\underline{\psi}$ și $\underline{\psi}^+$ fiind funcții de undă spinoriale transformate după tipul (69) și (70). Avînd în vid

$$\underline{\psi}^0(\varkappa) = \widetilde{F}(-m^2, \lambda)\,\underline{\psi}^0(\varkappa),$$

rezultă că în vid $j^{(0)}_\mu$ diferă de cel uzual prin renormalizarea sarcinii

$$e' = e\,\widetilde{F}^2(-m^2, \lambda).$$

În particular, se ia analog cu (71)

$$\widetilde{F}(k^2_\mu, \lambda) = \frac{1}{1 + \lambda^4 (k^2_\mu + m^2)^2} \text{ sau } e^{-\lambda^4 (k^2_\mu + m^2)^2}. \tag{75}$$

În aceste cazuri

$$\lim_{\lambda \to 0} \widetilde{F}(0, \lambda) = 1.$$

În mod asemănător, din principiul variațional se obțin ecuații de forma (72) echivalente cu un sistem de ecuații integrale. Pentru cuantizare se folosește la fel metoda matricei S a lui Heisenberg.

Cîmpurile cu interacție nelocalizată au fost studiate de diverși autori în cazuri și mai generale [24], [25], [26] și [27] discutîndu-se factorul de formă

din punctul de vedere al condițiilor generale la care trebuie să satisfacă. În deosebi J. R z e w u s k i [28] și [29], a arătat echivalența dintre această teorie și metoda de tăiere a lui Feynmann din electrodinamica cuantică și a studiat reprezentarea prin ecuații integro-diferențiale a acestei teorii, arătînd că se poate defini tensorul energie-impuls prin operatori integrali [30].

2*c*) O altă teorie nonlocală a cîmpului a fost formulată de B o r n [31], [32] și [33], pe baza așa numitului principiu al reciprocității, conform căreia legile naturii sînt simetrice față de spațiu-timp și impuls-energie, adică sînt invariante față de transformarea

$$x_\mu \to p_\mu \ , \ p_\mu \to - x_\mu \ ,$$

unde

$$p_\mu = i \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\text{se ia } \hbar = 1) \text{ și } x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \ (g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = 0, \ \mu \neq \nu ;$$

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = - 1, \ g_{44} = 1, \ g^{11} = g^{22} = g^{33} = - 1, \ g^{44} = 1).$$

Aceasta constituie o generalizare a relativității considerînd că în procesele atomice metrica spațiului (x_μ) nu este independentă de metrica spațiului impulsului (p_μ), ci împreună determină un operator metric invariant relativist și reciproc în spațiul fazic 8-dimensional

$$S = x_\mu x^\mu + p_\mu p^\mu .$$

Pe baza acestui principiu general ecuațiile cîmpului sînt derivate dintr-un principiu variațional al cărui lagrangean este definit cu ajutorul operatorilor de cîmp $\mathcal{F} (\varkappa)$ care sînt funcții proprii ale operatorului metric S. În cazul particulelor de spin întreg

$$S (x, p) \mathcal{F} (x) = \left(- \frac{\partial^2}{\partial p_\mu \partial p^\mu} + p_\mu p^\mu \right) \mathcal{F} = s \mathcal{F}, \tag{76}$$

iar în cazul particulelor de spin semiîntreg

$$S (x, p) \mathcal{F} (\varkappa) = \left(\alpha^\mu p_\mu - i \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu} \right) \mathcal{F} = s \mathcal{F}, \tag{76'}$$

unde α_μ sînt matricele lui Dirac.

Ecuația (76) se poate integra trecînd la coordonate polare prin separarea variabilelor scriind $\mathcal{F} = \mathcal{F}_k (P) \ Y_k (\theta, \varphi, \omega)$ unde $P = p_\mu p^\mu$ $Y_k (\theta, \varphi, \omega)$ este funcția sferică 4-dimensională cu valorile proprii $k \ (k + 2)$, unde $k = 0, 1, 2, \ldots$ Considerînd condițiile la limită $\mathcal{F}_k \to 0$ pentru $P \to \infty$ găsim pentru $s = 2 \ (2 n - k)$

$$\mathcal{F}_k = P^{\frac{k}{2}} e^{-P/2} L_n^{k+1} (\mathrm{P}), \tag{77}$$

unde $L_n^{k+1} (\mathrm{P})$ este derivata de ordinul $k + 1$ a polinomului Laguerre $L_n (P)$ de ordinul n.

Operatorul lagrangean al cîmpului se ia de forma

$$L(x,x') = F(p, p')\,\rho(x, x'), \tag{78}$$

unde

$$F(p, p') = \mathcal{F}(p)\,\mathcal{F}(p'), \tag{79}$$

iar $\rho(x, x')$ este operatorul statistic al funcției de undă ce reprezintă cîmpul. Densitatea lagrangeanului ce intră în principiul variațional este elementul diagonal al operatorului lagrangean (78) ce se obține punînd $x = x'$. Ecuațiile cîmpului vor fi deci scrise sub formă operațională

$$F(p)\cdot\rho = 0\ ,\ F(p')\cdot\rho = 0, \tag{80}$$

unde $F(p) = F(p, p)$.

În cazul cîmpului electromagnetic, operatorul statistic este un tensor de ordinul doi în funcție de potențialul $A_\mu(x)$

$$\rho^\mu_\nu = \frac{1}{2} A^\mu(x)\, A_\nu(x'), \tag{81}$$

prin urmare va trebui să considerăm $\mathcal{F}(p)$ vectorial, adică în (78) va trebui să luăm $n = 2$ și $k = 1$. Se obține

$$F^\mu_\nu(p, p') = e^{-\frac{1}{2}(p^2+p'^2)}(p^\mu p'_\nu - \delta^\mu_\nu p^\lambda p'_\lambda). \tag{82}$$

Ecuațiile cîmpului vor fi deci, conform (80), de forma

$$e^{-p^2} p^2 A_\mu = 0,$$

sau

$$e^{-\Box}\,\Box A_\mu = 0, \tag{83}$$

ale căror soluții nu diferă de cele clasice maxwelliene, deoarece ecuația

$$e^{-\Box}\chi(x) = 0,$$

nu are soluții diferite de zero. Introducînd pseudopotențialele

$$B_\mu(x) = e^{-p^2} A_\mu(x), \tag{84}$$

se obține un cîmp maxwellian obișnuit.

Ca și în teoria neliniară Born-Infeld, cîmpul se va descrie prin tensorii

$$f_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}\ ,\quad p_{\mu\nu} = B_{\nu,\mu} - B_{\mu,\nu} = e^{-p^2} f_{\mu\nu} \tag{85}$$

rămînînd valabile ecuațiile (5), (6) și definind 4-curentul prin (3).

Ecuația potențialelor va fi în cazul unei sarcini punctiforme de forma

$$e^{-\Box}\,\Box A_\mu = \frac{4\pi}{c} j_\mu. \tag{86}$$

În cazul unui electron în mișcare uniformă avem deci

$$e^{-\Box}\,\Box\, A_\mu = \frac{4\pi}{c} V_\mu\, \delta\,(\vec{r}), \tag{87}$$

unde

$$\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}_e = \vec{x} - \vec{x}_0 - \vec{v}\,(t - t_0),$$

$\vec{x}_0$ fiind poziția electronului la momentul t_0.

Considerînd ecuația (87) sub forma generală [18]

$$F\,(P)\,\Phi\,(x) = 4\pi e\,\delta\,(\vec{x}), \tag{88}$$

integrarea se poate face folosind reprezentarea prin integrale Fourier. Avem folosind unități naturale, adică $p_\mu = \hbar \dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$,

$$F\,(P)\,\Phi\,(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\int F\,(p_\mu\, p^\mu)\,\tilde{\Phi}\,(p)\, e^{i\hbar p_\mu x^\mu}\, \mathrm{d}_4 p,$$

unde

$$\tilde{\Phi}(p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\int \Phi\,(x)\, e^{-i\hbar p_\mu x^\mu}\, \mathrm{d}_4 x.$$

Deoarece

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\int \delta\,(\vec{r})\, e^{-i/\hbar p_\mu x^\mu}\, d_4 x = \frac{1}{2\pi\hbar}\, e^{i/\hbar\, \vec{p}\,(\vec{x}_0 - \vec{v}t_0)}\, \delta\left(p_4 - \frac{\vec{v}\,\vec{p}}{c}\right),$$

avem

$$F\,(p_\mu p^\mu)\,\tilde{\Phi}\,(p) = \frac{2\dot{\rho}}{\hbar}\,\delta\left(p_4 - \frac{\vec{v}\,\vec{p}}{c}\right) e^{i/\hbar \vec{p}\,(\vec{x}_0 - \vec{v}t_0)},$$

deci

$$\Phi\,(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\int \tilde{\Phi}\,(p)\, e^{i/\hbar p_\mu x^\mu}\, d_4 p = \frac{2e}{(2\pi\hbar)^2}\int \frac{e^{-i/\hbar\, \vec{p}\,\vec{r}}}{F\left(\dfrac{\vec{v}\,\vec{p}}{c} - p^2\right)}\, \mathrm{d}\vec{p}.$$

Alegînd x_1 paralel cu $\vec{v}$, avem

$$\vec{k} = (p_1\,\alpha^{-1},\, p_2,\, p_3)\ ,\quad \vec{u} = (\alpha\, r_1,\, r_2,\, r_3),$$

deci

$$\Phi\,(x) = \frac{2e\alpha}{(2\pi\hbar)^2}\int \frac{e^{-i/\vec{k}\,\vec{x}}}{F\,(-k^2)}\, \mathrm{d}\vec{k} = \frac{4e\alpha}{(2\pi\hbar)^2\, u}\int_0^\infty \frac{\sin\dfrac{ku}{\hbar}}{F\,(-k^2)}\, k\, \mathrm{d}k. \tag{89}$$

Deoarece în această expresie generală trebuie să considerăm

$$F(P) = -\frac{P}{h^2} e^{-P/2b^2}, \tag{90}$$

unde vom scrie $h = ab$, a fiind o lungime, iar b o cantitate de mișcare elementară, rezultă, folosind expresia (89), că integrala ecuației (87) este

$$A_\mu(x) = \frac{4\pi\alpha\varrho_\mu e}{c\ a} Y\left(\frac{u}{a}\right), \tag{91}$$

unde

$$Y\left(\frac{u}{a}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{a}{u} \int_0^{u/a} e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

ar

$$B_\mu(\varkappa) = \frac{4\pi\alpha\varrho_\mu e}{c\ a} Z\left(\frac{u}{a}\right), \tag{92}$$

unde

$$Z\left(\frac{u}{a}\right) = \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{a}{u} \int_0^{u/a} e^{-y^2} dy.$$

Pentru u mare, cele două potențiale se reduc la $\frac{e\varkappa\varrho_\mu}{u}$ unde u înseamnă «distanța retardată» a punctului $(\vec{x}, t)$ de la linia descrisă de singularitate, deci coincid cu expresiile potențialelor din teoria lui Lorentz. Examinînd componenta A_μ se vede că ea este o modificare a potențialului coulombian, care coincide la distanțe mari cu acest potențial, iar pentru $u \to 0$ tinde spre o valoare finită. Energia proprie va fi

$$W_0 = m_0 c^2 = \frac{1}{2}\frac{e^2}{a} Y(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^2}{a}.$$

Se obține astfel o teorie unitară a electronului, considerat ca o singularitate a cîmpului electromagnetic, avînd masa de origine pur electromagnetică. Diferența față de cîmpul maxwellian constă în apariția factorului exponențial, de aceea se și numește cîmp de tip exponențial [18]. Considerînd cîmpul propriu al electronilor definit prin (91) și (92), găsim

$$L_1 = -\frac{1}{2}\int < F_{\mu\nu} A^\mu A'^\nu > \vec{dx} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{93}$$

iar lagrangeanul cîmpului va fi

$$L_2 = \frac{1}{2} < F_{\mu\nu} A^\mu_{(c)} A'^\nu_{(c)} > = \frac{1}{2} \frac{\partial A^\mu_{(c)}}{\partial x_\nu} e^{-\frac{p^2}{4b^2}} \frac{\partial A^\mu_{(c)}}{\partial x_\nu},$$

unde potențialele $A^\mu_{(c)}$ satisfac tot ecuația (86) fiind o soluție mai generală; diferența

$$A^\mu_{(c)} - A^\mu = A^\mu_{(r)}, \tag{94}$$

fiind cîmpul radiativ pur.

Din principiul variațional rezultă ecuațiile cîmpului și ecuațiile de mișcare, care pot fi scrise sub forma

$$\frac{d}{dt}(m\alpha\vec{v} + e\vec{A}_{(r)0}) = -e\left[(\nabla A^4_{(r)} - \frac{1}{c}\vec{v}\vec{A}_{(r)})\right]_0 . \tag{95}$$

unde indicele 0 înseamnă că se ia valoarea funcției în singularitatea x_0, iar

$$m = 3\,m_0 = \lambda\frac{e^2}{\alpha c} \text{ și } \lambda \gtrsim 1 .$$

Ecuațiile de mișcare sînt echivalente cu ecuațiile lui Lorentz. Rezultă deci că două treimi din masa electronului trebuie să fie socotită ca fiind datorită interacției cu cîmpul electromagnetic considerat, iar distribuția sarcinii este gaussiană.

Trecînd de la cazul cvasistaționar la mișcarea accelerată H. S. Green [33] a arătat că într-o primă aproximație se obține forța de reacție a lui Lorentz, care spre deosebire de teoria clasică a lui Dirac [1] nu este considerată ca fiind exactă. Deci o teorie relativist invariantă a electronului considerat ca avînd o structură este posibilă. Teoria permite trecerea la formalismul cuantic a lui Dirac [a se vedea relația (76)] și apoi la cuantificarea cîmpului fără dificultăți, fiind liniar.

Menționăm că teoria dezvoltată se poate interpreta [34], ca și celelalte teorii de cîmpuri nelocalizate (a se vedea 2 *a*), ca o transformare funcțională a cîmpului maxwellian. Funcția de transformare este dată de ecuația (76), care este identică cu ecuația oscilatorului armonic 4-dimensional al lui Schrödinger, ea se poate scrie sub forma

$$\Sigma_\mu (X^2_\mu + \frac{a^4}{\hbar^2} P^2_\mu)\, G(X^2) = -4a^2\, G(X^2), \tag{96}$$

sau

$$\Sigma_\mu \left(X^2_\mu - a^4 \frac{\partial^2}{\partial X^2_\mu}\right) G(X^2) = 4a^2\, G\ (X^2) . \tag{97}$$

Dacă alegem în spațiul fazic

$$X = x - \bar{x},\ P = \hbar K = (k\hbar - \bar{k}) = p - \bar{p},$$

atunci avînd în vedere că

$$\left(X - i\frac{a^2}{\hbar}P\right)\left(X + i\frac{a^2}{\hbar}P\right) = X^2 + \frac{a^4}{\hbar^2}P^2 - \frac{i}{\hbar}a^2(PX - XP),$$

unde

$$[P, X] = PX - XP = \frac{\hbar}{i},$$

iar din

$$\left(X - \frac{ia^2}{\hbar^2}P\right) U(X) = 0,$$

adică

$$\frac{\mathrm{d}\,U(x)}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{x-\bar{x}}{a^2} + \frac{i}{\hbar}\,\bar{p}\right) U(x),$$

rezultă

$$U(x) = N\, e^{\frac{(x-\bar{x})^2}{2a^2} + \frac{i}{\hbar}\bar{p}\,x}$$

care este funcția de undă a pachetului de undă ce corespunde incertitudinii minime

$$\overline{(x-\bar{x})^2} + \overline{(p-\bar{p})^2} = -4a^2\,.$$

Prin urmare funcția de transformare $G(X^2)$ este în acest caz de forma

$$G = U^{-1}(x) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int e^{iK(x-\bar{x}) + \frac{a^2}{\hbar}K^2}\,\mathrm{d}K\,. \tag{98}$$

Transformarea funcției de undă

$$\underline{\psi}(x) = \int U^{-1}(x-x')\,\psi(x')\,\mathrm{d}x',$$

reprezintă deci o legătură cu stările de incertitudine minimă, iar ecuația (96) definește o metrică a spațiului fizic 8-dimensional în vecinătatea lui $x = \bar{x}$, $p = \bar{p}$. Avem invers

$$\psi(x) = \int U(x-x')\,\underline{\psi}(x')\,\mathrm{d}n,$$

deoarece

$$\int U(x-x'')\,U^{-1}(x''-x')\,\mathrm{d}x'' = \delta(x-x').$$

Această interpretare permite să se înțeleagă rolul factorului de formă exponențial din teoria cîmpului nelocalizat și legătura lui cu existența unor particule elementare extinse ca izvoare ale cîmpului.

2 *d*) Bazat pe teoria reciprocității H. Yukawa [35] a dezvoltat o teorie a cîmpului nelocalizabil în care funcția care reprezintă cîmpul nu mai este o funcție simplă de punct și anume nu mai comută cu coordonatele.

Astfel considerînd cazul mai simplu al unui cîmp local scalar definit prin ecuația Klein-Gordon.

$$(\Box - \varkappa^2)\,\psi(x) = 0\,,\quad \varkappa = \frac{mc}{\hbar}\,,$$

sau

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_\mu\ \partial x^\mu} - \varkappa^2\right)\psi(x) = 0.$$

Observăm că această ecuație se poate scrie cu ajutorul operatorului impuls sub forma echivalentă

$$[p_\mu, [p^\mu, \psi]] + m^2c^2 \psi = 0.$$

Cîmpul nelocalizabil corespunzător se definește prin ecuația de mai sus considerînd-o invariantă față de o transformare reciprocă

$$\begin{matrix} i\lambda p_\mu \to \lambda^{-1} x_\mu, \\ \lambda^{-1} x_\mu \to i\lambda p_\mu, \end{matrix} \quad [x_\mu, p_\nu] = i\delta_{\mu\nu} \tag{99}$$

(luînd $\hbar = c = 1$), adică prin ecuațiile reciproce

$$\begin{aligned} &[p_\mu, [p^\mu, \psi]] + m^2 \psi = 0, \\ &[x_\mu, [x^\mu, \psi]] - \lambda^2 \psi = 0. \end{aligned} \tag{100}$$

Prin urmare funcția de cîmp devine un operator ce depinde de operatorii x_μ și p_μ. În reprezentarea x, folosind notațiile lui D i r a c, vom avea

$$\begin{aligned} &< x' \mid x_\mu \mid x'' > \; = x'_\mu \, \delta_4 (x' - x''), \\ &< n' \mid p_\mu \mid x'' > = - i \frac{\partial}{\partial x'_\mu} \delta_4 (x' - x''), \\ &< x' \mid \psi (x, p) \mid x'' > = \psi_{x'x''}, \\ &< x' \mid [\psi, p_\mu]_\mp \mid x'' > = i \left(\frac{\partial}{\partial x'_\mu} \pm \frac{\partial}{\partial x''_\mu} \right) < x' \mid \psi \mid x'' >. \end{aligned} \tag{101}$$

Teoria locală corespunde cazului limită cînd

$$\psi_{x'x''} = < x' \mid \psi \mid x'' > \to \psi (x') \, \delta_4 (x' - x'').$$

De obicei este preferabil să se folosească ca variabile

$$\xi_\mu = \frac{1}{2} (x'_\mu + x''_\mu), \quad r_\mu = x'_\mu - x''_\mu, \tag{102}$$

în acest caz $\psi = \psi (\xi, r)$ și

$$< x' \mid [\psi, d_\mu]_{\overset{\leftarrow}{+}} \mid x'' > = \frac{\partial \psi (\xi, r)}{\partial \xi_\mu} \text{ sau } - 2 \frac{\partial \psi (\xi, r)}{\partial r_\mu}, \tag{103}$$

unde $p_\mu = i d_\mu$, avînd $[x_\mu, d^\nu] = \delta_{\mu\nu}$. Ecuațiile (100) devin

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_\mu \, \partial \xi^\mu} - m^2 \right) \psi (\xi r) = (\Box_\xi - m^2) \psi (\xi, r) = 0, \\ &(r_\mu r^\mu - \lambda^2) \psi (\xi, r) = 0. \end{aligned} \tag{104}$$

La aceste ecuații se mai adaugă condiția restrictivă

$$[x^\mu, [d_\mu, \psi]] = 0, \tag{105}$$

care este selfreciprocă, avînd

$$[\mathrm{d}_\mu, [x^\mu, \psi]] = 0$$

și cu variabilele (102) se scrie

$$r_\mu \frac{\partial \psi(\xi, r)}{\partial \xi_\mu} = 0. \tag{106}$$

Funcția de undă se va putea scrie cu ajutorul integralei Fourier sub forma

$$\psi(\xi_\mu, r_\mu) = \int \psi(k_\mu, r_\mu)\, \delta(k_\mu k^\mu + m^2)\, \delta(r_\mu r^\mu - \lambda^2)\, \delta(\lambda_\mu r^\mu)\, e^{ik_\mu \xi^\mu}\, d_4 k. \tag{107}$$

Variabilele ξ_μ pot fi identificate cu coordonatele spațio-temporale obișnuite ale centrului de mase a particulei elementare extinse, care se reduce la o singularitate punctiformă dacă $\lambda \to 0$; iar variabilele r_μ se pot interpreta ca descriind mișcările interne ale particulei extinse, care în cazul unui cîmp local devin nule.

În cazul particulei în repaus avînd $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, $k_4 = -m$ și

$$\psi(0, 0, 0, -\varkappa ; r_\mu)\, \delta(r_\mu r^\mu - \lambda^2)\, \delta(m r_4)\, e^{-im\xi_4} \tag{108}$$

rezultă că $r_4 = 0$ și

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = \lambda^2,$$

deci parametrul λ are semnificația «razei» particulei extinse, în spațiul r.

În mod analog se pot defini funcții de cîmp nelocalizabile vectoriale și spinoriale. Menționăm că ecuația a doua (100) care exprimă condiția de nelocalizibilitate este identică cu ipoteza formulată anterior de M. A. Markov [36] conform căreia în apropierea unei surse punctiforme cîmpul clasic încetează de a mai fi o mărime observabilă, adică își pierde conținutul fizic obișnuit din cauza existenței unei erori individuale [37] ceea ce este echivalentă cu existența unor relații de comutare între coordonate și funcțiile de cîmp. De exemplu, în cazul unui cîmp scalar

$$\psi(k)\, x_\nu - x_\nu \psi(k) = -i\, r_{\nu k}\, \psi(k),$$

sau

$$\psi(k)\, x_\nu^n = (x_\nu - i\, r_{\nu k})^n\, \psi(k),$$

care este echivalentă cu relația

$$[x_\nu, [x^\nu, \psi]] - \lambda^2 \psi = 0,$$

dacă

$$\lambda^2 = \Sigma (i\, r_\nu)^2,$$

deci $r_{\nu k}$ sînt componentele unui cvadrivector avînd același rol ca și λ. Markov a arătat că introducerea ipotezei de nelocalizibilitate a cîmpului este echivalentă din punct de vedere matematic cu introducerea unui factor de tăiere relativist invariant și că teoria cîmpului nelocalizabil este incompatibil cu

metoda hamiltoniană putînd fi tratată prin metoda matricei S a lui Heisenberg. În fond considerarea cîmpurilor nelocalizibile ar avea justificarea de a da un conținut fizic factorului de tăiere invariant relativist permițînd o interpretare posibilă. Tipul general de cîmp nelocalizabil formulat lasă în orice caz neschimbat sensul funcției de undă în afară de limitele domeniului de nelocalizibilitate. În mod independent această teorie a cîmpului nelocalizibil a fost studiată de R a y s k i [38] pentru cazul cîmpurilor scalare vectoriale și spinoriale. Stabilind corespondența dintre mărimile din cîmpurile locale și cele nelocale sub forma

$$a(\xi) \to \int \mathrm{d}_4 r < x' \mid A \mid x'' > = \int \mathrm{d}_4 r Tr A_{x'x''} \delta \left(\frac{x'+x''}{2} - \xi \right)$$

se constată că teoria nelocalizabilă conduce în vid la aceleași rezultate ca și formalismul localizabil, în particular electrodinamica cuantică nelocală conduce la aceleași ecuații integrale ca și cea locală cu care este echivalentă.

Teoria nonlocală a lui Yukawa corespunde de fapt unei alegeri particulare a factorului de formă [39].

De remarcat este faptul că pe baza acestei teorii, adîncind ideea lui B o r n asupra dezvoltării unei teorii generale a particulelor elementare permițînd deducerea maselor de repaus a diferitelor particule posibile, se poate ajunge la deducerea expresiei operatorului care reprezintă masa și ale cărui valori proprii reprezintă masele de repaus a particulelor ce fac parte din aceeași categorie spinorială. Se ajunge astfel la posibilitatea cuantizării masei cu ajutorul unui operator legat de variabilele ce reprezintă mișcările interne ale particulei, forma metricei fiind fixată de principiul reciprocității prin invarianța față de transformarea reciprocă [40], [41]. Astfel considerînd, în general, cazul unui cîmp liber reprezentat prin ecuația

$$F\left(\frac{\partial}{\partial \xi_\mu}, r_\mu, \frac{\partial}{\partial r_\mu}\right) \psi(\xi_\mu, r_\mu) = 0, \tag{109}$$

În ipoteza că F este liniar față de $\dfrac{\partial^2}{\partial \xi_\mu \partial \xi^\mu}$ și separabil, adică

$$F = \frac{\partial^2}{\partial \xi_\mu \partial \xi^\mu} + F^{(r)}\left(r_\mu r^\mu, \frac{\partial^2}{\partial r_\mu \partial r^\mu}, r_\mu \frac{\partial}{\partial r_\mu}\right),$$

ecuația se poate integra prin metoda separării variabilelor scriind

$$\psi(\xi_\mu, r_\mu) = u(\xi_\mu)\chi(r_\mu).$$

Se obține

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_\mu \partial \xi^\mu} - \mu\right) u(\xi_\mu) = 0, \tag{110}$$

$$(F^{(r)} - \mu)\chi(r_\mu) = 0.$$

Masele de repaus a particulelor elementare asociate cîmpului nelocalizabil vor fi date de valorile proprii ale ecuației în r_μ.

Menționăm procedeul lui R a y s k i [41] care se bazează pe generalizarea operatorului dalembertian observînd că putem scrie

$$\Box\Box = \left(\frac{\partial}{\partial x'_\mu} + \frac{\partial}{\partial x''_\mu}\right)^2 + C\left(\frac{\partial}{\partial x'_\mu} - \frac{\partial}{\partial x''_\mu}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi_\mu^2} + 4C\frac{\partial^2}{\partial r_\mu^2}.$$

Deci ținînd seama de (103), ecuația

$$\Box\Box\,\psi = 0, \tag{111}$$

este echivalentă cu

$$[[\psi,\ d_\mu]_-, d_\mu]_- + C\,[[\psi, d_\mu]_+, d_\mu]_+ = 0 \tag{112}$$

care generalizează ecuația (100); cazul, cînd $C = 0$, corespunde unei particule de masă de repaus nulă. Condiția de invarianță față de transformarea reciprocă (99) conduce la ecuațiile suplimentare

$$[[\psi,\ d_\mu[-, x_\mu]_- = [[\psi,\ x_\mu]_-,\ d_\mu]_- = 0, \tag{113}$$

$$\lambda^2\,[[\psi, d_\mu]_-, d_\mu]_- - \lambda^{-2}\,[[\psi, x_\mu]_-, x_\mu]_- = 0.$$

Pentru a introduce spinul particulelor se folosește procedeul lui Dirac liniarizînd ecuația (111), respectiv (112), prin introducerea unor matrice α_μ, β_μ. Anume se scrie

$$\alpha_\mu[\psi, d_\mu]_- = i\,a\,\beta_\mu\,[\psi\, d_\mu]_+, \tag{114}$$

sau conform relațiilor (103)

$$\alpha_\mu\,\frac{\partial\psi(\xi, r)}{\partial\,\xi_\mu} = 2ia\,\beta_\mu\,\frac{\partial\psi(\xi,\ r)}{\partial\,\gamma_\mu}, \tag{115}$$

unde a este o constantă fără dimensiuni, iar matricele introduse satisfac relațiilor

$$[\alpha_\mu,\ \alpha_\nu]_+ = [\beta_\mu, \beta_\nu]_+ = 2\,\delta_{\mu\nu},\ [\alpha_\mu, \beta_\nu]_- = 0. \tag{116}$$

Se verifică ușor că $C = -a^2$

Semnificația gradelor de libertate legate de matricele introduse se face considerînd matricele α_μ legate de spin, deci identice cu matricele lui Dirac, iar matricele β_μ legate de spinul izotopic. În cazul cînd β_μ sînt identice cu matricele lui Dirac, pentru spinii semiîntregi obținem familia nucleonilor ($C = a^2{}_{1/2}$, $a_{1/2} = a/16$), iar pentru spini întregi obținem familia pionilor, adică a mezonilor ($C = a_1^2$, $a_1 = a/100$). În cazul cînd β_μ sînt matrice Duffin-Kemmer obținem familia leptonilor.

Ecuațiile suplimentare (113) pot fi scrise sub forma echivalentă

$$r_\mu\,\frac{\partial\psi(\xi, r)}{\partial\,\xi_\mu} = 0, \left(\lambda^2\,\frac{\partial^2}{\partial\xi_\mu^2} - \frac{r_\mu^2}{\lambda^2}\right)\psi(\xi, r) = 0. \tag{117}$$

Printr-o transformare Fourier în spațiul ξ, ecuațiile (115) (117) devin

$$\left(\alpha_\mu\, i\, p_\mu - 2\, i\, a\, \beta_\mu \frac{\partial}{\partial r_\mu}\right) \psi\,(p, r) = 0,$$

$$p_\mu\, r^\mu\, \psi\,(p, r) = 0, \quad \left(\lambda^2\, p_\mu^2 + \frac{r_\mu^2}{\lambda^2}\right) \psi\,(p, r) = 0. \tag{118}$$

În cazul unei particule în repaus avem $\vec{p} = 0$, $p_4 = iM$ deci ecuațiile (118) devin

$$\left(\alpha_4\, M + 2\, ai\, \beta_\mu \frac{\partial}{\partial r_\mu}\right) \psi\,(M, r) = 0,$$

$$M r_4\, \psi\,(M, r) = 0, \quad \left(-\lambda^2\, M^2 + \frac{r^2}{\lambda^2}\right) \psi\,(M, r) = 0, \tag{119}$$

de unde rezultă $r_4 = 0$, $r = \lambda^2\, |\, M\, |$, deci 4-vectorul T_μ se restrînge la un vector spațial. Valorile proprii ale operatorului de masă fiind definite pe sfera de rază $\lambda^2\, |\, M\, |$ este convenabil să se treacă la coordonate polare.

În cazul familiei pionilor ecuația (115) devine

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_\mu^2} - 4\, a_1^2 \frac{\partial^2}{\partial r_\mu^2}\right) \psi\,(\xi\, r) = 0. \tag{120}$$

Deci transformata Fourier va fi

$$\left(p_\mu^2 - 4\, a_2^1 \frac{\partial^2}{\partial r_\mu^2}\right) \psi\,(p, r) = 0,$$

și în cazul particulei în repaus

$$\left(M^2 - 4 a_1^2 \frac{\partial^2}{\partial r_\mu^2}\right) \psi\,(M, r) = 0. \tag{121}$$

Considerînd masa de repaus, compusă din masa proprie și masa de cîmp datorită interacției, rezultă că în loc de (115), respectiv (120), va trebui să scriem

$$\left(\alpha_\mu \frac{\partial}{\partial \xi_\mu} - 2 a_{1/2}\, i\, \beta_\mu \frac{\partial}{\partial r_\mu} + \varkappa\right) \psi\,(\xi, r) = 0, \tag{115'}$$

și

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_\mu^2} - 4 a_1^2 \frac{\partial^2}{\partial r_\mu^2} - \varkappa^2\right) \psi\,(\xi, r) = 0. \tag{120'}$$

Prin urmare, în loc de (119) și (121), obținem

$$\left(\alpha_4\, M + 2 a_{1/2}\, i\, \beta_\mu \frac{\partial}{\partial r_\mu} + \varkappa\right) \psi\,(M, r) = 0, \tag{119'}$$

respectiv

$$\left(M^2 - 4 a_1^2 \frac{\partial}{\partial r_\mu^2} - \varkappa^2\right) \psi\,(M, r) = 0, \tag{121'}$$

de unde, trecînd la coordonate polare în spațiul r, se obțin ușor valorile maselor de repaus sub forma unui « spectru de mase » ce corespunde valorilor experimentale, dacă alegem în mod potrivit valoarea lui $\varkappa$.

2 *e*) Reprezentarea masei printr-un operator, adică considerarea masei ca fiind legată de structura internă a particulelor elementare și de variabile interne, ceea ce duce la existența unui « spectru de mase », se poate obține în teoria cîmpurilor după cum a arătat B o p p [42], [43], [44] și pe altă cale, diferită prin tratarea spinului din punctul de vedere al teoriei cîmpurilor. Aceste cercetări se inspiră din interpretarea dată spinului particulelor elementare pe baza principiului corespondenței de H. H ö n l și A. P a p a p e t r o u [45] care, considerînd mișcarea « tremurătoare »[1]) a centrului de probabilitate în teoria lui Dirac datorită faptului că centroidul sarcinilor nu coincide cu centrul de greutate al maselor, sînt conduși la ipoteza existenței unui « dipol de masă » ce se suprapune masei punctiforme a electronului, precum și din cercetările lui W. W e s s e l [46] asupra semnificării spinului din punctul de vedere al teoriei cîmpului, care au condus la concluzia că proprietățile de spin ale electronului sînt determinate numai de cîmpul electromagnetic inerțial și nu de cîmpul radiativ, care după D i r a c [1] poate fi separat în mod radical. Anume fluctuația energiei de cîmp în jurul electronului este responsabilă pentru necoincidența centroidului sarcinilor cu centrul maselor.

Astfel B o p p ținînd seama de influența proceselor de emisie și reabsorbție ce au loc în electron și de faptul că în cazul mișcării uniforme rectilinii, nu are loc nici un proces de radiație, este condus la modificarea lagrangeanului L_1, care descrie interacția electronului cu cîmpul său propriu, introducînd pe lîngă masă un factor ce depinde într-un fel relativist invariant de accelerație și de derivatele superioare. Într-o primă aproximație se consideră numai dependința de accelerație scriind

$$L_1 = - m_0 c F(Q) \sqrt{- \dot{\xi}_\mu \dot{\xi}_\mu} = - m_0 c F(Q) \sqrt{- u_\mu^2} \tag{122}$$

unde $u_\mu = \dot{\xi}_\mu(\tau)$ și

$$Q = \frac{l^2}{\sqrt{- u_\mu^2}^4} \left[\dot{u}_\mu^2 + \left(\frac{u_\mu \dot{u}_\mu}{\sqrt{- u_\mu^2}} \right)^2 \right], \tag{123}$$

lungimea l fiind un factor dimensional arbitrar, iar $F(Q)$ o funcție arbitrară legată de factorul de formă $f(\sigma)$, introdus de B o p p în expresia potențialului (56).

Anume considerînd un electron în mișcare staționară într-un cîmp extern, ecuațiile de mișcare se pot deduce dintr-un principiu variațional de forma

$$\delta (S_1 + S_3) = 0,$$

unde

$$S_1 = \int L_1 \, d\tau, \qquad L_1 = \frac{e^2}{c^2} \int u_\mu(\tau) \, u_\mu(\tau - s) \, f(\sigma) \, ds, \tag{124}$$

$$\sigma = \frac{1}{c^2} [\xi_\mu(\tau) - \xi_\mu(\tau - s)]^2$$

[1]) Schrödingersche zitterbewegung (tremblement de Schrödinger).

și

$$S_3 = \int L_3 \, d\tau, \quad L_3 = -\frac{e}{c} u_\mu(\tau) A_\mu(\xi).$$

Într-o primă aproximație avem

$$u_\mu(\tau) u_\mu(\tau - s) = u_\mu \left(u_\mu - s\dot{u}_\mu + \frac{s^2}{2} \ddot{u}_\mu - \dots \right) = -c^2 \left(1 + \frac{s^2}{2c^2} \dot{u}_\mu^2 - \dots \right),$$

$$\sigma = \frac{s^2}{c^2} \left(u_\mu - \frac{s}{2} \dot{u}_\mu + \frac{s^2}{6} \ddot{u}_\mu^2 - \dots \right) = -s^2 - \frac{s^4}{12 c^2} \ddot{u}_\mu^2 + \dots .$$

Deci punînd

$$Q = \frac{l^2}{c^4} \dot{u}_\mu^2 \tag{125}$$

și

$$F(Q) = \frac{e^2}{m_0 c_3} \int \left(1 + \frac{c^2}{2} \frac{s^2}{l^2} Q \right) f \left(-s^2 - \frac{c^2}{12} \frac{s^4}{l^2} Q \right) ds, \tag{126}$$

(124) se poate scrie sub forma (122).

Trecînd de la timpul propriu la timpul t,

$$L_1 = -\frac{m_0}{\alpha} c^2 F(Q), \tag{127}$$

unde

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \beta = \frac{v}{c}, Q = \frac{l^2}{c^4} \alpha^4 \left[\dot{\vec{v}}^2 + \left(\frac{\vec{v} \dot{\vec{v}}}{c} \alpha \right)^2 \right], \tag{128}$$

$\vec{v}$ fiind viteza mișcării centrului globului de probabilitate. În cazul limită relativist $v = c$ adică $\beta = 1$, pentru ca factorul masei să nu se anuleze trebuie ca

$$F(Q) = \sqrt[4]{Q}, \tag{129}$$

adică

$$L_1 = -m_0 c \sqrt{l} \sqrt[4]{\dot{\vec{v}}^2 + \left(\frac{\vec{v} \dot{\vec{v}}}{c} \alpha \right)^2}.$$

În cazul general $v \neq c$ lagrangeanul ecuației de mișcare va fi

$$L_0 = -\frac{m}{\alpha} c^2 F(Q) + e\varphi - \frac{e}{c} \vec{v} \vec{A}, \tag{130}$$

considerată ca funcție de $\vec{r}$, $\vec{v}$ și $\dot{\vec{v}}$, în care $\vec{r}$ și $\vec{v}$ sînt presupuse variabile independente în reprezentarea canonică, variabilele canonic conjugate vor fi impulsul obișnuit (macroimpulsul)

$$\vec{p} = \frac{\partial L_0}{\partial \vec{v}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L_0}{\partial \dot{\vec{v}}}$$

și impulsul intern corespunzător microvitezei, sau momentul dipolar al masei după Hönl

$$\vec{s} = \frac{\partial L_0}{\partial \dot{\vec{\varrho}}}.$$

Deci hamiltonianul va fi

$$H = \dot{\vec{\varrho}}\vec{p} + \dot{\vec{\varrho}}\vec{s} - L_0.$$

Eliminînd pe $\dot{\vec{\varrho}}$ și introducînd notația

$$g_5^2 = \frac{1}{4m_0^2 l^2 \alpha^2}\left[\vec{s}^2 - \frac{1}{c^2}(\vec{s}\vec{\varrho})^2\right] = Q\,[F'(Q)]^2 \tag{131}$$

amiltonianul se va scrie

$$H = -e\varphi + \vec{\varrho}\left(\vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}\right) + \frac{m_0 c^2}{\alpha}\,\frac{G(g_5)}{g_5}, \tag{132}$$

unde

$$\frac{G(g_5)}{g_5} = F(Q) - 2Q\,F'(Q). \tag{133}$$

Trecînd la notația 4-dimensională, obținem, considerînd timpul ca o coordonată a cărei mărime canonic conjugată este energia W, funcția canonică

$$K \equiv \varrho_\mu\left(p_\mu + \frac{e}{c}A_\mu\right) + \frac{m_0 c^2}{\alpha}\,\frac{G(g_5)}{g_5} = 0, \tag{134}$$

unde $\varrho_\mu = (\vec{\varrho}, ic)$. Deoarece t intervine în K și ca parametru, pentru a obține o expresie relativist invariantă va trebui să o înmulțim cu un factor Λ, funcție arbitrară de variabilele canonice. Utilizînd paranteza lui Poisson avem

$$K' = \Lambda K, \frac{dA}{d\tau} = \{K', A\} = \{\Lambda, A\}K + \Lambda\{K, A\} = \Lambda\{K, A\} = \Lambda\frac{dA}{dt},$$

de unde rezultă că

$$\tau = \int\frac{dt}{\Lambda}.$$

Se alege ca parametru mai convenabil, în loc de timpul propriu, cel ce derivă din

$$\Lambda = \frac{1}{m_0 l}\sqrt{\vec{s}^2 - \left(\frac{\vec{\varrho}\vec{s}}{c}\right)^2} \tag{135}$$

și introducînd 4-vectorul

$$g_\mu = \frac{1}{m_0 l}(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, ic)\sqrt{\vec{s}^2 - \left(\frac{\vec{\varrho}\vec{s}}{c}\right)^2}, \quad \sum_\mu g_\mu^2 + g_5^2 = 0, \tag{136}$$

care este legat de 4-viteză prin relația

$$u_\mu = c\frac{g_\mu}{g_5}, \tag{137}$$

unde g_5 este un invariant relativist. Ecuația (134) se va scrie sub forma simplă relativist invariantă

$$K \equiv cg_\mu\left(p_\mu + \frac{e}{c}A_\mu\right) + m_0 c^2 G(g_5) = 0. \tag{138}$$

În cazul particular limită ($v = c$) al relației (129), obținem

$$K \equiv g_\mu\left(p_\mu + \frac{e}{c}A_\mu\right) + m_0 c^2 = 0, \tag{138'}$$

unde

$$g_\mu = \frac{4}{m_0 cl}\,|\vec{v} \times \vec{s}|\,(\vec{v},\ ic). \tag{136'}$$

Asemănarea ecuațiilor (138) și (138') cu ecuația lui Dirac este remarcabilă și sugerează o corespondență dintre mărimile g_μ și matricile lui Dirac. Pentru aceasta este convenabilă trecerea la coordonate omogene proiective. Anume ecuațiile canonice de mișcare deduse din (138) sînt

$$\frac{dx_\mu}{d\tau} = \frac{\partial K}{\partial p_\mu} = cg_\mu, \tag{139}$$

la care putem adăuga ecuația

$$\frac{dx_5}{d\tau} = cg_5, \tag{140}$$

astfel că avem în general

$$g_\alpha = \frac{1}{c}\frac{dx_\alpha}{d\tau} \quad \text{unde } \alpha = 1, 2, 3, 4, 5. \tag{141}$$

Deci g_α sînt coordonatele proiective ale vitezei, și avem conform relației (136)

$$\sum\nolimits_\alpha g_\alpha^2 = \sum\nolimits_\alpha\left(\frac{dx_\alpha}{d\tau}\right)^2 = 0,\ dx_5 = \sqrt{-dx_\mu^2}.$$

Mărimile g_α împreună cu $g_{\alpha\beta}$ definite prin parantezele Poisson

$$g_{\alpha\beta} = m_0 l c\,\{g_\alpha, g_\beta\}, \tag{142}$$

unde

$$\{A, B\} = \left(\frac{\partial A}{\partial p_\mu}\frac{\partial B}{\partial x_\mu} - \frac{\partial B}{\partial p_\mu}\frac{\partial A}{\partial x_\mu}\right) + \left(\frac{\partial A}{\partial \vec{s}}\frac{\partial B}{\partial \vec{v}} - \frac{\partial B}{\partial \vec{s}}\frac{\partial A}{\partial \vec{v}}\right),$$

formează un sistem algebric închis de 15 funcții de $\vec{v}$ și $\vec{s}$. Ele corespund celor 15 parametri ai grupei de rotații în spațiul cu 6 dimensiuni, izomorfe cu grupa transformărilor sferei în spațiul cu 4 dimensiuni. Într-adevăr, introducînd notația

$$g_\alpha = ig_{\alpha 0} = -ig_{0\alpha} \tag{143}$$

se verifică relațiile

$$\begin{aligned} &m_0 lc \{g_{\rho\sigma}, g_{\rho'\sigma'}\} = 0, \\ &m_0 lc \{g_{\rho\tau}, g_{\tau\sigma}\} = g_{\rho\sigma}, \end{aligned} \qquad \rho, \sigma, \tau = 0,1,2\ldots_5, \tag{144}$$

care prezintă o simetrie 6-dimensională. Introducînd notațiile

$$\begin{aligned} v_\rho &= (v_1, v_2, v_3, ic, c\sqrt{1-\beta^2}) \quad \rho = 1, 2, 3, 4, 5, \\ s_\rho &= \left(s_1, s_2, s_3, \frac{i}{c}\vec{v}\vec{s}, \quad 0\right), \end{aligned} \tag{145}$$

avînd

$$\sum\nolimits_\rho v_\rho^2 = 0, \quad v_\rho s_\rho = 0, \quad \sum\nolimits_\rho s_\rho^2 = \vec{s}^2 - \left(\frac{\vec{v}\vec{s}}{c}\right)^2,$$

din (131), (136) și (142) rezultă că

$$g_\rho = \frac{v_\rho}{m_0 lc}\sqrt{s_\rho^2}, \quad g_{\alpha\beta} = \frac{1}{m_0 lc}(v_\alpha s_\beta - v_\beta s_\alpha). \tag{146}$$

Folosind calculul undorial al lui F. J. Belinfante [47], să considerăm mărimile complexe ξ și conjugatele lor ξ^*

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_1), \quad \xi^* = (\xi_1^*, \ldots, \xi_4^*),$$

cărora le facem să corespundă mărimile canonic conjugate

$$\eta^* = (\eta_1^*, \ldots, \eta_4^*), \quad \eta = (\eta_1, \ldots, \eta_4),$$

astfel că avem

$$\{\eta_\rho^*, \xi_\sigma\} = \delta_{\rho\sigma}, \quad \{\eta_\rho, \xi_\sigma^*\} = \delta_{\rho\sigma}, \tag{147}$$

unde

$$\left\{A, B\right\} = \left(\frac{\partial B}{\partial \xi}\frac{\partial A}{\partial \xi^*} - \frac{\partial A}{\partial \xi}\frac{\partial B}{\partial \xi^*}\right) + \left(\frac{\partial A}{\partial \eta}\frac{\partial B}{\partial \eta^*} - \frac{\partial B}{\partial \eta}\frac{\partial A}{\partial \eta^*}\right).$$

Printr-o transformare canonică a lui $\vec{v}$ și $\vec{s}$ putem reprezenta g_α și $g_{\alpha\beta}$ cu ajutorul lui ξ, ξ^*, η, η^* prin relațiile

$$g_\alpha = \frac{1}{2m_0 cl}(\xi^*\gamma_4\gamma_\alpha\gamma_4\eta \pm \eta^*\gamma_\alpha\xi), \quad \alpha = 1, 2, 3, 4, 5, \tag{148}$$

$$g_{\alpha\beta} = \frac{1}{2m_0 cl}(\xi^*\gamma_4\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_4\eta - \eta^*\gamma_\alpha\gamma_\beta\xi), \quad \alpha \neq \beta,$$

unde γ_1, γ_2, γ_3 γ_4, sînt matrice Ne umann

$$\gamma_i\gamma_k + \gamma_k\gamma_i = 2\delta_{in},$$

iar $\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$.

Cuantizarea se face trecînd la ecuaţia undelor, ce corespunde funcţiei canonice K [a se vedea ecuaţia (138)] în sistemul de variabile undoriale canonice (148), prin substituţia

$$p_\mu = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_\mu},\quad \eta = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial \xi^*},\quad \eta^* = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial \xi}. \tag{149}$$

Anume ecuaţia undelor este

$$\frac{1}{c}K\psi = \left[g_\mu\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{l}{c}A_\mu\right) + m_0 cG(g_5)\right]\psi = 0, \tag{150}$$

unde operatorii g_α sînt daţi de

$$g_\alpha = \frac{\hbar}{2im_0cl}\left[\xi^*\gamma_4\gamma_\alpha\gamma_4\frac{\partial}{\partial\xi^*} - \frac{\partial}{\partial\xi}\gamma_\alpha\xi\right], \tag{151}$$

iar funcţia de undă ψ depinde, în afară de coordonatele spaţio-temporale x_μ, şi de undorii ξ şi ξ^*.

$$\psi = \psi(x, \xi, \xi^*).$$

Deoarece $\xi^*\eta$ şi $\eta^*\xi$ sînt permutabile cu K rezultă că ecuaţia (151) admite ca soluţii particulare polinoame omogene de gradul m în raport cu ξ şi de gradul n în raport cu ξ^*.

Astfel în cazul $m = 0$, $n = 1$, avem

$$\psi_{0,1} = \xi_*\gamma_4\psi(x), \tag{152}$$

deci

$$g_\alpha\psi_{0,1} = \frac{\hbar}{2im_0cl}\xi^*\gamma_4\gamma_\alpha\psi(x) = -\frac{1}{2}\xi^*\gamma_4\gamma_*\psi(x),$$

$$g_\alpha^2\psi_{0,1} = -\frac{\hbar^2}{4m_0^2c^2l^2}\xi^*\gamma_4\psi(x) = -\frac{1}{4}\psi_{0,1},$$

dacă punem

$$l = \frac{\hbar}{m_0c}.$$

Presupunînd că

$$G(g_5) = a_0 + a_1g_5 + a_2g_5^2 + \ldots, \text{ şi } g_5^2 = -\frac{1}{4}, \tag{153}$$

avem

$$G(g_5)\psi_{0,1} = (A_0 + 2A_1g_5)\psi_{0,1}, \tag{154}$$

unde

$$A_0 = a_0 - \frac{1}{4} a_2 + \frac{1}{16} a_4 - \dots,$$

$$A_1 = \frac{1}{2} a_1 - \frac{1}{8} a_3 + \frac{1}{32} a_5 - \dots$$

Ecuația undelor (151) se va scrie în acest caz sub forma

$$\xi^* \gamma_4 \left[\gamma_\mu \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{e}{c} A_\mu \right) + 2\, i m_0 c \,(A_0 - i A_1 \gamma_5) \right] \psi(x) = 0.$$

De unde prin derivare față de ξ^* și înmulțire cu γ_4 obținem o ecuație Dirac

$$\left[\gamma_\mu \left(\frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{e}{c} A_\mu \right) + 2\, i m_0 c \;\; (A_0 - i A_1 \gamma_5) \right] \psi(x) = 0. \qquad (155)$$

Introducînd notația

$$P_\mu = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{e}{c} A_\mu$$

și înmulțind la stînga cu

$$\frac{(A_0 + i A_1 \gamma_5)}{\sqrt{A_0^2 + A_1^2}},$$

obținem

$$(\gamma_\mu P_\mu + i M c)\, \psi(x) = 0, \qquad (156)$$

unde noile matrice

$$\gamma_\mu = \frac{A_0 \gamma_\mu + i A_1 \gamma_5 \gamma_\mu}{\sqrt{A_0^2 + A_1^2}}$$

satisfac relațiile de comutare obișnuite, iar

$$M = 2 m_0 \sqrt{A_0^2 + A_1^2},$$

reprezintă masa particulei libere.

În cazul $m = 0$, $n = 2$, avem

$$\psi_{0,2} = \xi^*_\rho \, \xi^*_{\rho'} \, \gamma_4^{\rho\sigma} \gamma_4^{\rho'\sigma'} \psi_{\sigma\sigma'}(x').$$

Folosind produsul de fuzionare Kronecker a matricelor după L. de B r o g l i e [48], putem scrie

$$\psi_{0,2} = (\xi^* \times \xi^*)(\gamma_4 \times \gamma_4) \psi(x). \qquad (157)$$

Deoarece

$$g_\alpha \psi_{0,2} = - i (\xi^* \times \xi^*)(\gamma_4 \times \gamma_1) \beta_\alpha \psi(x),$$

unde

$$\beta_\alpha = \frac{1}{2} (1 \times \gamma_\alpha \pm \gamma_\alpha \times 1), \qquad (158)$$

sînt matricele de Broglie $\beta_\alpha^3 = \beta_\alpha$, ecuația (150) devine

$$[\beta_\mu P_\mu + i m_0 c (A_0' - iA_1' \beta_5 - A_2' \beta_5^2)] \psi (x) = 0, \tag{159}$$

unde

$$A_0' = a_0, \; A_1' = a_1 - a_3 + \ldots, \; A_2' = a_2 - a_4 + \ldots$$

În cazul unei particule în repaus $P_1 = P_2 = P_3 = 0$, $P_4 = i Mc$ avem

$$[M\beta_4 + m_0 (A_0' - iA_1' \beta_5 - A_2' \beta_5^2)] \psi (x) = 0, \tag{160}$$

care conduce la determinarea masei mezonice, ecuația de mai sus fiind asemănătoare ecuației lui Kemmer [49].
În cazul $m = 0$, $n = n$, avînd

$$\psi_{0,n} = (\xi^* \times \xi^* \times \ldots \times \xi^*)_n (\gamma_4 \times \ldots \times \gamma_4)_n \psi (x) \tag{161}$$

ecuația undelor (151) se poate scrie sub forma

$$[\beta_\mu P_\mu + i m_0 c G (-i \beta_5)] \psi (x) = 0, \tag{162}$$

unde

$$\beta_\alpha = \frac{1}{2} [(\gamma_\alpha \times 1 \times \ldots \times 1) \pm (1 \times \gamma_\alpha \times \ldots \times 1) \pm \ldots$$
$$\ldots \pm (1 \times 1 \times \ldots \times \gamma_\alpha)], \tag{163}$$

sînt matricele considerate de Kramers, Belinfante și Lubanski [50]. Aceste matrice satisfac relațiilor de comutare

$$[\beta_\alpha , \beta_\beta] = i \beta_{\alpha\beta} , [\beta_{\alpha\beta} , \beta_\beta] = - i \beta_\alpha , [\beta_{\alpha\beta} , \beta_{\beta\gamma}] = - i \beta_{\alpha\gamma} , \tag{164}$$

care sînt corespondentele cuantice ale relațiilor dintre g_α, $g_{\alpha\beta}$ cu ajutorul parantezelor Poisson (144).

Sistemul de matrice obținut prin fuziune (163), caracterizat prin (164), este un sistem reductibil și părțile reductibile nu se combină, astfel că fiecărei părți ireductibile la un etaj de fuzionare îi corespunde o particulă elementară de un anumit spin. În cazul mezonului ($m = 0$, $n = 2$), ecuația undelor generalizată (159) conduce la mai multe reprezentări decît ecuația lui N. Kemmer [49] și anume: o reprezentare cu 6 componente, care se poate reduce la una cu 5 componente ce reprezintă un mezon scalar și unul cu o componentă ce reprezintă tot un mezon; la o reprezentare cu 10 componente ce reprezintă un mezon vectorial și la o reprezentare cu 15 componente care reprezintă un cuplaj între un mezon scalar (cu 5 componente) și un mezon vectorial (cu 10 componente), analog cu cel din teoria lui Möller și Rosenfeld asupra interacției dipolare în cîmpul mezonic.

Pornind deci de la admiterea unei structuri interne a particulelor elementare, însoțite de o rotație internă, descrisă prin variabile noi (viteza microscopică), B o p p stabilește formalismul hamiltonian în spațiul 6-dimensional al coordonatelor și microvitezelor care permite o trecere la ecuația de unde printr-un procedeu analog celui formulat de D i r a c.

Ecuația de unde este de tipul studiat în general de H. B h a b h a [51]. Ceea ce este caracteristic ecuației obținute este faptul că masa apare reprezentată

printr-un operator ce depinde de microvariabilele particulei și conduce la un spectru de mase, particulele corespunzătoare putîndu-se grupa pe etaje de fuzionare concepute ca pături de nivele excitate ale unui tip fundamental.

Rezultatele obținute nu sînt cele mai generale, deoarece în lagrangeanul (122) nu intervine decît acceleraţia, considerînd o primă aproximaţie, și nu au fost considerate aproximaţiile de ordin superior. De asemenea, cîmpul de la care se pleacă este o electrodinamică generalizată luat ca model de B o p p, iar într-o teorie justă a particulelor elementare va trebui să se pornească de la un cîmp mai general, după cum a fost preconizat de B l o h i n ţ e v și F r e n k e l [52], [53] și mai recent de d e B r o g l i e și V i g i e r [54], [55], legat de dezvoltarea unei teorii unitare a particulelor elementare.

Menţionăm faptul că factorul de formă din această teorie de cîmp nelocalizabil se poate determina în cele din urmă prin compararea valorilor găsite pentru masele particulelor cu datele experimentale fiind legat de structura internă a particulelor. Pe baza corespondenţei cu modelul clasic pol-dipolar, H ö n l [56] consideră în loc de (122) lagrangeanul

$$L_1 = - k_0 \sqrt{- u_\mu^2} - \frac{1}{2} k_1 \frac{u_\nu^2}{\sqrt{- u_\mu^2}} \tag{122'}$$

și arată că se poate obţine ecuaţia mezonului de forma (150), în care operatorul masei depinde de constantele k_0, k_1; mezonul este conceput ca o stare excitată a electronului, ecuaţia lui Dirac nefiind exactă fără completarea ei cu un termen corectiv de masă.

II. *Teoriile unitare.* Despre electrodinamica lui B o p p se poate spune că este o teorie unitară. Într-un fel cu totul general teoria unitară a cîmpului se poate formula în mod consecvent pornind de la noţiunea fundamentală de cîmp reprezentat prin tensorul antisimetric $p_{\mu\nu}$, exprimînd toate celelalte mărimi în funcţie de această mărime [7]. Astfel prin definiţie 4-vectorul curent j^μ va fi date de relaţia

$$\frac{4\pi}{c} j^\mu = p^{\mu\nu}_{,\nu} . \tag{165}$$

Prin urmare se admite sarcina distribuită în mod continuu, caracterizată printr-o 4-viteză v^μ și o densitate ρ_0, definite prin

$$c \rho_0 v^\mu = j^\mu , \quad v_\mu v^\mu = 1 , \tag{166}$$

de unde rezultă că

$$| \rho_0 | = \frac{1}{2} \sqrt{j_\mu j^\mu} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{g_{\mu\nu} p^{\mu\lambda}_{,\lambda} p^{\nu k}_{,k}} . \tag{167}$$

Cîmpul v^μ este definit doar în regiunile în care $\rho \neq 0$.

După cum a arătat I n f e l d, ecuaţiile cîmpului pot fi derivate dintr-un principiu variaţional al cărui lagrangean este definit cu ajutorul invarianţilor

$$P = - \frac{1}{4} p_{\mu\nu} p^{\mu\nu} , \quad \rho = 4 \pi k | \rho_0 | , \tag{168}$$

unde $k = \frac{m_0 c^2}{|e|}$ este un factor dimensional, astfel că $P/_{b^2}$, $\rho/_{b^2}$, unde $b = \frac{|e|}{r_0^2}$, sînt fără dimensiuni, m_0 fiind masa de repaus, e sarcina, iar r_0 fiind o lungime. Deci funcția H astfel definită depinde de cîmpul $p_{\mu\nu}$ și derivatele sale.

Din principiul variațional,

$$\delta S = -\frac{1}{4\pi c}\,\delta \int H(P, \rho)\, d_4 x\,, \tag{169}$$

obținem ecuațiile

$$\frac{\partial H}{\partial P}\, p_{\mu\nu} = \frac{4\pi k^2}{c}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial \rho}\,\frac{j_\nu}{\rho}\right)_{,\mu} - \left(\frac{\partial H}{\partial \rho}\,\frac{j_\mu}{\rho}\right)_{,\nu}\right], \tag{170}$$

care reprezintă ecuațiile fundamentale ale electrodinamicii unitare neliniare fără potențial a lui Infeld-Plebansky

Aceste ecuații se pot interpreta în mod simplu introducînd notațiile

$$f_{\mu\nu} = -2\,\frac{\partial H}{\partial p^{\mu\nu}} = \frac{\partial H}{\partial P}\, p_{\mu\nu}\,, \tag{171}$$

$$A_\mu = \frac{e}{4\pi}\,\frac{\partial H}{\partial j_\mu} = \frac{4\pi k^2}{c}\,\frac{\partial H}{\partial \rho}\,\frac{j_\mu}{\rho}\,, \tag{172}$$

deoarece (170) se va scrie

$$f_{\mu\nu} = A_{\mu\,,\,\mu} - A_{\mu\,,\,\nu}\,. \tag{173}$$

Tensorul $f_{\mu\nu}$ reprezintă intensitatea cîmpului neliniar, iar mărimile A_μ au un rol secundar, fiind analoge potențialului. Din (173) rezultă că

$$f_{[\mu\nu\,,\,\lambda]} = 0\,,$$

ceea ce înseamnă că nu există poli magnetici liberi. Tensorul energie-impuls se poate scrie sub forma

$$T^\mu_\nu = \frac{1}{4\pi}\left[\left(H + \frac{1}{2}\, p^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}\right)\delta^\mu_\nu - p^{\mu\alpha} f_{\nu\alpha}\right] + \frac{1}{c}\left[A_\nu\, j^\mu - A_\alpha\, j^\alpha\, \delta^\mu_\nu\right],$$

avînd legea de conservare satisfăcută

$$T^\mu_{\nu,\alpha} = 0\,.$$

Invers, se poate încerca cu ajutorul invarianților

$$F = \frac{1}{4}\, f_{\mu\nu}\, f^{\mu\nu} \quad,\quad \mu = \frac{1}{k}\,\sqrt{A_\mu\, A^\mu}\,, \tag{174}$$

construirea unui lagrangean L, dual lui H, pentru a deriva ecuațiile cîmpului dintr-un principiu variațional de forma

$$\delta S = -\frac{1}{4\pi c}\,\delta \int L(F, \mu)\, d_4 x = 0\,, \tag{175}$$

care definește electrodinamica unitară formulată de G. M i e [57], obținînd ecuațiile cîmpului sub forma

$$\left(\frac{\partial L}{\partial F} f^{\mu\nu}\right)_{,\nu} + \frac{1}{k^2}\frac{\partial L}{\partial \mu}\overset{\mu}{A} = 0. \tag{176}$$

Echivalența aceasta dintre teoria unitară fără potențial a lui Infeld și teoria unitară a lui Mie are importanță deosebită datorită faptului că apariția potențialelor în lagrangean, adică atribuirea potențialelor unei semnificații absolute constituie o dificultate esențială a teoriei lui Mie care a încercat o extindere neliniară unitară a teoriei lui Maxwell pentru a înlătura dificultățile esențiale ale teoriei lui Lorentz.

Astfel M i e a considerat în particular un lagrangean de forma

$$L = F + a_n \overset{n}{\mu}. \tag{177}$$

Deoarece relațiilor (171) și (172) le corespund relațiile

$$p_{\mu\nu} = 2\frac{\partial L}{\partial f^{\mu\nu}}, \quad j_\mu = -\frac{c}{4\pi}\frac{\partial L}{\partial A^\mu} \tag{178}$$

și avem

$$L - H = \frac{1}{2} p_{\mu\nu} f^{\mu\nu} - \frac{4\pi}{c} A_\mu \overset{1}{j}, \tag{179}$$

rezultă că funcția duală lui L, definit prin (177), este

$$H = P + b_n \overset{n}{\rho}, \tag{180}$$

unde b_n depinde de a_n și k.

Pentru cazul $n = 2$, ce corespunde cazului ecuațiilor lui Proca ce reprezintă mezonul vectorial, sînt posibile cele două reprezentări ale teoriei. Însă, în general, acest lucru nu este adevărat, de exemplu cazul particular

$$H = P + b\rho, \tag{181}$$

nu are un corespondent pentru L; iar cazul maxwellian cînd $a_n = 0$ în L, nu are un corespondent pentru H.

Ținînd seamă de relațiile (171), (172) și de definițiile (174), avem

$$F = -\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)^2 \overset{2}{P}, \quad \mu = \left|\frac{\partial H}{\partial \rho}\right|. \tag{182}$$

În cazul cînd

$$\frac{D(F, \mu)}{D(P, \rho)} \neq 0,$$

din aceste ecuații putem exprima P și ρ în funcție de F și μ, deci teoria fără potențial este echivalentă cu teoria lui Mie. În cazul contrar, cînd iacobianul este nul, rezultă că avem o relație de forma

$$G(F, \mu) = 0,$$

deci este imposibil de a construi o electrodinamică Mie echivalentă, existînd o condiție suplimentară pentru potențialul A_μ.

Astfel în cazul (181) din relația (172) avînd în vedere că $\frac{\partial H}{\partial \rho} = 1$, rezultă condiția

$$\mu = \frac{1}{k} \sqrt{A^\mu A^\mu} = 1. \tag{183}$$

Punînd

$$\lambda = \frac{1}{k^2} \rho \left(\frac{\partial H}{\partial \rho} \right)^{-1}, \tag{184}$$

din (171), dacă $\frac{\partial H}{\partial P} \neq 0$, deducem

$$p_{\mu\nu} = M (F, |\lambda| \mu) \; f_{\mu\nu},$$

deci

$$\lambda A^\mu = \{ M (F, |\lambda| \mu) f^{\mu\nu} \}_{,\nu}. \tag{185}$$

În cazul particular (181), luînd $b = 1$, găsim

$$\lambda A^\mu = f^{\mu\nu}_{,\nu}, \quad \lambda = \frac{1}{k^2} \rho \geqslant 0. \tag{186}$$

Ecuațiile (183), (186) și (173) sînt ecuațiile noii electrodinamici a lui Dirac [58], care este reprezentarea lui L a teoriei unitare definite prin (181), cu deosebirea că în electrodinamica lui Dirac λ poate să fie și negativ. Aceste ecuații derivă dintr-un principiu variațional al cărui lagrangean sub forma dată de D i r a c este

$$L = -\frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \lambda (A_\mu A^\mu - k^2). \tag{187}$$

Se vede că dacă $\lambda = 0$ obținem cîmpul maxwellian în vid, adică fără sarcini. Lagrangeanul se mai poate scrie sub forma

$$L' = -F - \rho = -\frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} - k \sqrt{f^{\lambda}_{\mu\lambda} f^{\mu k}_{,k}}, \tag{188}$$

unde $k = \frac{m_0 c^2}{e}$, se vede că $f_{\mu\nu}$ fiind variabilele de cîmp, $f_{\mu\nu,\lambda}$ joacă rolul vitezelor, momentul canonic conjugat fiind

$$p^{\mu\nu} = \frac{\partial L'}{\partial f_{\mu\nu,\lambda}},$$

iar potențialele A_μ sînt niște variabile ce descriu sarcinile cîmpului în mod natural, avînd

$$j_\mu = -\lambda A_\mu. \tag{189}$$

Conform acestei teorii o sarcină infinitesimală se mișcă conform teoriei lui Lorentz, fiind posibil să neglijăm influența cîmpului propriu.

Pentru studiul mișcării unei sarcini finite au fost elaborate metode bazate pe aproximații succesive [59], [60], avînd în vedere caracterul neliniar al cîmpului. Îndeosebi menționăm că, după cum a arătat L. Infeld [60], se poate aplica în acest caz noua metodă de aproximație elaborată de Einstein și Infeld în cazul cîmpului gravitațional, pornind de la cîmpul maxwellian în vid cu aproximație de ordinul zero prin dezvoltarea în serie după e a lui eA_μ, care reprezintă cantitatea de mișcare, și eA_4, care reprezintă energia electronului, respectiv a lui λ.

În această nouă electrodinamică teoria electronului este construită pe baza unei teorii clasice a mișcării unui curent continuu de sarcini electrice în care intervine doar sarcina specifică e/m, existența electronilor de sarcină e fiind considerat ca un fenomen cuantic. În acest fel se elimină dificultățile ridicate de sarcina punctiformă într-un fel cu totul nou, introducîndu-se prin cuantizarea cîmpului atît sarcina cît și spinul, precum și statistica Fermi.

Pentru a descrie mișcarea rotațională a curentului de sarcini într-un cîmp magnetic, Dirac [61] a completat teoria sa clasică introducînd, pentru descrierea liniilor de curent, două variabile noi ξ și η, funcții de x_μ, astfel că în loc de $A^\mu = k\rho^\mu$ se scrie

$$A^\mu = k\rho^\mu + \xi \frac{\partial \eta}{\partial x_\mu}. \tag{190}$$

În acest caz (187) se înlocuiește prin

$$L = -\frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \lambda (\rho_\mu \rho^\mu - 1), \tag{191}$$

considerînd ca variabile independența ρ^μ, ξ, η, λ, din principiul variațional se obțin ecuațiile cîmpului

$$k f^{\mu\nu}_{,\nu} = \lambda \rho^\mu, \quad f^{\mu\nu}_{,\nu} \eta_{,\mu} = 0, \quad f^{\mu\nu}_{,\nu} \xi_{,\mu} = 0, \tag{192}$$

dacă ținem seama de (173) și (190). După cum a arătat Infeld [7], această nouă formă a teoriei se poate reprezenta în mod echivalent prin teoria fără potențial în care

$$H = P + \rho + I, \tag{193}$$

unde

$$I = \frac{4\pi k}{c} (\eta_{,\mu} \xi + \xi_{,\mu} \eta) j^\mu, \tag{194}$$

are o structură analogă termenului de interacție, socotind că invariantul P reprezintă cîmpul și invariantul ρ reprezintă aspectul corpuscular. Considerînd $p_{\mu\nu}$, ξ, η variabile, se obțin, din principiul variațional, ecuațiile

$$p_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} k^2 \left[\left(\frac{j_\nu}{\rho} \right)_{,\mu} - \left(\frac{j_\mu}{\rho} \right)_{,\nu} \right] + k (\xi_{,\mu} \eta_{,\nu} - \xi_{,\nu} \eta_{,\mu}),$$
$$j^\mu \xi_{,\mu} = 0, \quad , \quad j^\mu \eta_{,\mu} = 0, \tag{195}$$

care sînt echivalente cu ecuațiile de mai sus ale cîmpului.

Folosind o reprezentare H mai complicată prin introducerea unor noi variabile, D i r a c extinde teoria sa la cazul mai multor curenți și arată posibilitatea cuantificării cîmpului obținînd relații de comutare analoge cu cele ale electronului punctiform.

О КЛАССИЧЕСКИХ ОСНОВАХ ТЕОРИИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Рассматриваются различные исследования, проведенные с целью устранения недочетов классической теории, точкообразной модели электрона. Различные попытки расширения основ классической электродинамики Лоренца сводятся в сущности к изменению выражения лагранжиана, входящего в вариационный принцип, из которого выводятся уравнения поля и уравнения движения. Они привели в важным положительным результатам, представляющим в новом свете вопрос о массе и спине электрона и вообще об элементарных частицах, выявив связь с внутренней структурой частицы, которой нельзя пренебрегать. Для сравнения и обсуждения результатов, полученных после введения протяженных частиц, различные теории были сгруппированы в дуалистические, нелокальные и унитарные теории, что позволяет обнаружить сродство физических объяснений, а также и новых вопросов, к которым они приводят.

DES BASES CLASSIQUES DE LA THÉORIE DES PARTICULES ÉLÉMENTAIRES

(RÉSUMÉ)

L'Auteur analyse les différentes recherches qui ont été effectuées sur le plan de la physique classique, dans le but de remédier aux inconvénients de la théorie du modèle punctiforme d'électron. Les différents essais d'extension des fondements de l'électrodynamique classique de Lorentz se réduisent au fond à la modification de l'expression lagrangienne intervenant dans le principe variationnel, dont on peut déduire les équations du champ et les équations de mouvement. Ces essais ont abouti à d'importants résultats positifs qui donnent une forme nouvelle au problème de la masse et du spin de l'électron, ainsi que des particules élémentaires en général, et mettent en évidence le rapport avec la structure interne de la particule qui ne peut être négligée. Pour la comparaison et la discussion des résultats obtenus par l'introduction des particules étendues, les différentes théories ont été groupées en théories dualistes, non locales et unitaires, ce qui permet de mettre en évidence la corrélation qui existe entre les interprétations physiques et les nouveaux problèmes que ces dernières suscitent.

BIBLIOGRAFIE

1. P. A. M. D i r a c, Proc. Roy. Soc., 1938, t. 167, p. 148.
2. M. B o r n, Proc. Roy. Soc., 1934, t. 143, p. 1410.
3. M. B o r n a. L. I n f e l d, Proc. Roy. Soc., 1934, t. 144, p. 425.

4. M. Born, Annales de l'Institut H. Poincaré, 1937, t. VII, p. 155.
5. L. Infeld, Proc. Cambridge Phil. Soc., 1937, t. 33, p. 70.
6. L. Infeld a.B. Hofmann, Phys. Rev., 1937, t. 51, p. 765.
7. L. Infeld, Acta Phys. Pol., 1953, t. 12, p. 123.
8. F. Bopp, Ann. d. Phys., 1940, t. 38, p. 345.
9. B. Podolski, Phys. Rev., 1941, t. 62, p. 68.
10. B. Podolsky a. Schwed, Rev. Mod. Phys., 1948, t. 20, p. 40.
11. E. C. G. Stuekelberg, Nature, 1939, t. 144, p. 188; Helv. Phys. Acta, 1941, t. 14, p. 51.
12. L. de Broglie, C. R., 1949, t. 229, p. 401; Portugaliae Math., 1949, t. 8; C. R., 1951, t. 232, p. 1269 și 1271; C. R., 1952, t. 234, p. 20.
13. A. Sokolov i D. Ivanenko, *Kvantovaia teoria polia*. Gosizdat T. T. Lit., Moscova, 1952, p. 569.
14. F. Bopp, Ann. d. Phys., 1943, t. 42, p. 573.
15. D. I. Blohinţev, Ucen. Zapiski M.G.U., 1945, t. 3, p. 101; JETF, 1946, t. 16, p. 480; 1948, t. 18, p. 565.
16. R. Peierls a. Mc Manus, Proc. Roy. Soc., 1948, t. 195, p. 323.
17. G. I. Yevick, Phys. Rev., 1952, t. 85, p. 911.
18. A. Pais a. G. E. Uhlenbeck, Phys. Rev., 1950, t. 79, p. 145.
19. D. Ivanenko i A. Sokolov, *Klasiceskaia teoria polia*. Gosizdat T. T. Lit., Moscova, 1949, cap. III.
20. F. Bopp, Ztschft. f. Naturw., 1946, t. 1, p. 53.
21. C. N. Yang a. L. Feldman, Phys. Rev., 1950, t. 79, p. 972.
22. Kallén, Arkiv. f. Phys., 1950, t. 2, p. 371.
23. J. Rayski, Acta Phys. Pol., 1950, t. XI, p. 25; Phil. Mag., 1951, t. 42, p. 1289.
24. Wataghin, Ztschft. f. Phys., 1935, t. 92; Nuovo Cimento, 1951, t. 8.
25. C. Bloch, Dan. Math. Phys. Medd., 1952, t. 27.
26. W. Pauli, Nuovo Cimento, 1953, t. 10, p. 648.
27. Chrétien, R. Peierls, Nuovo Cimento, 1953, t. 10, p. 668.
28. J. Rzewuski, Acta Phys. Pol., 1951, t. XII, p. 9.
29. R. Ascoli, Nuovo Cimento, 1953, t. 10, p. 745.
30. J. Rzewuski, Acta Phys. Pol., 1953, t. XII, p. 14; Nuovo Cimento, 1953, t. 11, p. 182.
31. M. Born, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1938, t. 59, p. 219; Rev. Mod. Phys., 1949, t. 21, p. 463.
32. M. Born a. H. S. Green, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1948, t. 62 p. 470.
33. H. S. Green a. K. C. Chang, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1949, t. 63, p. 105.,
34. H. L. Jordan, Ztschft. f. Naturf., 1953, t. 8, p. 341.
35. H. Yukawa, Phys. Rev., 1950, t. 77, p. 219.
36. M. A. Markov, JETF, 1940, t. 10, p. 92; 1951, t. 21, p. 11; Uspehi Fiz. Nauk 1953, t. LI, p. 317.
37. P. Jordan, V. Fok, Ztschft. f. Phys., 1930, t. 61, p. 206.
38. J. Rayski, Acta Phys. Pol., 1950, t. 10, p. 29; 1951, t. 11, p. 109; Proc. Roy. Soc., 1951, t. 64, p. 957.
39. C. Möller, Danske Videnskab. Selsk. math. fysiske Med., 1952, t. 27.
40. H. Yukawa, Phys. Rev., 1953, t. 91, p. 415.
41. J. Rayski, Nuovo Cimento, 1953, t. 10, p. 1729; Acta Phys. Pol., 1954, t. XIII, p. 77.
42. F. Bopp, Ztschft. f. Naturf., 1948, t. 3a, p. 564; Ztschft. f. angew. Physik, 1949, t. 1, p. 387.
43. F. Bopp u. F. L. Bauer, Zschft. f. Naturf., 1949, t. 4a, p. 611.
44. F. Bopp u. R. Haag, Ztschft. f. Naturf., 1950, t. 5a, p. 644.
45. H. Hönl u. A. Papapetrou, Ztschft. Phys., 1939, t. 112, p. 512; 1939, t. 114, p. 478; 1940, t. 116, p. 154.
46. W. Wessel, Ztschft. f. Naturf., 1946, t. 1a, p. 622.
47. F. J. Belinfante, Physica, 1939.
48. L. de Broglie, *Théorie générale des particules à spin*. Gauthier-Villars, Paris, 1943.
49. N. Kemmer, Proc. Roy. Soc., 1940, t. 173, p. 91.
50. A. Kramers, F. T. Belinfante, J. K. Lubanski, Physica, 1941, t. 8, p. 597.

51. H. Bhabha, Rev. Mod. Physics, 1945, t. 17, p. 200; 1949, t. 21, p. 451.
52. D. I. Blohinţev, Uspehi Fiz. Nauk, 1951, t. 44, nr. 1.
53. I. I. Frenkel, Uspehi Fiz. Nauk, 1950, t. 42, p. 69; 1951, t. 44, nr. 1.
54. L. de Broglie, *La physique quantique restera-t-elle indéterministe?* Gauthier-Villars, Paris, 1953, p. 107.
55. J. P. Vigier, C. R. Acad. Sc., 1952, t. 235, p. 1107 şi 1342.
56. H. Hönl, Ztschft. f. Naturf., 1948, t. 3a, p. 573.
57. G. Mie, Ann. Phys., 1912, t. 37, p. 511.
58. P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc., 1951, t. 209, p. 291.
59. M. Cini, Proc. Roy. Soc., 1952, t. 213, p. 520.
60. L. Infeld, Bull. Acad. Sc. Pol., 1953, t. I, p. 18 şi 99.
61. P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc., 1953, t. 222, p. 330; 1954, t. 223, p. 458.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE FIZICĂ
Tomul VI, nr. 2, 1955

O METODĂ DE DETERMINARE A VARIAŢIILOR MICI DE IMPEDANŢĂ*)

DE

I. TEODORESCU

1. Problema studiată mai jos a fost determinată de necesitatea de a realiza un defectoscop prin inducţie pentru cercetarea nedestructivă a pieselor din material feros. Dacă o asemenea piesă e plasată în cîmpul unei bobine, pierderile prin curenţi Foucault şi prin hysterezis determină o creştere a rezistenţei echivalente serie a bobinei.

Inductanţa bobinei se micşorează, pe de o parte, datorită curenţilor Foucault, iar pe de altă parte, se măreşte datorită permeabilităţii magnetice a materialului, care face să scadă reluctanţa circuitului magnetic al bobinei.

În ansamblu, va rezulta o variaţie într-un sens sau în altul a inductanţei şi în orice caz o creştere a rezistenţei serie totale.

Explorînd o piesă cu o asemenea bobină şi măsurînd inductanţa şi rezistenţa ei în diferite regiuni ale piesei, sau comparînd măsurătorile pentru mai multe piese identice ca dimensiuni, se pot obţine indicaţii asupra omogenităţii lor.

Măsurarea se poate face cu o punte, însă aceasta prezintă o serie de dificultăţi, din cauză că se cere o sensibilitate mare a dispozitivului. Experimental se constată că prezenţa unor fisuri sau goluri vizibile în material produce variaţii ale rezistenţei şi inductanţei de ordinul zecimilor din procent sau mai puţin.

Un dispozitiv mult mai sensibil este un oscilator care lucrează foarte aproape de limita de amorsare a oscilaţiilor [1].

Se va studia mai departe metoda de măsură cu ajutorul acestui oscilator.

2. Montajul realizat are schema de principiu din figura 1. Datorită reacţiei pozitive între ieşire şi intrare, sistemul va oscila dacă sînt satisfăcute condiţiile de fază şi amplitudine.

Prin alegerea convenabilă a capacităţilor C_B, C_c şi a inductanţei şocului S, defazajul pe întreaga buclă de reacţie poate fi foarte mic. În acest caz, singurul defazaj ce intervine este cel produs de apariţia armonicelor în curentul anodic al tubului T_2, în care se face limitarea amplitudinii, din cauza neliniarităţii caracteristicii $i_a = f\ (u_g)$ a acestuia. Variaţiile de frecvenţă în timpul lucrului sînt mici, aşa încît putem considera frecvenţa constantă şi se poate face dimensionarea corespunzătoare a condensatorilor C_B, C_c şi a şocului S. În plus,

*) Lucrare prezentată Institutului de fizică la data de 22 iulie 1954.

se consideră că R_g este foarte mare, $R \gg Z$ și $R_i \gg Z$, în care R_i este rezistența internă a tubului T_2. De asemenea, $R_g \gg R_1$. Această din urmă condiție

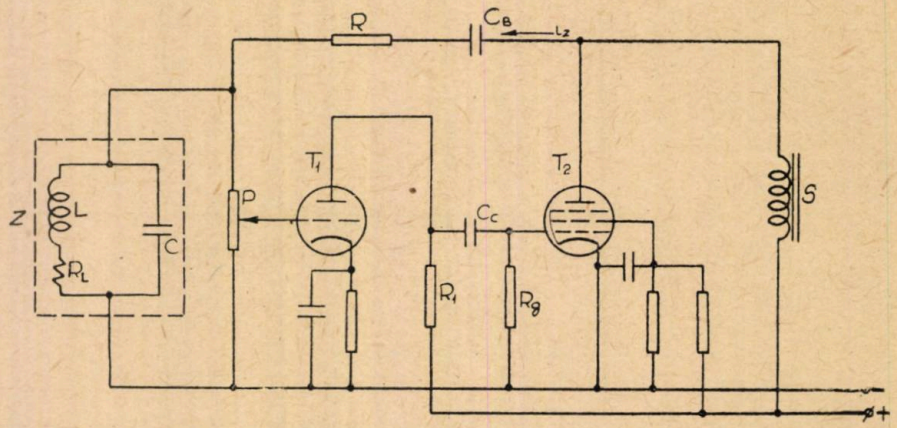


Fig. 1

este necesară pentru ca apariția curenților de grilă la tubul T_2 să nu micșoreze sensibil impedanța de sarcină și deci amplificarea tubului T_1.

În cele ce urmează vom nota panta tubului T_2 cu S.

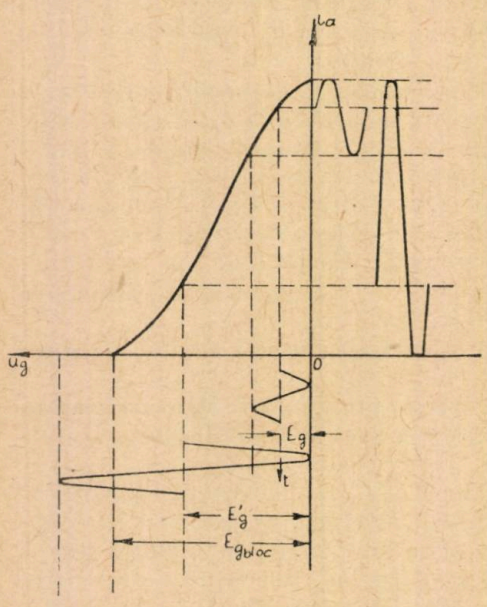


Fig. 2

Se presupune că sistemul oscilează și că s-a ajuns la un regim stabil. Pe grila tubului T_2 există o tensiune alternativă, periodică, dar nesinusoidală. Din cauza curentului de grilă ce apare, se va stabili o negativare care va fi practic egală cu amplitudinea semiperioadei pozitive a tensiunii de grilă, deoarece rezistența R_g este foarte mare: $|E_g| \approx U_g^{(+)}$ (fig. 2)

Tubul T_1 lucrează într-un regim independent de amplitudinea oscilațiilor (pe electrozii lui apar tensiuni mici, iar funcționarea este în clasa A, cu negativare prin curentul catodic, deci amplificarea lui va fi constantă pe toată gama de tensiuni ce apar în funcționare). De asemenea, montajul trebuie realizat ca să lucreze cu distorsiuni cît mai mici. În cele ce urmează vom presupune că distorsiunile tubului T_1 sînt nule.

Limitarea amplitudinii se face la început datorită curenților de grilă, pe seama mutării punctului de funcționare al tubului T_2. Dacă condiția de amorsare a oscilațiilor este îndeplinită

($A\beta \geqslant 1$) ele vor apărea pe grila tubului T_2. Pe măsură ce amplitudinea lor crește, se mărește și $|E_g|$, deci scade S_{ech}, așa încît amplificarea cuadripolului A va scădea pînă cînd se realizează condiția $A\beta = 1$.

Dacă factorul β este suficient de mare, limitarea amplitudinii se face și pe seama tăierii curentului anodic, adică prin micșorarea pantei efective, funcționarea trecînd în regim de clasă AB sau C (fig. 2).

Odată regimul stabilit, o variație a lui β va necesita o variație corespunzătoare a lui A, deci și a lui U_g.

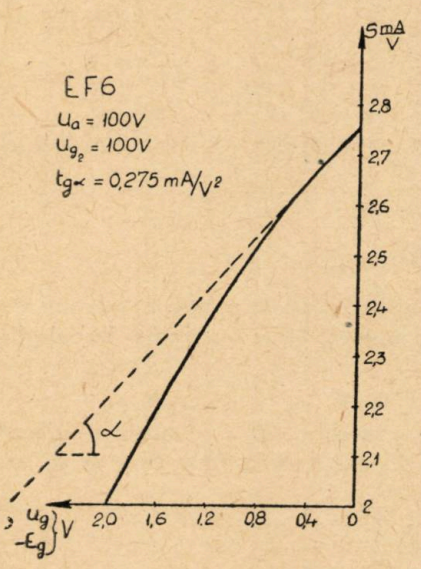


Fig. 3

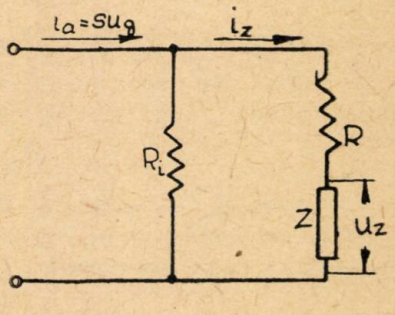


Fig. 4

Se știe că stabilitatea tensiunii generate de un oscilator este cu atît mai mică, cu cît regimul de lucru este mai apropiat de limita de stingere a oscilațiilor, adică în situația în care limitarea amplitudinii se face din cauza unei neliniarități neînsemnate a caracteristicii, ceea ce face ca pentru o mică variație a factorului de reacție (determinată de variația unuia din elementele din bucla de reacție), să fie necesară o mare variație a amplitudinii oscilației, pentru ca regimul permanent să fie restabilit.

Tocmai această proprietate este utilizată în montajul de față, așa încît în cele ce urmează se va vorbi numai de funcționarea cu amplitudini mici, întrucît cazul celălalt, al oscilatorului puternic limitat (funcționare în clasa AB sau C), necesită variații relative ale gradului de reacție, comparabile cu variațiile de tensiune urmărite, așa că nu prezintă interes.

Pe de altă parte, rezultă că, pentru studierea cantitativă a fenomenelor, este necesar să se cunoască expresia matematică a caracteristicii elementului neliniar, respectiv a caracteristicii $S = f(U_g)$ a tubului T_2. Vom face ipoteza simplificatoare că panta variază liniar cu tensiunea de negativare, deci cu U_g. Acest lucru este admisibil pentru variații mici în jurul originii și corespunde cu realitatea (fig. 3). Se poate deci scrie că panta în punctul de funcționare este

$$S_0 = S_{max} + S_1 E_g, \tag{1}$$

$$S_0 = S_{max} - S_1 U_g^{(+)}. \tag{2}$$

Referindu-ne la notațiile din figura 1 și la schema echivalentă a tubului T_2 (fig. 4), se poate scrie, pentru fiecare componentă

$$\overline{I}_{Zn} = \overline{I}_{an} \cdot \frac{R_i}{R + Z_n + R_i} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{3}$$

și

$$\overline{U}_{Zn} = Z_n \cdot \overline{I}_{Zn} = Z_n \, \overline{I}_{an} \cdot \frac{R_i}{R + Z_n + R_i} . \tag{4}$$

Se observă că Z_n este foarte mic prin comparație cu $R + R_i$, așa că se poate neglija, și dacă notăm raportul $\dfrac{R_i}{R + R_i} = K_1$,

$$\overline{U}_{Zn} = K_1 \cdot Z_n \cdot \overline{I}_{an} . \tag{5}$$

Notînd mai departe cu P raportul de diviziune al potențiometrului de pe grila tubului T_1 și cu A_1 amplificarea acestui tub, se ajunge la relația

$$\overline{U}_{gn} = PA_1 K_1 Z_n \overline{I}_{an} . \tag{6}$$

Considerînd că defazajul componentei fundamentale a curentului anodic față de tensiunea de grilă este neglijabil în cazul oscilațiilor mici (a se vedea anexa), se poate scrie pentru fundamentală

$$U_{g1} = PA_1 K_1 Z_1 I_a , \tag{7}$$

în care U_{g1}, I_{a1} și Z_1, sînt respectiv amplitudinea componentei fundamentale a tensiunii de grilă, a curentului anodic și impedanța circuitului pentru fundamentală.

Dacă se definește panta echivalentă pentru fundamentală prin

$$S_{ech} = \frac{I_{a1}}{U_{g1}} , \tag{8}$$

rezultă

$$PA_1 K_1 Z_1 S_{ech} = 1. \tag{9}$$

Această condiție reprezintă starea de regim a oscilatorului. La o valoare constantă a impedanței, prin micșorarea raportului P, amplitudinile de oscilație scad, panta echivalentă crește, și condiția (7) se păstrează. Limita lui S_{ech} este S_{max}. Acestei limite îi corespunde limita P_0 a valorilor raportului P, sub care oscilațiile dispar. P_0 se determină deci prin

$$P_0 A_1 K_1 Z_1 S_{max} = 1. \tag{10}$$

La amplitudini mici (a se vedea anexa), S_{ech} este practic egal cu S_0.

Păstrînd acum această valoare P_0 și dînd lui Z_1 o creștere $\delta Z_1 = \varepsilon Z_1$, apar oscilații a căror amplitudine este condiționată de

$$P_0 A_1 K_1 Z_1 (1 + \varepsilon) S_0 = 1. \tag{11}$$

Înlocuind P_0 din (10) și S_0 din (2) în (11) se capătă

$$\frac{U_{g1}}{\varepsilon} = \frac{S_{max}}{S_1} - U_{g1} . \tag{12}$$

S-a considerat, deoarece gradul de distorsiuni al tensiunii de grilă este mic, că $U_g^{(+)} \approx U_{g1}$.

Pentru valori mici ale lui U_{g1}, se poate scrie

$$U_{g1} \approx \frac{S_{max}}{S_1} \varepsilon. \tag{13}$$

Ceea ce arată că la amplitudini mici, tensiunea este proporțională cu creșterea relativă a impedanței Z.

Acest lucru este important pentru etalonarea instrumentului.

Impedanța Z este un circuit acordat derivație la care rezistența poate fi considerată numai în brațul L (fig. 1), deoarece la frecvențe audio, inductanța are o rezistență proprie apreciabilă, pe lîngă care rezistența de izolație a condensatorului este neglijabilă.

Frecvența la care este rezistiv acest circuit este

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{Lc}\left(1 - \frac{R_L^2 C}{L}\right)}.$$

Dacă variază una din mărimile L sau R_L, va varia puțin și frecvența de oscilație, astfel ca egalitatea de mai sus să se păstreze, deci impedanța circuitului este tot timpul

$$Z_1 = \frac{L}{CR_L}.$$

În realitate (a se vedea anexa), frecvența de oscilație este puțin diferită, iar impedanța nu este pur rezistivă, însă influența acestui fenomen este cu totul neglijabilă.

Variația relativă a impedanței este

$$\varepsilon = \frac{\Delta Z_1}{Z_1} = \frac{\Delta L}{L} - \frac{\Delta R_L}{R_L}. \tag{14}$$

În ceea ce privește sensibilitatea sistemului, ea poate fi definită chiar prin raportul $\frac{U_g}{\varepsilon}$, dar trebuie adăugat că, pentru a putea observa variații ale impedanței, în ambele sensuri, trebuie să se lucreze în jurul unei valori finite pentru U_g, valoare care trebuie să fie mai mare decît variația de tensiune corespunzătoare celei mai mari variații de impedanță ce trebuie măsurată. Sensibilitatea poate fi atunci exprimată relativ la această valoare U_{g0} prin σ

$$\sigma = \frac{\Delta U_g}{U_{g0}} : \frac{\Delta Z_1}{Z_1} \tag{15}$$

și, ținînd seama de (13)

$$\sigma = \frac{S_{max}}{S_1 U_{g0}}. \tag{16}$$

3. *Exemplu.* Folosind tubul *EF*6 (T_2) la care $S_{max} = 2{,}75$ mA/V,

$$S_1 = 0{,}275 \frac{\text{mA}}{\text{V}^2} \quad \text{(fig. 4)},$$

s-a reprezentat curba $U_g = f(\varepsilon)$ (fig. 5) conform relației (12). Se vede că pînă la U_g = circa 100 mV, relația (13) prezintă o aproximație suficientă. De fapt, se lucrează totdeauna cu tensiuni mai mici decît aceasta.

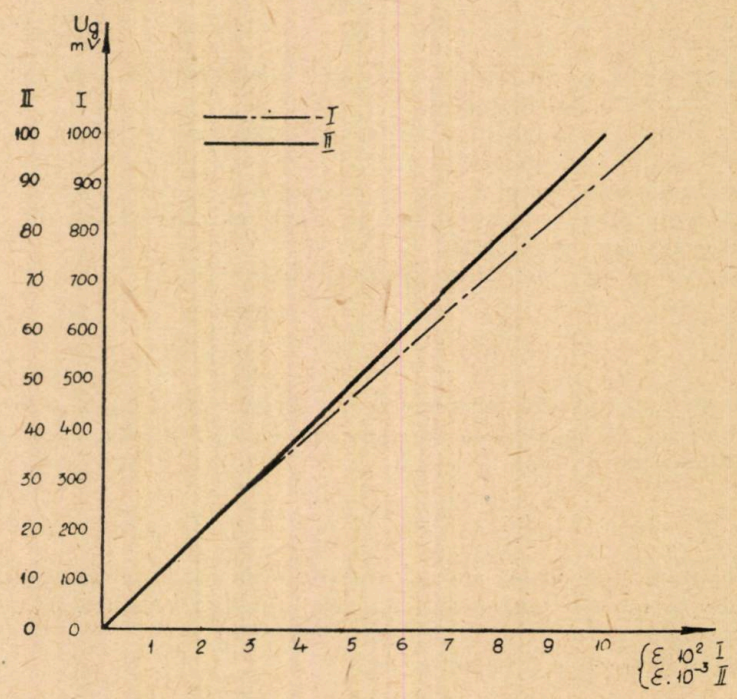


Fig. 5

Dacă U_{g1} este de 100 mV și, în cazul cel mai grav, $U_{g2} = 0{,}1\ U_{g1}$ (distorsiuni de 10%), rezultă din (2): $S_0 = 0{,}99\ S_{max}$, iar din (29) (anexa):

$$S_{ech} = S_0 - \frac{S_1}{2} U_{g2} = S_{max}\left(0{,}99 - \frac{S_1}{2S_{max}} U_{g_2}\right) = S_{max}\ (0{,}99 - 0{,}05 \times 0{,}01) =$$

$$= 0{,}9895\ S_{max} \approx S_0.$$

Deci aproximația admisă este justificată, eroarea fiind de ordinul $1\,^0/_{00}$.

Dacă se lucrează în jurul valorii $U_{g0} = 100$ mV cu care putem cerceta variații maxime negative de impedanță de -1% (dacă $\varepsilon = -1\%$ oscilațiile se sting), sensibilitatea este $\sigma = 100$.

Pentru $U_{g0} = 50$ mV, $\sigma = 200$, ceea ce înseamnă că o variație de $1\,^0/_{00}$ a impedanței se resimte ca o variație de 20% a tensiunii.

4. *Concluzii.* Pentru o bună funcționare a acestui dispozitiv, este necesară o judicioasă alegere a tuburilor, care trebuie să satisfacă condițiile ce au rezultat. Sensibilitatea este (16) proporțională cu raportul $\frac{S_{max}}{S_1}$ și invers proporțională cu U_{g0}.

De aici rezultă că trebuie ales un tub care să aibă raportul $\frac{S_{max}}{S_1}$ cît mai mare și mai independent de negativare, adică $S_1 = \text{const.}$ În exemplul citat, acest raport era de 10 V. Pot fi găsite asemenea tuburi, sau se pot imagina montaje care realizează acest lucru din exterior. Pe de altă parte, e bine ca U_g să fie mic. Această alegere este limitată în primul rînd de necesitatea de a acoperi o gamă de variație a impedanței în jurul unei valori medii, și în al doilea rînd din motive de stabilitate a dispozitivului, care scade odată cu creșterea sensibilității.

În cazul cînd atît L cît și R_L variază simultan, caz curent în defectoscopia prin inducție, există posibilitatea unei compensări a variației celor două elemente (relația (14)). Se pot găsi însă mijloace de a face ca defectele mai importante să se traducă prin variația unui singur element, sau printr-o variație simultană și de sens contrar a lui L și R_L, astfel încît sensibilitatea să rămînă satisfăcătoare. Discutarea diferențelor de structură care produc aceste variații depășește cadrul acestui articol.

Dacă se face astfel ca numai unul din elementele circuitului să varieze în funcție de variația unei mărimi neelectrice oarecare (de exemplu introducînd în serie în circuit un traductor rezistiv, sau făcînd să varieze capacitatea), dispozitivul poate fi întrebuințat ca aparat de măsură a mărimilor neelectrice, ce variază foarte puțin.

Pentru ca măsurătorile să fie reproductibile, este necesară realizarea unei bune stabilități în funcționare.

Cauzele principale ce pot strica stabilitatea sînt:

a) variații ale tensiunilor de alimentare,

b) variații de temperatură ce ar modifica valorile pieselor din montaj,

c) îmbătrînirea tuburilor.

Întrucît rezistențele intervin în relația ce definește starea de echilibru, doar sub formă de rapoarte, dacă aceste rezistențe au același coeficient de temperatură, influența variațiilor de temperatură este în cea mai mare măsură înlăturată, în afară de influența asupra elementelor circuitului acordat.

Prin îmbătrînire, de obicei, curba $S(E_g)$ se deplasează prin translație în jos, ceea ce nu modifică raportul coeficienților $\frac{S_{max}}{S_1}$, așa încît simpla modificare a raportului P din relația (9) este suficientă pentru a reface etalonarea. Aceasta din urmă se modifică cu schimbarea tuburilor, dacă s-a modificat și raportul $\frac{S_{max}}{S_1}$.

În ceea ce privește tensiunile de alimentare, ele trebuie neapărat obținute de la o sursă stabilizată și de mică rezistență internă.

La schimbarea traductorului (sau a circuitului, deci pentru altă valoare medie a impedanței Z, care însă respectă condițiile $R_i \gg Z$, $R \gg Z$), reetalonarea se face tot cu potențiometrul P. Acest potențiometru poate fi realizat dintr-un divizor în trepte comutabile, pentru diferite valori ale impedanței sau diferite sensibilități (valori ale lui U_{g_0}) urmat de o mică rezistență variabilă pentru reetalonare. Se poate studia unul și același fenomen la diferite frecvențe, prin circuite acordate schimbătoare. Tensiunea alternativă poate fi măsurată în orice punct al montajului, cu condiția ca instrumentul să aibă o mare impedanță de intrare (voltmetru electronic).

ANEXĂ

INFLUENȚA ARMONICELOR

Se știe că orice oscilator întreținut se bazează pe existența unui element neliniar, care face posibilă limitarea amplitudinii oscilațiilor. De aceea, oscilațiile nu vor fi niciodată pur sinusoidale, ci va exista întotdeauna un procent mai mare sau mai mic de armonice, în funcție de gradul de neliniaritate al caracteristicii de funcționare. În cazul nostru, elementul neliniar este tubul T_2, a cărui caracteristică $i_a = f(u_g)$ va fi dată de

$$i_a = I_{a0} + S_0 u_g + \frac{1}{2} S_1 u_g^2 + \ldots, \tag{17}$$

în care

$$S_0 = S_{\max} + S_1 E_g = S_{\max} - S_1 U_g^{(+)}.$$

Neglijînd termenii de grad mai mare decît 2, ceea ce constituie o aproximație suficientă în cazul amplitudinilor mici și referindu-ne, în cele ce urmează, doar la componentele alternative, putem scrie

$$\Delta i_a = S_0 \Delta u_g + \frac{1}{2} S_1 (\Delta u_g)^2. \tag{18}$$

Tensiunea Δu_g are forma

$$\Delta u_g = \sum_{k=1}^{\infty} U_{gk} \sin (k \omega t + \varphi_k). \tag{19}$$

Înlocuind valoarea lui Δu_g în (18), se capătă

$$\Delta i_a = S_0 \sum_{k=1}^{\infty} U_{gk} \sin (k \omega t + \varphi_k) + \frac{1}{2} S_1 \left[\sum_{k=1}^{\infty} U_{gk} \sin (k \omega t + \varphi_k) \right]^2, \tag{20}$$

sau

$$\Delta i_a = S_0 \sum_{k=1}^{\infty} U_{gk} \sin (k \omega t + \varphi_k) + \frac{S_1}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{gm} U_{gn} \sin (m \omega t + \varphi_m) \sin (n \omega t + \varphi_n), \tag{21}$$

$$\Delta i_a = S_0 \sum_{k=1}^{\infty} U_{gk} \sin (k \omega t + \varphi_k) + \frac{S_1}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{gm} U_{gn} \{ \cos [(m-n) \omega t + \varphi_m - \varphi_n] - \cos [(m+n) \omega t + \varphi_m + \varphi_n] \}, \tag{21'}$$

efectuînd calculele și scriind termenul de pulsație $p\omega$ se capătă

$$i_{ap} = S_0 U_{gp} \sin (p\omega t + \varphi_p) + \frac{S_1}{4} \left[\sum_{m=1}^{\infty} U_{gm} U_{g(p+m)} \cos (p \omega t - \varphi_m + \varphi_{p+m}) - \sum_{m=1}^{p-1} U_{gm} U_{g(p-m)} \cos (p \omega t + \varphi_m + \varphi_{p-m}) + \sum_{m=p+1}^{\infty} U_{gm} U_{g(m-p)} \cos (p \omega t + \varphi_m - \varphi_{m-p}) \right], \tag{22}$$

atunci

$$\Delta i_a = \sum_{p=1}^{\infty} i_{ap}, \tag{23}$$

rezultă pentru termenul de pulsație ω (fundamentală)

$$\bar{I}_{a1} = \left[\dot{S}_0 U_{g1} - \frac{S_1}{2} \sum_{m=2}^{\infty} U_{gm} U_{g(m-1)} \sin(\varphi_m - \varphi_{m-1})\right] + \\ + j\left[\frac{S_1}{2} \sum_{m=2}^{\infty} U_{gm} U_{g(m-1)} \cos(\varphi_m - \varphi_{m-1})\right]. \tag{24}$$

Considerăm ca origine de timp momentul cînd u_g trece prin zero, deci $\varphi_1 = 0$. În mod analog cu (24) se poate scrie pentru armonica de ordin p, o expresie de forma

$$\bar{I}_{ap} = A_p + j B_p = I_{ap} \underline{|\psi_p}. \tag{25}$$

Ținînd seama că

$$\bar{U}_{gp} = PA_1 K_1 Z_p \bar{I}_{ap}, \tag{6'}$$

rezultă

$$U_{gp} \underline{|\varphi_p} = PA_1 K_1 |Z_p| I_{ap} \underline{|\chi_p + \psi_p}, \quad (p=1, 2, 3, \ldots). \tag{26}$$

Pentru a putea rezolva acest sistem, este necesar să se rețină un număr finit de ecuații. Oprindu-ne la armonica de ordin q, se obțin q ecuații în complex sau $2q$ ecuații în real. Se pot astfel calcula următoarele $2q$ necunoscute

$$\omega, \; U_{g1}$$
$$\varphi_2, \; U_{g2}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_q, \; U_{gq}.$$

În expresia (26) Z_p este impedanța circuitului derivație la pulsația $p\omega$. Pentru $p \geqslant 2$ și la valori suficient de mari pentru $Q = \dfrac{L\omega}{R_L}$, impedanța este aproape pur reactivă, așa încît componentele de armonice ale tensiunii vor fi defazate aproape cu $\dfrac{\pi}{2}$ *). Cu cît factorul Q și ordinul p sînt mai mari și cu cît raportul $\dfrac{U_{gp}}{U_{g1}}$ este mai mic, cu atît φ_p va fi mai aproape de $\dfrac{\pi}{2}$.

*) Pentru $p \geqslant 2$ și Q mare, $\chi_p \approx \frac{\pi}{2}$ iar ψ_p este în general mic, nedepășind ordinul $\frac{\pi}{2} \cdot \pi 2 \cdot 10^{-1}$; deci din (26), $\varphi_p = \chi_p + \psi_p \approx \frac{\pi}{2}$.

Pentru a evalua aproximativ panta echivalentă a tubului T_2 pentru fundamentală, vom face raportul

$$S_{ech} = \frac{I_{a1}}{U_{g1}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\left[S_0 U_{g1} - \frac{S_1}{2}\sum_{m=2}^{\infty} U_{gm} U_{g(m-1)} \sin(\varphi_m - \varphi_{m-1})\right]^2 + \left[\frac{S_1}{2}\sum_{m=2}^{\infty} U_{gm} U_{g(m_1)} \cos(\varphi_m - \varphi_{m-1})\right]^2}}{U_{g_1}} \quad (27)$$

Păstrînd termenii pînă la ordinul q și scriind că $\varphi_2 \approx \varphi_3 \approx \ldots \approx \varphi_q \approx \frac{\pi}{2}$, se capătă

$$S_{ech} \approx \sqrt{\left[S_0 - \frac{S_1}{2} U_{g2}\right]^2 + \left(\frac{S_1}{2U_{g1}}\right)^2 \left[\sum_{m=3}^{q} U_{gm} U_{g(m-1)}\right]^2}. \quad (28)$$

sau observînd că termenul al doilea tinde să apropie valoarea pantei echivalente de valoarea S_0, deci cazul cel mai defavorabil este acela în care armonica a doua este cea mai importantă, se poate neglija și acest al doilea termen

$$S_{ech} \approx S_0 - \frac{S_1}{2} U_{g2}. \quad (29)$$

Defazajul dintre curentul anodic și tensiunea de grilă este pentru fundamentală

$$\operatorname{tg} \psi_1 \approx \frac{\sum_{m=3}^{q} U_{gm} U_{g(m-1)}}{2\frac{S_0}{S_1} U_{g1} - U_{g2} U_{g1}}. \quad (30)$$

Se observă că, dacă circuitul are un factor de calitate bun, defazajul crește odată cu raportul S_1/S_0 și cu amplitudinea armonicelor. Pe de altă parte, conținutul de armonice este cu atît mai mic, cu cît amplitudinea de oscilație este mai mică.

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАЛЫХ ИЗМЕНЕНИЙ ПОЛНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящем сообщении исследуется работа осциллятора при малых амплитудах колебаний, ограничение которых вызвано слабой нелинейностью системы, а также возможности использования этого прибора для измерения малых изменений полного сопротивления.

Автор приходит к заключению, что при этом режиме гармониками можно пренебречь вследствие их малого влияния.

Чувствительность прибора может быть увеличена до пределов, обусловленных нестабильностями, вызванными внешними причинами.

UNE MÉTHODE DE DÉTERMINATION DES FAIBLES VARIATIONS D'IMPÉDANCE

(RÉSUMÉ)

Ce travail traite du fonctionnement d'un oscillateur aux petites amplitudes d'oscillation, à limitation due à une faible non-linéarité du système, ainsi que des possibilités d'utilisation de cet oscillateur pour déceler de faibles variations d'impédance.

La conclusion en est qu'on peut négliger l'influence des harmoniques supérieures sur le régime.

La sensibilité de l'appareil réalisé peut être augmentée jusqu'à des limites déterminées des instabilités dues à des facteurs extérieurs.

BIBLIOGRAFIE

1. R. S. Segsworth, *Uses of the Du Mont Cyclograph for Testing of Metals*, în *Electronic Methods of Inspection of Metals*. Am. Soc. for Metals, Cleveland — Ohio, 1946.
2. I. Groşovschi, *Ghenerirovanie visokociastotnîh kolebanii i stabilizaţiia ciastotî*. Izd. I. L., Moscova, 1953, cap. 6 şi 7.
3. T. Tănăsescu, Studii şi cercetări de fizică, t. IV, nr. 3—4, 1953, p. 281.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE FIZICĂ
Tomul VI, nr. 2, 1955

STUDIUL EXPERIMENTAL AL COMPONENTEI NUCLEAR ACTIVE A RADIAŢIEI COSMICE LA ENERGII DE ~ 25 GeV

NOTA I. MĂSURĂTORI ASUPRA JERBELOR ELECTRONO-NUCLEARE CU $\epsilon > 10$ GeV *)

DE

E. FRIEDLÄNDER, C. IUSSIM şi M. MAYER

I. INTRODUCERE

În ultimii ani, un mare număr de cercetători**) au studiat diferite aspecte ale jerbelor electrono-nucleare (JEN) generate în atmosferă sau în materiale dense de particule nuclear active (PNA). În nici una dintre aceste lucrări nu s-a făcut însă o determinare obiectivă a energiei particulelor incidente, diferiţii autori mărginindu-se la evaluarea acestei mărimi din consideraţii mai mult sau mai puţin plauzibile. De asemenea, pînă în prezent nu cunoaştem determinări ale raportului dintre numărul nucleonilor şi al mezonilor în componenta generatoare la energii mai mari decît $\sim 10^9$ eV (faptul că această componentă cuprinde mezoni a fost arătat de V. Veksler, L. Kurnosova şi A. Liubimov [4] şi S. Azimov şi colaboratori [5], [6] şi [7]).

O metodă statistică pentru determinarea simultană a energiei medii a PNA şi a raportului dintre numărul nucleonilor şi al mezonilor, a fost propusă într-o Notă anterioară de unul dintre noi [8]. Rezumăm pe scurt ideea metodei.

Dacă se efectuează măsurători ale intensităţii PNA cu ajutorul unei instalaţii «cu prag» la diferite altitudini, compensînd efectul de absorbţie nucleară cu absorbanţi denşi (sau prin calcul, dacă se cunoaşte coeficientul de absorbţie pură), variaţia efectului de compensaţie

$$Q = N'_a / N_b \,, \tag{1}$$

unde N'_a este intensitatea la altitudinea superioară, compensată, şi N_b intensitatea la altitudinea inferioară (în aer liber), este dată de relaţia

$$Q = (1 + \rho) / [\exp(-k\,\zeta/\epsilon_0) + \rho], \tag{2}$$

*) Lucrare prezentată Institutului de fizică la data de 9 octombrie 1954.
**) O bibliografie amănunţită poate fi găsită în [1], [2] şi [3].

unde ϵ_0 este energia prag a instalaţiei, ρ este raportul dintre numărul nucleonilor şi al mezonilor π încărcaţi, ζ este distanţa redusă dintre punctele de observaţie*)

$$\zeta = \frac{\mu \Delta z}{\tau_0}, \tag{3}$$

(μ şi τ_0 fiind masa şi viaţa medie în repaus a mezonului π, iar Δz distanţa efectivă dintre punctele de observaţie); k este un coeficient numeric de ordinul unităţii care depinde de distribuţia energetică şi unghiulară a PNA.

Din variaţia lui Q în funcţie de ζ se pot deduce ϵ_0 şi ρ pe una din căile indicate în [8] şi în anexa Notei de faţă.

Măsurătorile descrise mai jos au fost întreprinse pentru a verifica eficacitatea acestei metode.

II. INSTALAŢIA EXPERIMENTALĂ

S-a utilizat o instalaţie de contori reprezentată schematic în figura 1. Contorii folosiţi erau din sticlă cu diametrul de 3 cm şi lungimea de 30 cm (Pressler tip 86—30). Selectorul de coincidenţe (alimentat din baterii uscate) a

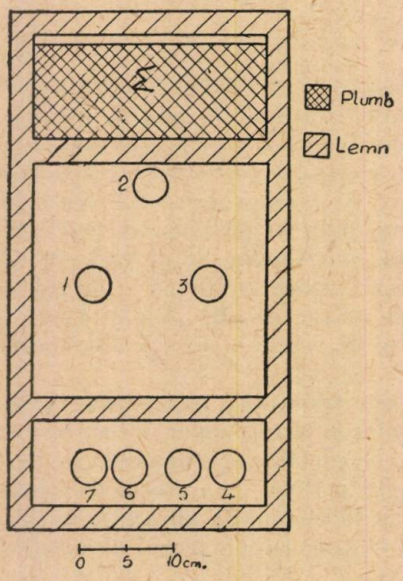


Fig. 1

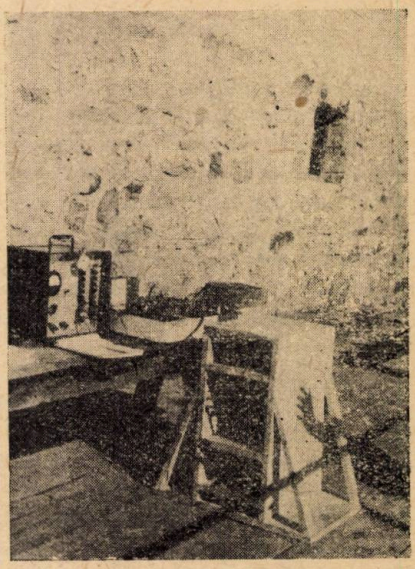


Fig. 2

folosit un montaj obişnuit cu pentode cu o putere de rezolvare de $\sim 10^{-5}$ s. Înalta tensiune (pînă la ~ 1200 V) era furnizată de o inductanţă alimentată în impuls de un multivibrator.

*) Folosim un sistem de unităţi în care $\hbar = c = M = 1$, $M \sim 1$GeV fiind masa nucleonului.

S-au folosit următoarele combinații de contori în coincidență *):

A: 1 + 2 + 3;
B: 2 + (4.6) + (5.7);
C: 2 + (1.5.7) + (3.4.6);
E: 2 + (4.5.6.7).

Instalația era acoperită cu un strat de plumb Σ cu grosimea de 10 cm. În aceste condiții, combinația E reacționa în esență la particule izolate din componenta dură, fiind folosită pentru măsurători de control; în schimb, combinațiile A, B și C erau sensibile la componenta electrono-fotonică a JEN, generate în Σ de PNA de mare energie.

O vedere de ansamblu a întregii instalații este dată în figura 2.

III. REZULTATELE MĂSURĂTORILOR

În vara anului 1954 s-au efectuat măsurători la următoarele puncte în București și munții Bucegi:

București	80 m
Bușteni	1 000 m
Cantonul Jepi F.H.B.	1 960 m
Cabana Babele	2 200 m
Vîrful Omul	2 508 m

La Bușteni și București s-au făcut de asemenea măsurători sub straturi de absorbant dens, mergînd pînă la 120 gcm^{-2} hîrtie și 80 gcm^{-2} grafit, pentru determinarea coeficientului de absorbție pură.

La măsurătorile sub hîrtie nu s-a putut trece dincolo de maximul curbei de tranziție datorit efectului de densitate [9]. Măsurătorile sub grafit au fost făcute cu un filtru standard de plumb, ceea ce [7] elimină influența efectului menționat.

Rezultatele măsurătorilor sînt trecute în tabloul nr. 1.

Tabloul nr. 1

Stația	Ore eficace	Coincidențe pe oră la combinația			
		A	B	C	E
Vîrful Omul	25	22,7 ± 1,9	30,4 ± 1,7	86,2 ± 3,6	737 ± 7
Cabana Babele	22	19,0 ± 5,7	28,0 ± 8,4	71,8 ± 4,7	678 ± 14
Cantonul Jepi	17	19,2 ± 2,9	25,1 ± 2,4	66,2 ± 4,2	593 ± 4
Bușteni	10	12,2 ± 2,4	17,8 ± 2,9	36,8 ± 2,9	508 ± 4
București	96	10,0 ± 0,5	15,5 ± 0,8	30,0 ± 1,5	405 ± 3

Componenta dură (combinația E) coincide în limitele erorilor experimentale cu curba lui Rossi [10].

Parcursul de absorbție pură în grafit a fost găsit egal cu 270 ± 20 gcm^{-2}.

IV. DISCUȚIA REZULTATELOR

Combinațiile A și B dau în limitele erorilor experimentale o descreștere exponențială în funcție de adîncimea în atmosferă, cu un parcurs de absorbție care nu diferă practic de cel observat în grafit; de aici rezultă că PNA care

*) Semnul + indică legare în coincidență, semnul . legare în paralel.

generează JEN înregistrate de aceste două combinaţii sînt în mare majoritate stabile.

Combinaţia C (care în mod necesar înregistrează şi jerbe de tip A şi B) prezintă un efect de compensaţie ($Q > 1$), evident mascat de efectul combinaţiilor A şi B.

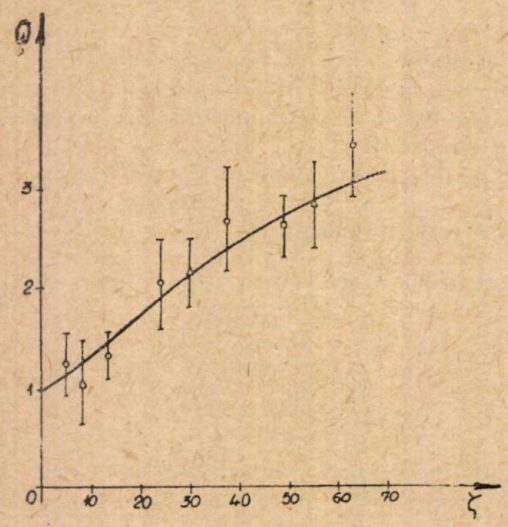


Fig. 3

Pentru a scoate în evidenţă efectul de dezintegrare a PNA, s-a calculat efectul de compensaţie Q pentru mărimea $D = C - (A+B)$, rezultatele fiind trecute în tabloul nr. 2 (a se vedea şi figura 3)*).

Prin metodele indicate în anexa I (în bună concordanţă cu metoda descrisă anterior [8]), s-au calculat mărimile ξ_0 şi ρ precum şi energia medie** a PNA care generează JEN de tip D. Rezultatele sînt trecute în tabloul nr. 3.

Comparînd parcursul de absorbţie observat de noi cu parcursul în grafit ($\sim$ 80 gcm^{-2}), se poate evalua numărul mediu de PNA generate într-o JEN de tip D ($\sim$ 0,7). Acest rezultat concordă cu cel obţinut de S. Vernov şi A. Ciarahcian [12] pentru protoni primari de energie comparabilă.

Tabloul nr. 2

Staţia	Coincidenţe pe oră la combinaţia D	Efectul de compensaţie Q în raport cu		
		Vîrful Omul	Cabana Babele	Cantonul Jepi
Vîrful Omul	33,1 $\pm$ 5,0	1,00	—	—
Cabana Babele	24,2 $\pm$ 3,6	1,25	1,00	—
Cantonul Jepi	20,8 $\pm$ 3,1	1,33	1,07	1,00
Buşteni	6,8 $\pm$ 1,0	2,68	2,16	2,04
Bucureşti	3,8 $\pm$ 0,6	3,45	2,76	2,62

Tabloul nr. 3

ϵ_0 GeV	$\bar{\epsilon}$ GeV	ρ
12,4 $\pm$ 3,6	24,8 $\pm$ 7,2	0,45 $\pm$ 0,20

*) Curba din figura 3 a fost trasată prin metoda celor mai mici pătrate (a se vedea anexa I).

**) În baza spectrului

$$N(\epsilon)\, d\epsilon \sim \epsilon^{-(1-\varkappa)}\, d\epsilon \text{ cu } \varkappa \sim 2$$

obţinut recent de V. Kamalian şi A. Alikanian [11].

Dacă inflexiunea slabă de la începutul curbei din figura 3 nu se datorește erorilor experimentale, ea ar putea fi atribuită unor mezoni mai grei prezenți într-o proporție și cu o viață medie care nu ar contrazice rezultatele altor cercetători (a se vedea anexa II).

V. CONCLUZII

Măsurătorile efectuate arată că metoda propusă este practicabilă și poate da rezultate bune dacă statistica este suficientă. Erorile mari din tabloul nr. 3 se datoresc tocmai faptului că în aceste experiențe, pe care le considerăm ca preliminare, statistica pe care am putut-o obține în timpul scurt disponibil era insuficientă.

La o energie de ~ 20 GeV, mezonii π nuclear activi sînt în număr aproximativ dublu față de nucleoni. Implicațiile acestei constatări vor fi analizate ntr-o Notă separată.

Punerea în evidență a unor mezoni mai grei în componenta generatoare implică măsurători mai precise la diferențe mai mici de altitudine; pregătirea unor asemenea măsurători este în curs în laboratorul nostru.

În încheiere ținem să mulțumim tuturor persoanelor și instituțiilor care au contribuit la buna desfășurare a experiențelor, în special Directorului Institutului prof. H. Hulubei, pentru sprijinul multilateral dat în organizarea expediției, conducerii și personalului fabricii de hîrtie «1 Septembrie»—Bușteni, în frunte cu Ing. N. Bîrsan, pentru ospitalitatea și ajutorul material neprecupețit acordat în decursul expediției, Direcției centrale hidrometeorologice și personalului stației meteo Vîrful Omul pentru punerea la dispoziție a aparatelor și datelor necesare și ospitalitatea acordată, Direcției turism-excursii C.C.S. pentru înlesnirea cazării la cabane, prof. Ș. Tițeica și prof. I. Ausländer pentru interesul și sprijinul acordat expediției precum și tov. J. Friedländer, R. Mayer și F. Grünberg pentru ajutorul dat în timpul măsurătorilor.

ANEXA I

CALCULUL MĂRIMILOR ϵ_0 ȘI ρ DIN DATELE EXPERIMENTALE

În [8] s-a arătat că se poate determina ϵ_0 și ρ cunoscînd pe de o parte valoarea palierului Q_∞, către care tinde Q pentru $\zeta \to \infty$ (a se vedea mai sus relația (2)), iar pe de altă parte panta $\left(\frac{dQ}{d\zeta}\right)_{\zeta=\zeta_k}$ a curbei $Q(\zeta)$ în vecinătatea punctului de inflexiune.

Arătăm în cele ce urmează cum se poate obține același rezultat cînd nu se cunoaște cu precizie nici palierul Q_∞ și nici abscisa punctului de inflexiune (ζ_k)*).

1. Verificarea faptului că valoarea Q_2 a lui Q (corespunzătoare celei mai mari distanțe ζ atinse (ζ_2)) reprezintă, sau nu, palierul Q_∞, se poate face cu

*) De altfel un asemenea punct există numai pentru $\rho < 1$.

ajutorul a încă unui punct de abscisă ζ_1. Avem

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= (x + \rho)/(1 + \rho), \\ A_2 &= (x^\alpha + \rho)/(1 + \rho), \end{aligned}\right\} \tag{I.1}$$

unde

$$\left.\begin{aligned} A_i &= 1/Q_i, \\ x &= \exp(-k\zeta_1/\epsilon_0), \\ \alpha &= \zeta_2/\zeta_1. \end{aligned}\right\} \tag{I.2}$$

Eliminînd pe ρ între cele două relaţii (I.1), se obţine

$$x^\alpha = \frac{1 - A_2}{1 - A_1}\, x + \frac{A_2 - A_1}{1 - A_1}. \tag{I.3}$$

Această ecuaţie în X se poate rezolva grafic, iar ρ se determină din oricare dintre ecuaţiile (I.1).

Palierul

$$Q_\infty = (1 + \rho)/\rho \tag{I.4}$$

se compară apoi cu valoarea experimentală Q_2.

2. Odată cunoscut palierul, se calculează apoi valoarea cea mai probabilă a lui ϵ_0 în modul următor:

Din (1) şi (I.4) rezultă că mărimea

$$\chi = \frac{1}{x} = \exp(k\zeta_1/\epsilon_0) \tag{I.5}$$

este dată de

$$\chi = Q(Q_\infty - 1)/(Q_\infty - Q). \tag{I.6}$$

Trecînd punctele experimentale pe un grafic cu coordonatele $\ln\chi$ şi ζ, se poate trasa dreapta

$$\ln\chi = \frac{k}{\epsilon_0}\zeta \tag{I.7}$$

prin metoda celor mai mici pătrate. Panta acestei drepte măsoară pe ϵ_0.

Acest procedeu a fost folosit pentru prelucrarea datelor din tabloul nr. 2. Dreapta obţinută a fost apoi transpusă pe graficul $Q(\zeta)$ din figura 3. Faptul că această dreaptă trece prin origine cu o eroare mai mică de $\sim 1\%$ este o bună confirmare a faptului că fenomenul nu este deformat prin efecte parazitare.

3. Menţionăm încă două căi pentru obţinerea lui x (respectiv ϵ_0) dacă se cunoaşte Q_∞:

a) Dacă punctul de ordonată Q împarte distanţa dintre liniile $Q = Q_\infty$ şi $Q = 1$ în raportul f, atunci

$$Qx = f. \tag{I.8}$$

b) Din (1), (I.4) și (I.8) rezultă că, pentru $f = 1/2$, avem

$$\epsilon_0 = \frac{k}{\left(\frac{dQ}{d\zeta}\right)} \cdot \frac{Q_\infty^2 - 1}{4 Q_\infty} \tag{I.9}$$

Această cale este analogă celei folosite în [8], (relația (28)), cu deosebirea că punctul pentru care $f = 1/2$ este mult mai ușor reperabil decît punctul de inflexiune. Din (I.9) se vede de altfel că pentru $Q_\infty \gg 1$ (sau, ceea ce este același lucru, pentru $\rho \ll 1$), cele două metode se confundă.

ANEXA II

MEZONI GREI ÎN COMPONENTA GENERATOARE

Să admitem că, în afară de n_π mezoni $\pi^\pm$ și $\rho_{n\pi}$ nucleoni, componenta generatoare mai cuprinde și $\rho'_{n\pi}$ mezoni grei (de exemplu mezoni K), cu masa μ_K și viața medie în repaus τ_K. Efectul de compensație se scrie atunci

$$Q = (1 + \rho' + \rho) / (x + \rho' x^\theta + \rho), \tag{II.1}$$

unde $\theta = (\mu_K/\mu)(\tau_0/\tau_K)$. (II.2)

Pentru $\theta \gg 1$, Q va prezenta un cvasipalier de ordonată

$$Q' \approx (1 + \rho' + \rho) / (1 + \rho). \tag{II.3}$$

Din (II.3) și (I.4) obținem ușor

$$\left.\begin{aligned} \rho &= Q / (Q_\infty - Q), \\ \rho' &= Q_\infty (Q - 1) / (Q_\infty - Q). \end{aligned}\right\} \tag{II.4}$$

Dacă admitem ca reală inflexiunea pe curba experimentală pentru $\zeta < 10$, atunci $Q \sim 1{,}1 \div 1{,}2$, de unde $\rho \sim 0{,}2$, $\rho \sim 0{,}5$, ceea ce nu contravine frecvenței observate a mezonilor K în jerbele nucleare.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИЗУЧЕННИЕ ЯДЕРНО-АКТИВНОЙ КОМПОНЕНТЫ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ ПРИ ЭНЕРГИЯХ ~ 25 *GeV*

Сообщение I. ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННО-ЯДЕРНЫХ ЛИВНЕЙ С $\epsilon > 10$ *GeV*

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

При помощи счетчиков *G.M.*, включенных в совпадения, были произведены измерения числа электронно-ядерных ливней на разных высотах в горах Бучеджи с целью изучения предоставляемых методом [8] возможностей определения средней энергии генерирующих частиц и относительного содержания Π-мезонов в генерирующей компоненте. Полученные результаты (см. рис. 2) показывают, что изучение компенсационного эффекта позволяет определить эти величины в соответствии с теоретическими предположениями. Для использованной установки было найдено $\bar{\epsilon} \sim 25\,GeV$, $N_{\pi^\pm} \sim 2\,N_{\text{нуклонов}}$.

EXPERIMENTAL STUDY OF THE *N* COMPONENT OF COSMIC RAYS AT ENERGIES OF ~ 25 GeV

I. MEASUREMENTS ON ELECTRON-NUCLEAR SHOWERS AT ENERGIES ABOVE 10 Ge V

(ABSTRACT)

Measurements on electron-nuclear showers have been carried on at different heights in the Bucegi mountains, by means of a coincidence counter arrangement, in order to test the efficiency of a method [8] for the determination of the average energy of the generating particles, as well as of the pion to nucleon ratio in the *N* component of cosmic rays. The results so far obtained (see fig. 2) have shown that the study of the compensation effect allows the determination of these quantities in accordance with theoretical previsions. For the arrangement used, we found: $\bar{\varepsilon} \sim 25$ Ge V, $N^{\pi\pm} \sim 2_{\text{Nnucleons}}$.

BIBLIOGRAFIE

1. N. Birger, V. Veksler, N. Dobrotin, G. Zaţepin, L. Kurnosova, A. Liubimov, I. Rosenthal i L. Eidus, J.E.T.F., 1949, t. 19, p. 826.
2. I. Rosenthal i. D. Cernavski, Usp. Fiz. Nauk., 1954, t. 52, p. 185.
3. U. Camerini, W. Lock a. D. Perkins, *Progress in Cosmic Ray Physics.* Amsterdam, 1952.
4. V. Veksler, L. Kurnosova i A. Liubimov, J.E.T.F., 1947, t. 17, p. 1026.
5. S. Azimov, V. Vişnevski i N. Hilko, DAN SSSR, 1951, t. 78, p. 231.
6. S. Azimov i V. Vişnevski, Izv. Akad. Nauk SSSR, seria fizică, 1953, t. 17, p. 88.
7. S. Azimov, N. Dobrotin, A. Liubimov i K. Rîjkova, Izv. Akad. Nauk SSSR, 1953, t. 17, p. 80.
8. E. Friedländer, Comunicările Acad. R.P.R., t. V, nr. 1, ianuarie 1955, p. 43.
9. M. Podgoreţki, J.E.T.F., 1951, t. 21, p. 1097.
10. B. Rossi, Rev. Mod. Phys., 1948, t. 20, p. 418.
11. V. Kamalian i A. Alihanian, DAN SSSR, 1954, t. 97, p. 425.
12. S. Vernov i A. Ciarahcian, DAN SSSR, 1953, t. 91, p. 487.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE FIZICĂ
Tomul VI, nr. 2, 1955

STUDIUL EXPERIMENTAL AL COMPONENTEI NUCLEAR ACTIVE A RADIAŢIEI COSMICE LA ENERGII DE ~ 25 GeV

NOTA II. DESPRE STUDIUL INTERACŢIUNII PARTICULELOR COSMICE DE MARE ENERGIE CU NUCLEELE DIN ATMOSFERĂ PRIN METODA DE COMPENSAŢIE

DE

E. FRIEDLÄNDER

I. INTRODUCERE

Într-o lucrare anterioară [1] a fost elaborată o metodă*) pentru măsurarea energiei medii a particulelor nuclear active din radiaţia cosmică, bazată pe dezintegrarea mezonilor din componenta generatoare de jerbe nucleare. Efectuînd experienţe de compensaţie [2], [3] şi [4], la mai multe altitudini, se poate determina simultan energia-prag ϵ_0 a instalaţiei detectoare folosite şi raportul dintre numărul nucleonilor şi al mezonilor în componenta generatoare. Din ϵ_0 şi din spectrul cunoscut al acestei componente se calculează uşor energia medie $\bar{\epsilon}$ a particulelor care declanşează instalaţia. Repetînd această operaţie pentru diferite praguri ϵ_0, se poate apoi etalona detectorul în « energii medii ». Se obţine astfel un grup de comandă etalonat, cu ajutorul căruia se poate comanda o cameră Wilson, un hodoscop de contori sau orice alt dispozitiv pentru studiul jerbelor nucleare.

Scopul Notei de faţă este de a arăta că rezultatele experienţelor de compensaţie folosite pentru etalonarea în energii medii a unui detector de jerbe pot fi utilizate pentru studiul unor interacţiuni nucleare de energii sensibil mai mari decît jerbele nucleare înregistrate de detector, fără a utiliza în acest scop un alt aparataj în afară de detector.

II. PRINCIPIUL METODEI

După cum se ştie, interacţiunea protonilor primari cu nucleele atmosferei duce la un proces nuclear de cascadă [5], [6]. Ca atare, la altitudini moderate,

*) Pentru prescurtare vom nota peste tot această metodă prin « metoda [1] ».

practic, totalitatea particulelor nuclear active observate (nucleoni, mezoni π, K etc.) sînt de proveniență secundară, terțiară etc. și deci orice particulă P_A care declanșează detectorul de jerbe D (fig. 1), generînd în blocul de plumb jerba nucleară A, provine ea însăși dintr-o jerbă nucleară B, generată în atmosferă de o particulă nuclear activă P_B de energie sensibil mai mare decît P_A. În cele ce urmează arătăm că informațiile obținute prin metoda [1] asupra naturii și energiei medii E a particulelor P_A permit evaluarea energiei medii E a particulelor P_B și confruntarea multiplicității jerbei B cu diferitele variante ale teoriei generării multiple de mezoni.

Fig. 1

Să schematizăm [7] în modul următor procesul de formare al jerbei B:

Particula P_B*) traversează nucleul ciocnit și smulge din el ν nucleoni care, împreună cu P_B, formează un sistem puternic excitat (compound). Acest sistem se dezintegrează într-un timp foarte scurt ($\leqslant 10^{-14}$ s) în cei

$$N = \nu + 1 \tag{1}$$

nucleoni și n mezoni de diferite specii generați prin interacțiunea nucleonilor. Fie

$$\xi_i = \frac{n_i}{N} \tag{2}$$

abundențele relative (în jerba B) ale diferitelor specii de particule generate. Din diverse rațiuni (de exemplu viața medie prea scurtă, ca în cazul mezonilor π^0), numai o fracțiune $1/f_i$ din cei n_i mezoni de specia i ajung efectiv în componenta P_A, astfel încît în P_A se observă efectiv abundențele relative

$$\chi_i = n_i^* / N = \xi_i / f_i \ , \tag{3}$$

unde asteriscul indică «activitatea nucleară efectivă».

În [1] și [8] s-a arătat că prin metoda A se pot determina mărimile

$$\rho_i = n_i^* / n_\pi^* = \chi_i / X_\pi . \tag{4}$$

Dacă se cunosc factorii de eficacitate f_i (fie din experiență, fie din considerații teoretice), atunci se pot calcula diferiții ξ_i și deci raportul

$$\lambda = n/N = \sum_i \xi_i = \sum \chi_i f_i . \tag{5}$$

Pentru a evalua pe E trebuie să ținem seama de faptul că energia particulei P_B nu se repartizează uniform între cele $N + n$ particule din jerba B.

*) Vom admite pentru simplificare că P_B este un nucleon. Dacă P_B este un mezon, rezultatele rămîn calitativ neschimbate, singura deosebire fiind că în loc de $N = \nu + 1$, avem $N = \nu$.

Într-adevăr, fie*) ϵ^+ și ϵ^- energiile în sistemul laboratorului (sistemul L) a două particule emise în sistemul centrului de inerție al jerbei B (sistemul C), simetric în raport cu centrul de inerție**) (a se vedea [9]) și ϵ energia acelorași particule în sistemul C. Pentru $\epsilon' \gg \mu$ (unde μ este energia de repaus a mezonilor generați), transformările Lorentz de la C la L se scriu

$$\left.\begin{aligned} \epsilon^+ &= \gamma_c \epsilon' (1 + \cos\theta), \\ \epsilon^- &= \gamma_c \epsilon' (1 - \cos\theta), \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

γ_c fiind factorul Lorentz al centrului de inerție ($\gamma_c \gg 1$), iar θ unghiul dintre direcția de mișcare a particulei cu energia ϵ^+ și direcția de mișcare a particulei P_B. Din (6) rezultă numai decît

$$\frac{\epsilon^-}{\epsilon^+ + \epsilon^-} = \sin^2 \frac{\theta}{2}. \tag{7}$$

Particulele emise «înapoi» în sistemul C poartă deci o fracțiune η din energia particulei incidente dată de relația [11].

$$\eta = \left\langle \frac{\epsilon^-}{\epsilon^+ + \epsilon^-} \right\rangle \sim \int_0^{\theta_c} \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^{2k}\theta \sin\theta \, d\theta \tag{8}$$

(în ceea ce privește notațiile din (8), a se vedea [10]).

Pentru $k = 0$***) și $\theta_c \sim 60°$ ([11]), $\eta \sim 7\%$; pentru $k = 1$ sau $k = 2$ (o asemenea distribuție unghiulară aproximează mai bine distribuția anizotropă a lui Fermi [11]) și θ_c oarecare, avem respectiv $\eta \lesssim 6\%$ sau $\eta \lesssim 2\%$. Vedem deci că practic întreaga energie E a particulei P_B se transmite particulelor emise în C în conul «anterior». Datorită simetriei jerbei avem atunci

$$(n + N)\,\bar{\epsilon} = 2E \tag{9}$$

și, ținînd seama de (5)

$$E = \left\{\lambda + {}^1/_2\right\} N \bar{\epsilon}. \tag{10}$$

Rezultatele obținute prin metoda [1] (λ și ϵ) permit deci determinarea lui E dacă se cunoaște N, adică numărul mediu de nucleoni prin a căror antrenare și excitare a luat naștere jerba B. După cum s-a arătat în [7] (a se vedea și [12]), ν fluctuează de la o ciocnire la alta fiind în medie egal cu $A^{1/3}$, A fiind numărul de masă al nucleului ciocnit. Avem atunci

$$\left.\begin{aligned} \langle n \rangle &\approx \lambda (1 + A^{1/3}), \\ \langle E \rangle &\approx \frac{1}{2} (\lambda + 1)(1 + A)^{1/3} \bar{\epsilon}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

*) Folosim un sistem de unități în care $\hbar = c = M = 1$; M este masa nucleonului ($\sim$1 G e V).

**) Din toate teoriile generării de mezoni rezultă că în sistemul C distribuția unghiulară a particulelor este simetrică în raport cu un plan perpendicular pe direcția de mișcare a particulei incidente. Argumente experimentale în favoarea acestui punct de vedere au fost aduse în [9].

***) Izotropie în sistemul C.

III. λ ȘI ϵ ÎN TEORIILE GENERĂRII DE MEZONI

Măsurînd pe λ prin metoda [1] pentru diferite valori ale lui $\bar{\epsilon}$, se poate studia multiplicitatea n ca funcție de E și compara rezultatele cu diferitele teorii ale procesului elementar. Ca exemple tipice vom considera teoria lui W. Heisenberg [13] și a lui E. Fermi [14], [7].

După Heisenberg avem

$$n \approx K \frac{E'}{\mu}, \tag{12}$$

unde E' este energia totală disponibilă în sistemul C, μ energia de repaus a mezonului π $\left(\mu \sim \frac{1}{6}\right)$ și K factorul de inelasticitate al ciocnirii. După cum s-a arătat în [7],

$$E' \approx (2.\, \nu E)^{1/2}, \tag{13}$$

de unde

$$n \approx \frac{K\sqrt{2}}{\mu} \nu^{1/2} E^{1/2}. \tag{14}$$

După teoria lui E. Fermi [14], [11], extinsă de autor [7] la ciocniri nucleon-nucleu,

$$n = a' C \left(\frac{E'}{\gamma_c}\right)^{1/4} E'^{1/2}, \tag{15}$$

sau, ținînd seama de (13),

$$n = a\, C\, \nu^{1/2} E^{1/4}, \tag{16}$$

unde a depinde de volumul compoundului și de ponderile statistice ale particulelor generate iar C este o funcție de parametrul de șoc al interacțiunii [15].

Din [14] sau [16] putem evalua mărimile K, respectiv (aC), cunoscînd pe λ și $\bar{\epsilon}$ din experiență *).

$$\left.\begin{aligned} \langle K \rangle &= (\mu/\epsilon^{1/2})\,(\lambda/(\lambda+1)^{1/2}) \left\langle \left(\frac{N}{N-1}\right)^{1/2} \right\rangle, \\ \langle (aC) \rangle &= (2/\epsilon)^{1/4} (\lambda/(\lambda+1)^{1/4}) \left\langle \left(\frac{N^3}{(N-1)^2}\right)^{1/4} \right\rangle. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

IV. COMPARAȚIE CU DATELE EXPERIMENTALE

Măsurători preliminare după metoda [1] au fost efectuate în vara anului 1954 la diferite altitudini în munții Bucegi de către un colectiv al Institutului de Fizică al Academiei R.P.R. [8]. Pentru instalația folosită, s-a găsit

$$\epsilon_0 \sim 12{,}5 \text{ GeV}, \quad \bar{\epsilon} \sim 25 \text{ GeV}, \quad \rho \text{ nucleoni} \sim 0{,}45,$$

de unde $\lambda \sim 3{,}5$.

*) Medierea este efectuată în raport cu distribuția Poisson.

$$\mathcal{P}_{(N)} = \frac{(A^{1/2})^{N-1}}{(N-1)} \exp\,(A^{1/2}).$$

Pentru aer $\langle \nu \rangle \sim 2{,}4$ [faptul că $\langle \nu \rangle \sim A^{1/3}$ a fost verificat în [7] prin metoda graficului $(n^{\pm}, \gamma_c)$]; obținem astfel din (11)

$$\left.\begin{aligned} \langle n \rangle &\sim 12, \\ \langle E \rangle &\sim 190, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

și din (17)

$$\left.\begin{aligned} K &\sim 0{,}06, \\ aC &\sim 2. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Din aceste rezultate putem desprinde următoarele:

a) Multiplicitatea observată la ciocnirea unui nucleon de ~ 200 GeV cu un nucleu de azot este sensibil inferioară celei la care ar trebui să ne așteptăm în conformitate cu teoria lui Heisenberg. Dacă calculăm parametrul de șoc b corespunzător valorii (19) a lui K, conform relației (16),

$$K \sim \exp(-\mu b), \tag{20}$$

obținem

$$\mu b \sim 2 \div 3, \tag{21}$$

pe cînd [11], [12] $\langle \mu b \rangle \sim 0{,}7$.

De altfel, după cum s-a arătat în [12] și [17], la valori atît de mari ale parametrului de șoc tratarea cvasiclasică a ciocnirii nu mai este admisibilă, ceea ce face inaplicabilă teoria lui Heisenberg. Se știe că și în cazul ciocnirilor centrale această teorie este în discordanță cu rezultatele obținute la studiul jerbelor atmosferice largi [18].

b) Multiplicitatea observată este în concordanță calitativă cu prevederile teoriei lui Fermi extinsă la interacțiunea nucleon-nucleu [7]. În diferitele variante ale acestei teorii [7] obținem (pentru energii sub ~ 50 GeV) $3 < a < 4$, de unde $0{,}50 < C < 0{,}67$. Se obține astfel pentru C o valoare egală sau ceva mai mare decît cea care rezultă din teoria inițială a lui Fermi pentru interacțiunea nucleon-nucleon ($\nu = 1$, $N = 2$, $\langle C \rangle = 0{,}51$). Pentru $\langle \nu \rangle = 2{,}4$, $\langle N \rangle = 3{,}4$, se obține din [7]

$$\langle C \rangle = \sum \frac{2N-3}{2N-2} P(N) \sim 0{,}68. \tag{22}$$

Din (19) rezultă atunci $a \approx 3$, ceea ce, conform tabloului nr. 2 din [7], corespunde cazului cînd în jerba B nu se generează decît mezoni π. Acest fapt este în bună concordanță cu valoarea pragului energetic pentru generarea mezonilor $\varkappa$ (~ 200 GeV) dedus din [7] [relația (III.4)].

V. CONCLUZII

Din comparația cu rezultatele măsurătorilor [8] se vede că metoda propusă în Nota de față este destul de sensibilă pentru a permite o alegere între diferitele variante ale teoriei actului elementar.

Ca atare apare ca foarte indicată continuarea experiențelor în acest domeniu, atît pentru ameliorarea statisticii la energiile deja cercetate, cît și pentru obținerea de informații asupra interacțiunilor la energii mai mari de ~ 200 GeV (în care se observă generarea mezonilor mai grei decît π). Nu este exclus ca tocmai pe această cale să se poată rezolva problema — atît de

disputată — a generării perechilor nucleon-antinucleon în jerbele de foarte mare energie ($> 10^{12}$eV).

Mai menționăm că dependența (17) dintre a și λ ($a^4 \sim \lambda^3$) ne dă un mijloc destul de sensibil pentru a determina spinul mezonilor grei (și (sau) volumul compoundului); se știe [11], [7] că aceste mărimi intervin în a sub rădăcina a patra și că — la precizia actuală a măsurătorilor — multiplicitatea jerbelor observate în emulsii nucleare nu este suficient de sensibilă la modificări nu prea mari ale acestor mărimi.

În încheiere, amintim că prin metoda de față putem studia numai interacțiuni în nucleele ușoare (C, N, O) prezente în atmosferă. Pentru studiul interacțiunilor în nuclee grele trebuie folosită varianta inițială a metodei [1] (comandarea unei instalații pentru analiza jerbelor cu ajutorul unui detector etalonat în energii).

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ ЯДЕРНО-АКТИВНОЙ КОМПОНЕНТЫ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ ПРИ ЭНЕРГИЯХ ~ 25 GeV

Сообщение II. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КОСМИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ БОЛЬШОЙ ЭНЕРГИИ С ЯДРАМИ АТМОСФЕРЫ КОМПЕНСАЦИОННЫМ МЕТОДОМ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Автор показывает, что результаты, полученные при градуировке в средней энергии детектора ядерных ливней методом [1], могут быть непосредственно использованы для исследования предшествующего каскада ядерно каскадного процесса в атмосфере. Выводится соотношение между измеренными величинами (средней энергии $\bar{\epsilon}$ частиц, заставляющих сработать детектор и отношения $\rho = N\pi^{\pm} / N$ нуклоны в генерирующей компоненте) и средними характеристиками атмосферного ядерного ливня, в котором возникли эти частицы (средняя энергия E генерирующих частиц, число n возникших мезонов и число ν увлеченных нуклонов).

Сравнивая данные опыта [8] с предсказаниями теории множественной генерации мезонов, автор доказывает, что они противоречат теории Гейзенберга [14], но согласуются с теорией Ферми [9], [12], распространенной автором [7] на столкновения нулона с ядром.

EXPERIMENTAL STUDY OF THE N COMPONENT OF COSMIC RAYS AT ENERGIES OF ~ 25 Ge V

II. CONCERNING THE STUDY, BY THE COMPENSATION METHOD, OF THE INTERACTIONS OF HIGH ENERGY COSMIC-RAY PARTICLES WITH NUCLEI IN THE ATMOSPHERE

(ABSTRACT)

The data obtained in the course of experiments for the calibration (in average energy) of a nuclear shower detector, by means of method [1], can be used directly for the study of the previous cascade in the nuclear cascade

process in the atmosphere. An expression is obtained, relating the measured quantities (the average energy $\bar{\xi}$ of the particles which trigger the detector and ρ = ratio nucleons to pions in the N component at energy $\bar{\xi}$) and the average characteristics of the nuclear shower in the atmosphere, in which the particles triggering the detector have originated (the average energy E of the incident particle, the average multiplicity n, of the shower and the number ν of nucleons swept away from the target nucleus by the incident particle).

A comparison between the experimental data [8] and the theories of multiple meson generation, shows that these data are in contradiction with Heisenberg's theory [14] but that they well fit Fermi's theory [9], [12] extended by the author [7] to nucleon-nucleus collisions.

BIBLIOGRAFIE

1. E. Friedländer, Comunicările Acad. R.P.R., t. V, nr. 1, ianuarie 1955, p. 43.
2. B. Rossi a. A. Hall, Phys. Rev., 1941, t. 59, p. 223.
3. V. Veksler, L. Kurnosova i A. Liubimov, JETF, 1947, t. 17, p. 1026.
4. S. Azimov, V. Vișnevski i N. Hilco, DAN SSSR, 1951, t. 78, p. 231.
5. G. Zațepin, DAN SSSR, 1949, t. 67, p. 993.
6. G. Cocconi, Rev. Mod. Phys., 1949, t. 21, p. 26.
7. E. Friedländer, Studii și cercetări de fizică, t. VI, nr. 1, ianuarie-februarie-martie 1955, p. 63.
8. E. Friedländer, C. Jussim și M. Mayer, Acest volum, p. 229.
9. M. Kaplan, B. Peters a. D. Ritson, Phys. Rev., 1952, t. 86, p. 932.
10. T. F. Hoang, J. Phys. et Rad., 1953, t. 15, p. 337.
11. E. Fermi, Phys. Rev., 1951, t. 81, p. 683.
12. I. Rosenthal i D. Cernavski, Usp. fiz. nauk, 1954, t. 52, p. 185.
13. W. Heisenberg, Ztschr. f. Phys., 1949, t. 126, p. 569.
14. E. Fermi, Progr. Theor. Phys., 1950, t. 5, p. 570.
15. E. Pickup a. L. Voyvodic, Phys. Rev., 1951, t. 84, p. 1190.
16. W. Heisenberg, Ztschr. f. Phys., 1952, t. 133, p. 65.
17. E. Feinberg i D. Cernavski, DAN SSSR, 1953, t. 91, p. 511.
18. I. Rosenthal, JETF, 1952, t. 23, p. 440.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE FIZICĂ
Tomul VI, nr. 2, 1955

INTRODUCERE ÎN STUDIUL CÎMPULUI ELECTROMAGNETIC ALTERNATIV ÎN METODA DE PROSPECŢIUNE TURAM*)

DE

M. RĂDULESCU

INTRODUCERE

Prin metodele de prospecţiune electromagnetică se studiază anomaliile determinate de subsol în cîmpul magnetic produs de un curent alternativ. În metoda Turam se măsoară diferenţa de fază $\Delta\varphi$ şi raportul amplitudinilor ρA pentru componenta magnetică verticală în puncte aşezate la distanţe egale pe aliniamente rectilinii.

Direcţia acestor aliniamente este perpendiculară pe dispozitivul de emisiune, care se compune dintr-un cablu de circa 3 km, avînd capetele legate la pămînt prin ţăruşi metalici şi care este parcurs de un curent de circa 1,5 A cu o frecvenţă de 500 cicli pe secundă, produs de un grup electrogen.

Dispozitivul de recepţie constă din două cadre circulare de inducţie din aluminiu, avînd înfăşurate pe fiecare cîte 1 200 spire de sîrmă de cupru izolată. Prin două cabluri izolate şi blindate, constînd fiecare din doi conductori, aceste cadre sînt legate cu aparatul compensator Turam, format din rezistenţe variabile şi legat printr-un amplificator cu trei etaje cu o cască telefonică servind ca instrument de zero pentru aducerea la extincţie a aparatului. În timpul unei citiri, cele două cadre sînt aşezate la o distanţă definită şi ţinute orizontal, în vreme ce observatorul ajustează cele două cadrane ale aparatului pentru a obţine extincţie [1] şi [2]. În acest moment unul din cadrane indică o mărime F funcţie de $\Delta\varphi$, iar celălalt cadran indică o mărime K funcţie de ρA.

Ecuaţiile simplificate de echilibru Turam sînt de forma

$$\Delta\varphi = f(F); \quad \rho A = g(F, K).$$

Practica arată însă *că* $\Delta\varphi$ *depinde nu numai de* F *ci şi de* K. In *Studiul critic al aparaturii Turam* ne propunem determinarea ecuaţiilor complete de echilibru Turam.

Pentru a rezolva această problemă am fost conduşi a studia cîmpul electromagnetic alternativ legat de unul din cadrele Turam-ului, rezultatele obţinute extinzîndu-se evident şi la al doilea cadru.

---

*) Lucrare prezentată Institutului de fizică la data de 26 octombrie 1954.

Componentele cîmpului electromagnetic alternativ se exprimă prin funcții sinusoidale pure, armonicele asociate fiind practic neglijabile. Cu ajutorul cadrelor putem studia cîmpul magnetic alternativ local $\vec{H}$. Teoria arată că planul elipsei de polarizație al cîmpului $\vec{H}$ este, în general, orientat oricum în spațiu. Totuși, există cazuri cînd acest plan este normal pe emițător. Acest fapt este exact pentru punctele cuprinse în planul perpendicular pe mijlocul emițătorului rectiliniu așezat pe un sol cu stratificație orizontală și într-un mod foarte apropiat în cazul unui emițător suficient de lung, pentru punctele aflate în vecinătatea acestui plan median [3].

Cum în practică nu se lucrează numai pe aliniamente aflate în planul median sau în planele învecinate, și nici pe terenuri cu stratificație orizontală, *prezintă interes determinarea orientării planului de polarizație în cazul cînd* $\vec{H}$ *are și componente după direcția emițătorului.*

În cazul aliniamentului aflat în plan median s-au dat metode pentru determinarea mărimii și direcției axelor elipsei de polarizație [3].

Scopul lucrării de față este de a determina mărimile fizico-matematice legate de orientarea cadrului mobil în jurul centrului său. Cu această ocazie facem studiul indicatoarelor sferice pe care trebuie să le urmeze vîrful normalei $\vec{N}$ la cadru, pentru a avea amplitudinea, respectiv faza constantă a componentei cîmpului $\vec{H}$ după normala la cadru, $\vec{H}_N$.

Se trece apoi la studiul orientării planului de polarizație și al elementelor elipsei de polarizație. De asemenea se studiază proiecțiile pe planul de polarizație ale rețelelor echifază și echiamplitudine ale lui $\vec{H}_N$.

Urmează studiul variației fluxului și al f.e.m. induse în cadru în raport cu orientarea cadrului și determinarea suprafeței caracteristice asociate. În sfîrșit, se dau mijloace practice pentru determinarea mărimilor fundamentale ale fenomenului, precum și o nomogramă care permite obținerea f.e.m. de inducție pentru diverse orientări ale cadrului.

Cazul planului median [3] reprezintă o particularizare a teoriei generale stabilite în acest articol.

Trebuie observat că rezultatele găsite au valoare intrinsecă, ele fiind utile și în alte cazuri decît la Turam.

1. Despre mărimile fizico-matematice legate de orientarea cadrului

În cele ce urmează vom întrebuința, după caz, notația vectorială sau tensorială cu convențiile obișnuite de calcul ale acestora (indici simpli, indici dubli, însumare einsteiniană) și în plus adoptînd notația $\vec{\vec{X}}$ pentru tensorul atașat cvadricei $\bar{\bar{X}}$.

Deoarece se lucrează în spațiul euclidian, unde nu se face distincție între componentele covariante și cele contravariante ale tensorilor utilizați, vom scrie adeseori, *din motive de simetrie și pentru însumări prin contractare*, egalități de tipul $x^i \equiv x_i$; $x^{ij} \equiv x^i_j \equiv x_{ij}$.

În plus, deoarece calculele sînt laborioase și necesită notații numeroase, pentru a facilita urmărirea ideilor vom utiliza *notația sugestivă* $\dot{X}, \bar{X}, \bar{\bar{X}}$, respectiv pentru punctul X, curba X sau suprafața X, cu următoarele precizări:

a) În cazul cînd $\overline{\overline{X}}$ reprezintă un plan, atunci $\overline{X}$ va reprezenta normala la $\overline{\overline{X}}$, $\vec{X}$ vectorul purtat de $\overline{X}$, iar $\dot{X}$ polii axei $\overline{X}$ față de sfera unitate $\overline{\overline{\Sigma}}$. Acesta este cazul pentru $X = C, S, A, B, N$ și P.

b) În cazul cînd $\overline{\overline{X}}^{(n)}$ reprezintă o suprafață curbă de gradul n, atunci $\overline{X}_Y \equiv \overline{Y}_X$ va reprezenta intersecția dintre suprafețele $\overline{\overline{X}}$ și $\overline{\overline{Y}}$. De asemenea, vom nota prin $\vec{\overline{X}}$ tensorul atașat lui $\overline{\overline{X}}^{(2)}$. Acesta este cazul pentru $X = \Sigma$, Q, $\mathfrak{S}$ și Λ, exceptînd tensorul pentru ultimul caz, deoarece $\Lambda = X^{(4)}$.

1.1. *Expresia fluxului magnetic* Φ *și a f.e.m. de inducție* U

Să considerăm un cadru (C) mobil în jurul unui punct fix $\dot{O}$, pe care-l luăm ca origine a unui sistem de referință triortogonal $Ox^1\ x^2\ x^3$ avînd axele orientate astfel (fig. 1.1):

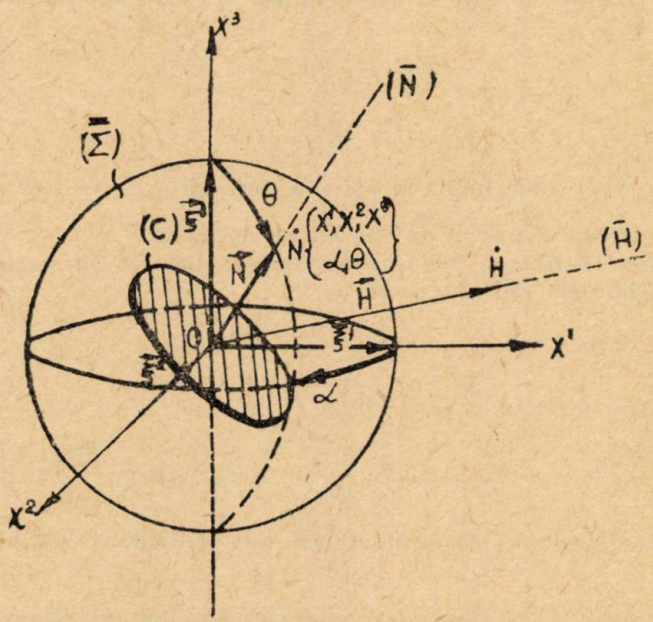


Fig. 1.1

$\overline{Ox^1}$ paralel cu cablul de emisiune,

$\overline{Ox^2}$ în planul orizontal, paralel cu aliniamentele de prospecțiune,

$\overline{Ox^3}$ după verticala locului

și fie

$\vec{ON} = \vec{N}$ — *versorul normal la cadrul* (C) care determină orientarea acestuia,

$\vec{OH} = \vec{H}$ — *cîmpul magnetic în* $\dot{O}$ la un moment dat t.

Expresiile lui $\vec{N}$ și $\vec{H}$ sînt

$$\left.\begin{aligned} \vec{N} &= x_i\,\vec{\xi}^i \\ \vec{H} &= H_i\,\vec{\xi}^i \end{aligned}\right\} \quad (i = 1,\ 2,\ 3)\ , \tag{1.1}$$

în care

$$\left.\begin{aligned} \vec{\xi}^i &= \text{vers}\ \overline{Ox^i} \\ \vec{N}^2 &= x_i\,x^i = N^2\ ,\ N = 1.\ ^*) \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

Cînd cadrul (C) se rotește în jurul lui $\dot{O}$, atunci extremitatea $\dot{N}$ a versorului $\vec{N}$ descrie *sfera* $\overline{\overline{\Sigma}}$ *de rază* $N = 1$. Deoarece cîmpul magnetic este alternativ, prin urmare $\vec{H} = \vec{H}(t)$, extremitatea $\dot{H}$ a cîmpului $\vec{H}$ descrie *elipsa de polarizație* $\overline{\mathcal{E}}$ relativă la punctul $\dot{O}$, curbă care se află permanent într-un plan fix.

Fluxul magnetic Φ care străbate cadrul (C) este determinat de $\vec{H}$ și are expresia

$$\Phi = N_C\,S_C\,H_N \tag{1.3}$$

cu

$$H_N = \vec{H}\,.\,\vec{N} = H_i x^i \tag{1.4}$$

și în care N_C reprezintă numărul spirelor din cadru, S_C — suprafața cadrului, H_N — componenta cîmpului $\vec{H}$ după axa normală $\overline{N}$.

Forța electromotrice de inducție U care ia naștere în cadrul (C), adică tensiunea la bornele cadrului, este

$$U = -\,k_u\,.\,\frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

sau, ținînd seamă de (1.3) și (1.4)

$$U = -\,k_u\,N_C S_C \vec{N}\,.\,\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\,k_u N_C\,S_C x_i.\,\frac{\partial H_i}{\partial t}\ ; \tag{1.5}$$

k_u este un coeficient de proporționalitate care depinde de sistemul de unități folosite.

Din expresia (1.3) reiese că studiul variației fluxului Φ revine la studiul variației lui H_N. Pentru aceasta vom studia amănunțit mărimile (φ_N, A_N) care determină în mod univoc pe H_N.

1.2. *Despre vectorii fundamentali* $\vec{C}$ *și* $\vec{S}$

Deoarece cîmpul magnetic $\vec{H}$ este alternativ, rezultă că componentele H_i pe axele $\overline{Ox^i}$ și H_N pe axa $\overline{N}$ sînt mărimi alternative și au forma

$$H_i = A_i \cos\,(\omega t + \varphi_i)\quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ N). \tag{1.6}$$

*) Mărimea $N = 1$ s-a păstrat pentru omogenizarea relațiilor.

Dacă definim vectorii $\vec{C}$ şi $\vec{S}$ daţi de

$$\left.\begin{aligned} \vec{C} &= C_i \vec{\xi}^{\,i} , \\ \vec{S} &= S_i \vec{\xi}^{\,i} , \end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

în care

$$\left.\begin{aligned} C_i &= A_i \,.\cos\,\varphi_i , \\ S_i &= A_i \,.\sin\,\varphi_i \end{aligned}\right\} \tag{1.7'}$$

şi facem dezvoltarea lui (1.6), atunci cîmpul magnetic $\vec{H}$ se poate scrie

$$\vec{H} = \cos\omega t \,.\, \vec{C} - \sin\omega t \,.\, \vec{S} \,. \tag{1.8}$$

Ţinînd seamă de relaţia (1.4) H_N devine

$$H_N = \vec{H}.\vec{N} = (\cos\omega t.\vec{C} - \sin\omega t.\vec{S}).\,\vec{N} = \cos\omega t.\, C_N - \sin\omega t.\, S_N \tag{1.9}$$

în care

$$\left.\begin{aligned} C_N &= \vec{C} \,.\, \vec{N} = C_i x^i , \\ S_N &= \vec{S} \,.\, \vec{N} = S_i x^i \,. \end{aligned}\right\} \tag{1.9'}$$

Un vector important, construit cu ajutorul vectorilor fundamentali $\vec{S}$ şi $\vec{C}$, este vectorul binormal $\vec{B}$:

$$\vec{B} = \vec{S} \times \vec{C} \,. \tag{1.10}$$

El defineşte axa $\overline{B}$ şi planul $\overline{\overline{B}}$ (fig. 1.2) care au ecuaţiile

$$\left.\begin{aligned} (\overline{B})_x \qquad & \frac{x^1}{B_1} = \frac{x^2}{B_2} = \frac{x^3}{B_3} , \\ (\overline{\overline{B}})_x \qquad & B_i\, x^i = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

(pentru altă formă a lui B vezi relaţia (1.20)).

Polii $\dot{B}_{\Sigma+}$ şi $\dot{B}_{\Sigma-}$ în care axa $\overline{B}$ înţeapă sfera $\overline{\overline{\Sigma}}$ au coordonatele

$$(\dot{B}_{\Sigma\pm})_x \qquad x^i = \varepsilon N \frac{B_i}{B} \,, \tag{1.12}$$

în care

$$B^2 = B_i B^i \,, \qquad N = 1$$

şi

$$\varepsilon = +1 \quad \text{pentru } \dot{B}_{\Sigma+}\,; \quad \varepsilon = -1 \text{ pentru } \dot{B}_{\Sigma-} \,.$$

Fie acum *vectorul amplitudine* $\vec{A}$ definit prin

$$\vec{A} = A_i \vec{\xi}^{\,i} \tag{1.13}$$

şi produsul scalar dintre $\vec{S}$ şi $\vec{C}$

$$D = \vec{S} \,.\, \vec{C} \,. \tag{1.14}$$

Între A, B, S, C și D avem următoarele relații

$$\left.\begin{aligned} A^2 &= S^2 + C^2 , \\ B^2 &= S^2C^2 - D^2 , \end{aligned}\right\} \tag{1.15}$$

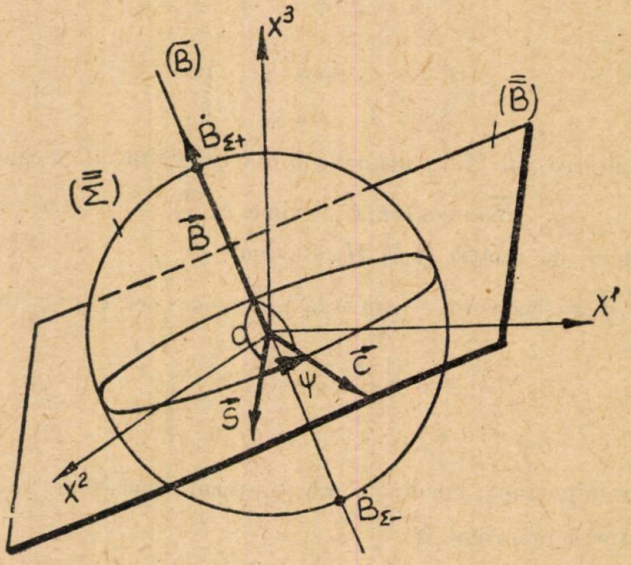


Fig. 1.2

precum și relația care dă unghiul ψ dintre $\vec{C}$ și $\vec{S}$:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{B}{D} . \tag{1.16}$$

1.3. *Despre tensorii fundamentali* $\vec{C}$ *și* $\vec{S}$

Pentru ușurința și simplificarea calculelor ce vor urma, vom introduce tensorii $\vec{C}$ și $\vec{S}$ care joacă un rol deosebit în caracterizarea cîmpului electromagnetic alternativ local.

Prin definiție, $\vec{C}$ este un tensor simetric, iar $\vec{S}$ un tensor antisimetric, ale căror componente sînt elementele matricelor $|| C_{ij} ||$, respectiv $|| S_{ij} ||$

$$|| C_{ij} || = \begin{Vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{Vmatrix} , \tag{1.17}$$

$$|| S_{ij} || = \begin{Vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{Vmatrix} . \tag{1.18}$$

Expresiile componentelor C_{ij} și S_{ij} sînt

$$\left.\begin{aligned} C_{ij} &= C_i C_j + S_i S_j = A_i A_j \cos \varphi_{ij} \\ S_{ij} &= S_i C_j - S_j C_i = A_i A_j \sin \varphi_{ij} \\ \varphi_{ij} &= \varphi_i - \varphi_j \ . \end{aligned}\right\} \tag{1.19}$$

Din (1.19) rezultă imediat caracterul simetric, respectiv antisimetric, al tensorilor $\vec{\vec{C}}$ și $\vec{\vec{S}}$. Într-adevăr,

$$\left.\begin{aligned} C_{ji} &\equiv C_{ij} \ , \\ S_{ji} &\equiv -S_{ij} \ . \end{aligned}\right\} \tag{1.19'}$$

Prin urmare, (1.17) și (1.18) se mai pot scrie

$$\| C_{ij} \| = \begin{Vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{Vmatrix} \tag{1.17'}$$

$$\| S_{ij} \| = \begin{Vmatrix} O & +S_{12} & -S_{31} \\ -S_{12} & O & +S_{23} \\ +S_{31} & -S_{23} & O. \end{Vmatrix} \tag{1.18'}$$

Expresia (1.18') ne arată că tensorul $\vec{\vec{S}}$ este caracterizat prin 3 componente S_{12}, S_{23} și S_{31}, care sînt toate componentele vectorului binormal $\vec{B}$ definit prin (1.10). Putem scrie deci

$$\vec{B} = \vec{S} \times \vec{C} = S_{23} \vec{\xi}^1 + S_{31} \vec{\xi}^2 + S_{12} \vec{\xi}^3 . \tag{1.20}$$

Invarianții scalari ai matricelor (1.17), (1.18) sînt

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= C_{11} + C_{22} + C_{33} = \sum_i C_{ii} = A_i A^i = A^2 , \\ I_2 &= \tilde{C}^{11} + \tilde{C}^{22} + \tilde{C}^{33} = \sum_i \tilde{C}^{ii} = B_i B^i = B^2 , \\ I_3 &= \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{vmatrix} = 0 , \end{aligned}\right\} \tag{1.21}$$

$$\left.\begin{aligned} J_1 &= S_{11} + S_{22} + S_{33} = \sum_i S_{ii} = 0 , \\ J_2 &= \tilde{S}^{11} + \tilde{S}^{22} + \tilde{S}^{33} = \sum_i \tilde{S}^{ii} = \sum_i \tilde{C}^{ii} = B_i B^i = B^2 , \\ J_3 &= \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.22}$$

În aceste relații $\widetilde{C}^{ji}$, $\widetilde{S}^{ji}$ reprezintă complementele algebrice ale elementelor C_{ij}, S_{ij} în matricele $\| C_{ij} \|$, $\| S_{ij} \|$.

Dacă eliminăm amplitudinea A_N între relațiile (1.7′) și ținem seamă de (1.9′), găsim

$$\operatorname{tg} \varphi_N = \frac{S_N}{C_N} = \frac{S_i\, x^i}{C_i\, x^i} \tag{1.23}$$

sau încă, ținînd seama de (1.19),

$$S_{Ni}\, x^i = 0, \tag{1.23′}$$

care reprezintă *planul echifază* N $(\overline{\overline{P}})$ corespunzător lui φ_N și care trece prin centrul $\dot{O}$ al cadrului (C). Intersecția acestui plan cu sfera unitate $\overline{\overline{\Sigma}}$ dă *o curbă sferică echifază* N $(\overline{\Sigma}_p)$ care este un cerc mare.

Deoarece tensorul $\vec{S}_{Ni}$ nu depinde decît de un singur indice curent i, el se reduce la un vector $\vec{p}$ dat de

$$\vec{p} = p_i \vec{\xi}^i, \tag{1.24}$$

cu

$$p_i = \frac{1}{A_N}\, S_{Ni}.$$

O altă formă a ecuației planelor $\overline{\overline{P}}$ este dată de relația (2.1). Eliminînd faza inițială φ_N între relațiile (1.7′), găsim

$$A_N^2 = S_N^2 + C_N^2 = (S_i\, x^i)^2 + (C_i\, x^i)^2, \tag{1.25}$$

sau încă, conform relației (1.19),

$$C_{ij}\, x^i\, x^j - A_N^2 = 0. \tag{1.26}$$

Ecuația (1.26) reprezintă o *cvadrică echiamplitudine* N $(\overline{\overline{Q}})$ *corespunzătoare lui* A_N, *avînd centrul în originea* $\dot{O}$ *a cadrului* (C). Intersecția acestei cvadrice cu sfera unitate $\overline{\overline{\Sigma}}$ dă o *curbă sferică echiamplitudine* N $(\overline{\Sigma}_Q)$, care este o *cvartică strîmbă* și *anume o bicvadratică sferică.*

2. Despre planul echifază N și cvadrica echiamplitudine N

2.1. *Studiul planului echifază* N $(\overline{\overline{P}})$

Ecuația planului $\overline{\overline{P}}$ găsită la (1.23′) poate căpăta o altă formă mai interesantă. Pentru aceasta, să considerăm fasciculul de plane $\overline{\overline{P}}$, care trece prin intersecția planelor fixe $\overline{\overline{S}}$:

$$S_i\, x^i = 0$$

și $\overline{\overline{C}}$:

$$C_i\, x^i = 0.$$

Or, această intersecție este tocmai axa $\overline{B}$ care are ecuația (1.11). Ecuația fasciculului căutat este

$$(\overline{\overline{P}}_\nu)_x \qquad P_i(\nu)\, x^i = 0, \tag{2.1}$$

în care

$$\left.\begin{aligned} \nu &= \operatorname{tg} \varphi_N\,, \\ P_i(\nu) &= S_i - \nu C_i\,. \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

Vectorul $\vec{P}(\nu)$,

$$\vec{P}(\nu) = \vec{S} - \nu \vec{C}, \tag{2.3}$$

dă orientarea planelor $\overline{\overline{P}}_\nu$.

Intersecția planelor $\overline{\overline{P}}_\nu$ cu sfera unitate $\overline{\overline{\Sigma}}$ dă tocmai sfericele echifaze $N(\overline{\Sigma}_p)$ de ecuații

$$(\overline{\Sigma}_p)_x \qquad \left\{\begin{array}{ll} (\overline{\overline{P}}_\nu)_x & P_i(\nu)\, x^i = 0, \\ (\overline{\overline{\Sigma}})_x & x_i\, x^i = N^2. \end{array}\right. \tag{2.4}$$

Într-adevăr, la o fază inițială φ_N dată, corespunde o anumită valoare pentru $\nu = \operatorname{tg} \varphi_N$ și prin urmare un anumit plan din fasciculul $\overline{\overline{P}}_\nu$. Planele $\overline{\overline{P}}_\nu$ sînt identice cu planele $\overline{\overline{P}}$; la fel $\vec{P}(\nu) \equiv \vec{P}$.

Comparînd expresiile (2.3) cu (1.23′) și (1.24) rezultă că

$$\vec{P}(\nu) = k\vec{p}, \tag{2.5}$$

în care k este un coeficient de proporționalitate egal cu $-\dfrac{1}{\cos \varphi_N}$.

Ecuația (2.1) arată că pentru un ν dat, pe de o parte $\vec{P}$ este normal la planul $\overline{\overline{P}}$, iar pe de altă parte $\vec{P}$ este perpendicular pe $\vec{N}$. Rezultă de aici că $\vec{N}$ se află cuprins în planul $\overline{\overline{P}}$ și *prin urmare cadrul (C) se poate roti în jurul unei axe fixe* $\overline{P}$ a cărei direcție este dată de $\vec{P}$.

Dar relația (2.3) arată că $\vec{P}$ trebuie să se afle cuprins în planul $\overline{\overline{B}}$, deoarece se exprimă liniar în raport cu $\vec{S}$ și $\vec{C}$. Prin urmare $\vec{P} \perp \vec{B}$, sau în alți termeni axa $\overline{B}$ se află cuprinsă în planul $\overline{\overline{P}}$ (fig. 2.1). Rezumînd, putem spune:

a. *Dacă* $\varphi_N = const.$, *atunci planul cadrului (C) se rotește în jurul unui ax fix* $\overline{P}$ *și reciproc.*

b. *Planele* $\overline{\overline{P}}$ *trec prin axa binormală fixă* $\overline{B}$, *oricare ar fi* $\nu = \operatorname{tg} \varphi_N$ (fig. 2.2).

Ecuațiile axei fixe $\overline{P}$ sînt

$$(\overline{P})_x \qquad \frac{x^1}{S_1 - \nu C_1} = \frac{x^2}{S_2 - \nu C_2} = \frac{x^3}{S_3 - \nu C_3}. \tag{2.6}$$

Polii $\dot{P}_{\Sigma+}$ și $\dot{P}_{\Sigma-}$ în care axa fixă $\overline{P}$ înțeapă sfera $\overline{\overline{\Sigma}}$ au coordonatele

$$(\dot{P}_{\Sigma\pm})_x \qquad x^i = \varepsilon . N . \frac{P_i}{P}, \tag{2.7}$$

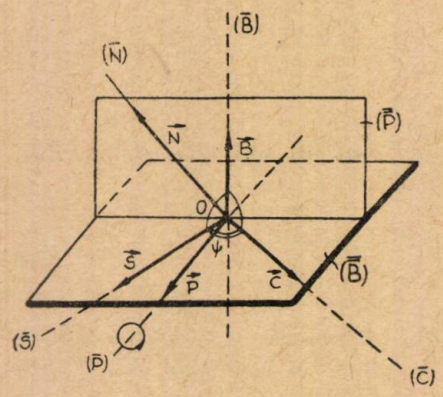


Fig. 2.1

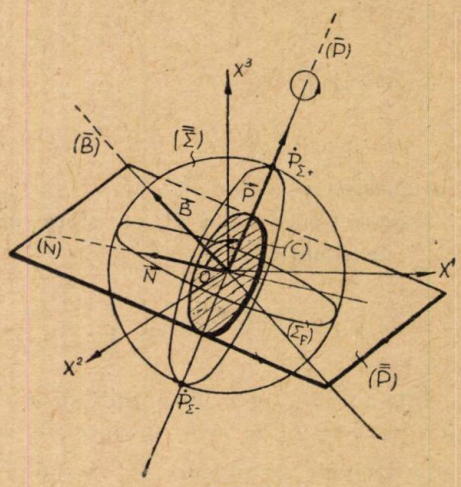


Fig. 2.2

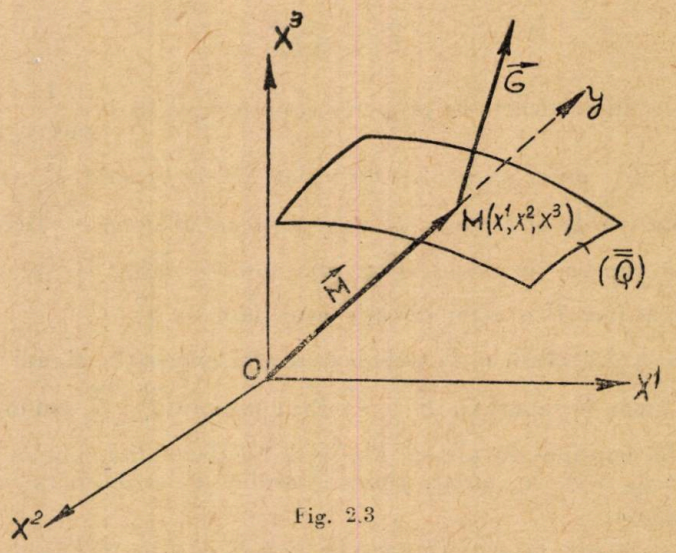


Fig. 2.3

în care

$$P^2 = P_i\, P^i = S^2 - 2\nu\, D + \nu^2 C^2\,, \quad N = 1$$

și

$$\varepsilon = +1 \text{ pentru } \dot{P}_{\Sigma+}\,, \quad \varepsilon = -1 \text{ pentru } \dot{P}_{\Sigma-}\,.$$

2.2. *Studiul cvadricei echiamplitudine N* ($\overline{\overline{Q}}$)

Studiul cvadricei $\overline{\overline{Q}}$ revine la studiul matricei (1.17) și prin urmare la studiul formei pătratice corespunzătoare

$$Q \equiv C_{ij}\, x^i x^j \,. \tag{2.8}$$

Normalele la $\overline{\overline{Q}}$ au direcția gradientului $\vec{G} = G_i \vec{\xi}^i$ (fig. 2.3)de componente

$$G_i = \frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial x^i} = C_{ij} x^i \,.$$

Condiția ca o axă $\overline{Oy}$ să fie o axă de simetrie pentru cvadrica $\overline{\overline{Q}}$ este ca $\vec{G} \parallel \vec{M}$ adică

$$G_i = C_{ij} x^j = \lambda \cdot x_i \,,$$

sau mai general

$$(C_{ij} - \lambda \cdot \delta_{ij})\, x^j = 0, \tag{2.9}$$

în care λ este un parametru ce trebuie determinat, iar

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ pentru } i = j \\ 0 \text{ pentru } i \neq j. \end{cases}$$

Eliminarea variabilelor x^j între relațiile (2.9) ne conduce la *ecuația caracteristică* a cvadricei $\overline{\overline{Q}}$

$$V(\lambda) = \begin{vmatrix} C_{11} - \lambda & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} - \lambda & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \,. \tag{2.10}$$

Rădăcinile λ_α ($\alpha = 1, 2, 3$) ale ecuației caracteristice, reprezintă *valorile proprii ale matricei* $\| C_{ij} \|$. Dezvoltînd (2.10) în raport cu λ, obținem

$$V(\lambda) = -(\lambda^3 - I_1\, \partial\lambda^2 + I_2\lambda - I_3) = 0, \tag{2.11}$$

în care I_1, I_2 și I_3 sînt *invarianții scalari* găsiți la (1.21).

Ținînd seama că $I_3 = 0$, relația (2.11) se mai poate scrie

cu

$$\left.\begin{aligned} V(\lambda) &= -\lambda \,.\, W(\lambda) = 0 \\ W(\lambda) &= \lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

care are rădăcinile reale și pozitive $\lambda_1 < \lambda_2$ (vezi (3.20′)), iar $\lambda_3 = 0$. Rezultă de aici că *cvadrica* $\overline{\overline{Q}}$ *este un cilindru eliptic.*

Axele proprii $\overline{Oy^\alpha}$ ale lui $\overline{\overline{Q}}$ se obțin prin rezolvarea în raport cu x^i ($i = 1, 2, 3$) a sistemului (2.9). Acesta se scrie mai dezvoltat astfel

$$\left.\begin{aligned} (C_{11} - \lambda_\alpha)\, x^1 + C_{12}\, x^2 + C_{13}\, x^3 &= 0, \\ C_{21}\, x^1 + (C_{22} - \lambda_\alpha)\, x^2 + C_{23} x^3 &= 0, \\ C_{31}\, x^1 + C_{32}\, x^2 + (C_{33} - \lambda_\alpha)\, x^3 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

Dacă $\alpha = 3$, atunci $\lambda_3 = 0$ și sistemul de mai sus devine

$$\left.\begin{aligned} C_{11}\,x^1 + C_{12}\,x^2 + C_{13}\,x^3 &= 0,\\ C_{21}\,x^1 + C_{22}\,x^2 + C_{23}\,x^3 &= 0,\\ C_{31}\,x^1 + C_{32}\,x^2 + C_{33}\,x^3 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.13'}$$

Ecuațiile axei $\overline{Oy^3}$ se obțin rezolvînd două din ecuațiile (2.13'). Găsim

$$(\overline{Oy^3})_x \qquad \frac{x^1}{\widetilde{C}^{1k}} = \frac{x^2}{\widetilde{C}^{2k}} = \frac{x^3}{\widetilde{C}^{3k}},$$

în care k este un *indice arbitrar* putînd lua una din valorile 1, 2 sau 3.

Dacă ținem seamă de *matricea complementară* a lui $\|C_{ij}\|$

$$\|\widetilde{C}^{ij}\| = \begin{Vmatrix} \widetilde{C}^{11} & \widetilde{C}^{21} & \widetilde{C}^{31} \\ \widetilde{C}^{12} & \widetilde{C}^{22} & \widetilde{C}^{32} \\ \widetilde{C}^{13} & \widetilde{C}^{23} & \widetilde{C}^{33} \end{Vmatrix} \equiv \begin{Vmatrix} S_{23}S_{23} & S_{23}S_{31} & S_{23}S_{12} \\ S_{31}S_{23} & S_{31}S_{31} & S_{31}S_{12} \\ S_{12}S_{23} & S_{12}S_{31} & S_{12}S_{12} \end{Vmatrix}, \tag{2.14}$$

putem scrie pentru *ecuațiile axei proprii* $\overline{Oy^3}$

$$(\overline{Oy^3})_x \qquad \frac{x^1}{S_{23}} = \frac{x^2}{S_{31}} = \frac{x^3}{S_{12}}, \tag{2.15}$$

care reprezintă chiar ecuațiile axei binormale $\overline{B}$ date la (1.11) (vezi și 1.20).

Rezultă de aici că *axa cilindrului* $\overline{\overline{Q}}$ *coincide cu axa binormală* $\overline{B}$.

Pentru a găsi ecuațiile celorlalte două axe $\overline{Oy^1}$, $\overline{Oy^2}$ putem proceda în mod analog ca la $\overline{Oy^3}$ făcînd $\alpha = 1,2$ în ecuațiile (2.13). Dar rezolvarea sistemului de ecuații astfel obținut ne conduce la expresii complicate și nesimetrice. De aceea, preferăm să facem observația următoare: deoarece sistemul $Oy^1y^2y^3$ este triortogonal, iar $\overline{Oy^3}$ coincide cu $\overline{B}$, rezultă că $\overline{Oy^1}$ și $\overline{Oy^2}$ se află în planul $\overline{\overline{B}}$ și prin urmare versorul axei $\overline{Oy^\alpha}$ poate fi exprimat în funcție de vectorii fundamentali $\vec{C}$ și $\vec{S}$.

Însemnînd

$$\vec{\eta}^i = \text{vers}\ \overline{Oy^i} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3), \tag{2.16}$$

vom scrie că $\vec{\eta}^\alpha$ trebuie să fie de forma

$$\vec{\eta}^\alpha = \sigma_\alpha \vec{S} + \gamma_\alpha \vec{C} \qquad (\alpha = 1,\ 2), \tag{2.17}$$

adică ecuațiile axei $\overline{Oy^\alpha}$ sînt

$$(\overline{Oy^\alpha})_x \qquad \frac{x^1}{\sigma_\alpha S_1 + \gamma_\alpha C_1} = \frac{x^2}{\sigma_\alpha S_2 + \gamma_\alpha C_2} = \frac{x^3}{\sigma_\alpha S_3 + \gamma_\alpha C_3}. \tag{2.18}$$

Coeficienții σ_α și γ_α se obțin scriind că sistemul (2.13) trebuie să se verifice identic pentru x^1, x^2, x^3 dați de (2.18). Această condiție se poate exprima remarcînd că în notație vectorială sistemul (2.13) este echivalent cu

$$(C_i \vec{C} + S_i \vec{S} - \lambda_\alpha \vec{\xi}^i) \cdot \vec{M} = 0, \qquad (i = 1, 2, 3 \; ; \; \alpha = 1,2)$$

sau, ținînd seama de (2.17), trebuie să avem identitatea

$$(C_i \vec{C} + S_i \vec{S} - \lambda_\alpha \vec{\xi}^i) \cdot (\sigma_\alpha \vec{S} + \gamma_\alpha \vec{C}) \equiv 0,$$

oricare ar fi i.

Prin efectuarea calculelor, ținînd seama că $\vec{\xi}^i \cdot \vec{S} = S_i$ și $\vec{\xi}^i \cdot \vec{C} = C_i$ și ordonînd în raport cu C_i și S_i, obținem sistemul

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_\alpha D + \gamma_\alpha (C^2 - \lambda_\alpha) = 0, \\ &\sigma_\alpha (S^2 - \lambda_\alpha) + \gamma_\alpha D = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.19}$$

Formînd determinantul acestui sistem omogen, găsim identitatea $W(\lambda_\alpha) \equiv 0$ valabilă oricare ar fi α (vezi relația (2.12)), ceea ce arată că ecuațiile (2.19) admit și soluții nenule, care sînt

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_\alpha = k(C^2 - \lambda_\alpha), \quad \gamma_\alpha = -kD, \\ &\text{sau} \\ &\sigma_\alpha = -k'D, \qquad \gamma_\alpha = k'(S^2 - \lambda_\alpha), \end{aligned}\right\} \tag{2.20}$$

în care k sau k' sînt coeficienți de proporționalitate provizorii. O formă simplificată pentru (2.20) și prin urmare pentru ecuațiile axelor $\overline{Oy}^\alpha$ date de (2.18) o vom găsi la (3.27).

Ecuația *cilindrului eliptic* $\overline{\overline{Q}}$ în sistemul de axe proprii $Oy^1y^2y^3$ este

$$(\overline{\overline{Q}})_y \qquad \lambda_1 (y^1)^2 + \lambda_2 (y^2)^2 - \lambda_0 = 0, \tag{2.21}$$

în care

$$\left.\begin{aligned} &0 < \lambda_1 < \lambda_2, \\ &\lambda_0 = A_N^2 \quad . \end{aligned}\right\} \tag{2.21'}$$

Semiaxele $q_\alpha = \overline{Oq}_\alpha$, ale *elipsei de echiamplitudine* N ($\overline{Q}_B \equiv \overline{Q}$), adică ale secțiunii drepte a cilindrului eliptic $\overline{\overline{Q}}$ (fig. 2.4), sînt

$$q_\alpha = \sqrt{\frac{\lambda_0}{\lambda_\alpha}} \qquad (\alpha = 1,2), \tag{2.22}$$

iar ecuația elipsei ($\overline{Q}_B \equiv \overline{Q}$) sînt în sistemul de coordonate $Oy^1y^2y^3$, respectiv $Ox^1x^2x^3$

$$(\overline{Q})_y \begin{cases} (\overline{\overline{Q}})_y & \lambda_1 (y^1)^2 + \lambda_2 (y^2)^2 - \lambda_0 = 0 \\ (\overline{\overline{B}})_y & y^3 = 0 \end{cases} \tag{2.23}$$

$$(\overline{Q})_x \begin{cases} (\overline{\overline{Q}})_x & C_{ij} x^i x^j - \lambda_0 = 0 \\ (\overline{\overline{B}})_x & B_i x^i = 0. \end{cases} \tag{2.23'}$$

(Pentru $(\overline{Q})_y$ vezi și reprezentarea parametrică de la (4.12)). Ecuațiile sfericei echiamplitudine $N(\overline{\Sigma}_Q)$ sînt

$$(\overline{\Sigma}_Q)_y \begin{cases} (\overline{\overline{Q}})_y & \lambda_1 (y^1)^2 + \lambda_2 (y^2)^2 - \lambda_0 = 0, \\ (\overline{\overline{\Sigma}})_y & y_i\, y^i - N^2 = 0, \end{cases} \tag{2.24}$$

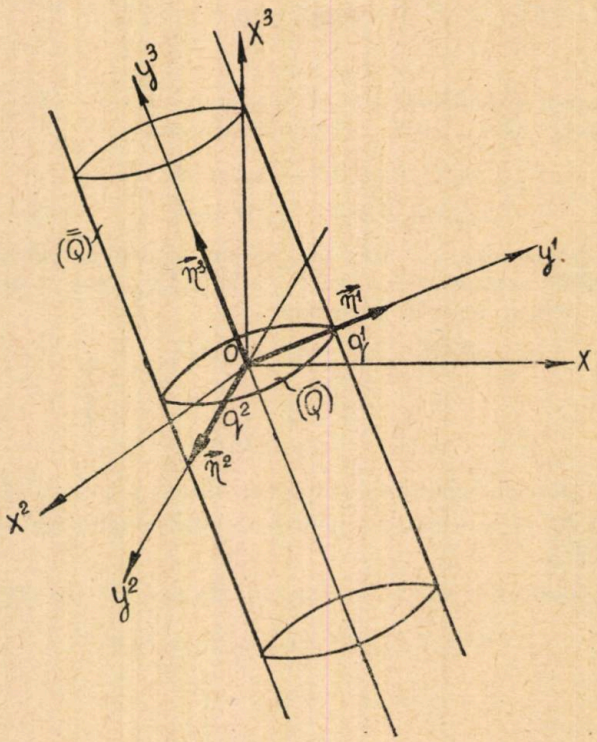


Fig. 2.4

$$(\overline{\Sigma}_Q)_x \begin{cases} (\overline{\overline{Q}})_x & C_{ij}\, x^i\, x^j - \lambda_0 = 0, \\ (\overline{\overline{\Sigma}})_x & x_i\, x^i - N^2 = 0. \end{cases} \tag{2.24'}$$

3. Despre elipsa de polarizație și elementele ei

3.1. *Despre orientarea planului elipsei de polarizație*

Se știe că *elipsa de polarizație* $\overline{\mathcal{E}}$ *relativă la punctul* O este mulțimea punctelor $H(H_1, H_2, H_3)$, extremitățile vectorului variabil $\vec{H} = \vec{H}(t)$ în timpul unei perioade. Evident că elipsa fiind o curbă plană, ea se află întotdeauna într-un același plan. Totuși, vom demonstra acest lucru cunoscut numai *pentru a arăta rolul vectorului binormal* $\vec{B}$ *în orientarea acestui plan.*

Pentru aceasta să calculăm expresia *vectorului binormal* $\vec{B}^*$ la curba $\bar{\mathfrak{S}}$ (fig. 3.1) definită conform relației (1.8) prin

$$\vec{H} = \cos\omega t.\,\vec{C} - \sin\omega t.\,\vec{S}.$$

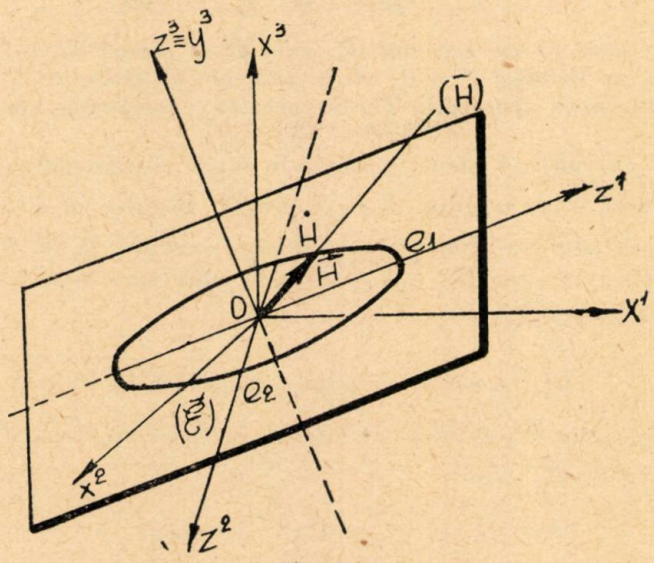


Fig. 3.1

Vectorul $\vec{B}^*$ este dat conform teoriei curbelor în spațiul tridimensional de

$$\vec{B}^* = \frac{1}{\omega^3}\left(\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \times \frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}\right), \tag{3.1}$$

care se mai poate scrie, ținînd seama de expresia lui $\vec{H}$, sub forma

$$\vec{B}^* = \frac{1}{\omega}\left(\vec{H} \times \frac{\partial\vec{H}}{\partial t.}\right). \tag{3.1'}$$

Dezvoltînd calculele în (3.1'), ajungem la

$$\vec{B}^* \equiv \vec{B} = \vec{S} \times \vec{C} = S_{23}\,\vec{\xi}^1 + S_{31}\,\vec{\xi}^2 + S_{12}\,\vec{\xi}^3,$$

rezultat identic cu (1.20).

De aici rezultă că $\vec{B}^*$ este un vector constant, prin urmare curba $\bar{\mathfrak{S}}$ este o curbă plană. *Cîmpul magnetic* $\vec{H}$ *se află cuprins întotdeauna într-un același plan, numit planul elipsei de polarizație.*

Să vedem acum care este valoarea f.e.m. de inducție U, dacă $\vec{N} \parallel \vec{B}$, adică dacă planul cadrului (C) coincide cu planul elipsei de polarizație. Deoarece $\vec{N}$ este paralel cu $\vec{B}^*$

$$\vec{N} = \frac{\vec{B}^*}{B^*}. \tag{3.2}$$

Pe de altă parte, ținînd seama de expresiile lui U, $\vec{N}$ și $\vec{B}^*$ date respectiv de (1.5), (3.2) și (3.1) obținem

$$U = - k_u \frac{N_C S_C}{B\omega} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \cdot \left(\vec{H} \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) = 0.$$

Prin urmare, *dacă planul cadrului (C) coincide cu planul elipsei de polarizație, atunci f.e.m. de inducție* $U = 0$, *adică prin spirele cadrului (C) nu trece nici un curent.* În cazul aparaturii Turam aceasta corespunde unei extincții în telefon.

Deoarece curba este plană, normala la elipsa $\bar{\mathcal{E}}$ coincide cu binormala $\vec{B}^*$ la aceeași curbă și cu normala $\bar{B}$ la planul $\bar{\bar{B}}$. Rezultă că *direcția binormalei* $\vec{B}^*$ *coincide cu axul principal* $\overline{Oy^3}$ *al cilindrului eliptic* $\bar{\bar{Q}}$ sau în alți termeni *elipsa de echiamplitudine* N ($\bar{Q}_B$) *și elipsa de polarizație* $\bar{\mathcal{E}}$ *se află cuprinse în planul de polarizație* $\bar{\bar{B}}$.

3.2. *Despre axele elipsei de polarizație*

Mărimea axelor elipsei de polarizație $\bar{\mathcal{E}}$ se determină calculînd extremele cîmpului magnetic $\vec{H}$. Avem

$$H^2 = \vec{H} \cdot \vec{H} = (\cos\omega t \cdot \vec{C} - \sin\omega t \cdot \vec{S})^2.$$

Anulînd derivata $\frac{\partial H}{\partial t}$ avem condiția

$$2H \cdot \frac{\partial H}{\partial t} = - 2\omega (\cos \omega t \cdot \vec{CS} - \sin \omega t \cdot \vec{CS}) \cdot (\sin \omega t \cdot \vec{CS} + \cos \omega t \cdot \vec{CS}) = 0$$

care se reduce la

$$H \cdot \frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\omega}{2} [2D \cos 2\omega t + (C^2 - S^2) \sin 2\omega t] = 0 \qquad (3.3)$$

sau

$$\operatorname{tg} 2\omega t = - \frac{2D}{C^2 - S^2}.$$

Pentru a calcula pe

$$\mu = \operatorname{tg} \omega t \qquad (3.4)$$

scriem

$$\operatorname{tg} 2\omega t = - \frac{2D}{C^2 - S^2} = \frac{2\mu}{1 - \mu^2}$$

sau

$$D\mu^2 - (C^2 - S^2)\mu - D = 0. \qquad (3.5)$$

Dacă μ_1 și μ_2 sînt cele două rădăcini ale ecuației (3.5) [vezi (3.27)], atunci avem întotdeauna

$$\mu_1 \mu_2 = -1, \tag{3.6}$$

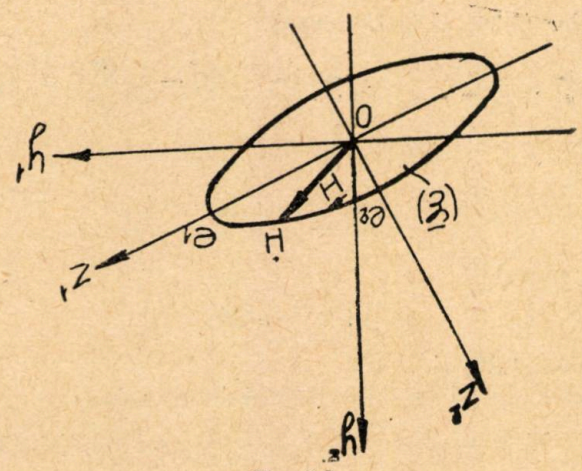


Fig. 3.2

ceea ce arată că cele două rădăcini sînt opuse și inverse. Prin urmare

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \operatorname{tg} \omega t_1, \\ \mu_2 &= \operatorname{tg} \omega t_2 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \omega t_1\right). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Vîrfurile $\dot{e}_1$ și $\dot{e}_2$ ale elipsei $\overline{\mathfrak{E}}$ (fig. 3.2) sînt date de vectorii

$$\vec{e}_\alpha = \vec{O}e_\alpha = \frac{\vec{C} - \mu_\alpha \vec{S}}{\sqrt{1 + \mu_\alpha^2}} \quad (\alpha = 1, 2). \tag{3.8}$$

Dacă ținem seama de (3.6), vectorii semiaxelor devin

$$\left.\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \frac{\vec{C} - \mu_1 \vec{S}}{\sqrt{1 + \mu_1^2}}, \\ \vec{e}_2 &= \frac{\vec{C}\mu_1 + \vec{S}}{\sqrt{1 + \mu_1^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

Pentru a determina lungimea semiaxelor e_1 și e_2, vom ridica la pătrat relațiile (3.9) și avem

$$\left.\begin{aligned} (e_1)^2 &= \frac{C^2 - 2\mu_1 D + \mu_1^2 S^2}{1 + \mu_1^2}, \\ (e_2)^2 &= \frac{S^2 + 2\mu_1 D + \mu_1^2 C^2}{1 + \mu_1^2}. \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

Putem găsi însă o relație remarcabilă pentru semiaxele e_α calculînd *suma și produsul pătratelor lungimilor acestor semiaxe.* Din (3.10) deducem imediat

$$(e_1)^2 + (e_2)^2 = C^2 + S^2 = A^2 = I_1,$$

conform relațiilor (1.21) și (1.15). Apoi

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = e_1 \cdot e_2 \cdot \sin\frac{\pi}{2} \cdot \vec{\eta}^3 = \frac{(\vec{C} - \mu_1 \vec{S}) \times (\vec{C}\,\mu_1 + \vec{S})}{1 + \mu_1^2}$$

sau

$$e_1 \cdot e_2 \cdot \vec{\eta}^3 = \vec{C} \times \vec{S} = -\vec{B}$$

sau ridicînd la pătrat

$$(e_1)^2 \cdot (e_2)^2 = B^2 = I_2,$$

conform relațiilor (1.21) și (1.15).

Prin urmare $(e_1)^2$ și $(e_2)^2$ sînt rădăcinile ecuației

$$W(\lambda) = \lambda^2 - I_1 \lambda + I_2 = 0 \text{ (vezi relația (2.12))} . \tag{3.11}$$

Această ecuație dă valorile proprii λ_1 și λ_2 relative la axele $\overline{Oy}^1$ și $\overline{Oy}^2$ ale elipsei de echiamplitudine $N(\overline{Q})$. Deci

$$e_\alpha = \sqrt{\lambda_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2). \tag{3.12}$$

Dacă ne referim la (2.22) putem stabili următoarea *relație remarcabilă între semiaxele q_α ale elipsei de echiamplitudine $N(\overline{Q})$ și semiaxele e_α ale elipsei de polarizație $\overline{\mathscr{E}}$*

$$q_\alpha \cdot e_\alpha = \sqrt{\lambda_0} = A_N \qquad (\alpha = 1,2). \tag{3.13}$$

Ecuația *cilindrului de polarizație* $\overline{\overline{\mathscr{E}}}$ în sistemele $Oy^1y^2y^3$ și $Ox^1x^2x^3$ sînt respectiv

$$\begin{aligned} &(\overline{\overline{\mathscr{E}}})_y \qquad \lambda_2 (y^1)^2 + \lambda_1 (y^2)^2 - B^2 = 0, \\ &(\overline{\overline{\mathscr{E}}})_x \qquad \mathscr{E}_{ij}\, x^i\, x^j - B^4 = 0, \end{aligned} \tag{3.14}$$

în care

$$\mathscr{E}_{ij} = (C_i S^2 - S_i D)(C_j S^2 - S_j D) + (C_i D - S_i C^2)(C_j D - S_j C^2). \tag{3.14'}$$

De aici rezultă imediat ecuațiile elipsei $\overline{\mathscr{E}}$

$$(\overline{\mathscr{E}})_y \begin{cases} (\overline{\overline{\mathscr{E}}})_y & \lambda_2 (y^1)^2 + \lambda_1 (y^2)^2 - B^2 = 0, \\ (\overline{B})_y & y^3 = 0, \end{cases} \tag{3.15}$$

$$(\overline{\mathscr{E}})_x \begin{cases} (\overline{\overline{\mathscr{E}}})_x & \mathscr{E}_{ij} x^i x^j - B^4 = 0, \\ (\overline{B})_x & B_i x^i = 0. \end{cases} \tag{3.15'}$$

În ceea ce privește direcția axelor elipsei $\overline{Oz^1}$ și $\overline{Oz^2}$, acestea sînt determinate de versorii

$$\vec{\zeta}_\alpha = \frac{\vec{C} - \mu_\alpha \vec{S}}{\left|\vec{C} - \mu_\alpha \vec{S}\right|}, \tag{3.16}$$

iar ecuațiile acestor axe sînt

$$(\overline{Oz^\alpha})_x \quad \frac{x^1}{C_1 - \mu_\alpha S_1} = \frac{x^2}{C_2 - \mu_\alpha S_2} = \frac{x^3}{C_3 - \mu_\alpha S_3} \quad (\alpha = 1,2)\,. \tag{3.16'}$$

3.3 *Despre poziția relativă a sistemelor de axe Oz^1z^2 și Oy^1y^2*

Să revenim la ecuațiile (2.12) și (3.5) care dau rădăcinile λ și μ legate de elipsa de echiamplitudine $N(\overline{Q})$ și de elipsa de polarizație $\overline{\mathfrak{E}}$ și să le rezolvăm. Avem

$$\lambda^2 - (C^2 + S^2)\,\lambda + (S^2C^2 - D^2) = 0 \tag{2.12'}$$

$$D\,\mu^2 - (C^2 - S^2)\,\mu - D = 0 \qquad \text{(vezi relația (3.5))}\,.$$

Găsim

$$\lambda = \frac{C^2 + S^2 \pm R,}{2} \tag{3.17}$$

$$\mu = \frac{C^2 - S^2 \pm \varepsilon R}{2D} \quad (\varepsilon = \pm 1), \tag{3.18}$$

în care

$$R^2 = (C^2 - S^2)^2 + 4D^2. \tag{3.19}$$

Dacă ținem seama de (2.21), λ_α ($\alpha = 1,2$) este

$$\lambda_\alpha = \frac{C^2 + S^2 + (-1)^\alpha R}{2}\,. \tag{3.20}$$

Pentru a determina care este valoarea lui ε care corespunde lui μ_1, vom face două ipoteze posibile

$$\mu_1 = \frac{C^2 - S^2 + \varepsilon R}{2D} \qquad (\varepsilon = \pm 1)\,. \tag{3.21}$$

În aceste condiții (2.19) devine după cîteva transformări

$$\begin{cases} \sigma_\alpha + \gamma_\alpha \mu_1 = 0, & \gamma_\alpha - \sigma_\alpha \mu_2 = 0 \\ \sigma_\alpha + \gamma_\alpha \mu_2 = 0, & \gamma_\alpha - \sigma_\alpha \mu_1 = 0 \end{cases} \qquad \text{după cum } \varepsilon = \begin{cases} +1 \\ -1\,. \end{cases} \tag{3.22}$$

Să calculăm în aceste două ipoteze unghiul dintre axele $\overline{Oy^1}$ și $\overline{Oz^1}$. Ținînd seama de (3.22) expresia lui $\vec{\eta}'_1$ dată de (2.17) devine

$$\vec{\eta}' = \sigma_1 \vec{S} + \gamma_1 \vec{C} = \begin{cases} +\gamma_1 (\vec{C} - \mu_1 \vec{S}) \\ +\sigma_1 (\vec{S} + \mu_1 \vec{C}) \end{cases} \qquad \varepsilon = \begin{cases} +1 \\ -1\,. \end{cases}$$

În ceea ce privește expresia lui $\vec{\zeta}^1$, aceasta se deduce din (3.15) făcînd $\alpha = 1$. Se constată

$$\left.\begin{aligned} \vec{\eta}^1 \times \vec{\zeta}^1 = 0 \quad &\therefore \quad \overline{Oy}^1 \parallel \overline{Oz}^1 \qquad (\varepsilon = +1), \\ \vec{\eta}^1 \cdot \vec{\zeta}^1 = 0 \quad &\therefore \quad \overline{Oy}^1 \perp \overline{Oz}^1 \qquad (\varepsilon = -1). \end{aligned}\right\} \tag{3.23}$$

Aceasta arată că *dacă* $\varepsilon = +1$, *sistemul de axe* Oz^1z^2 *se suprapune peste sistemul* Oy^1y^2, *iar dacă* $\varepsilon = -1$, *atunci sistemul de axe* Oz^1z^2 *este rotit cu* $+\frac{\pi}{2}$ *față de* Oy^1y^2.

Pentru a stabili care din cele două valori ale lui ε convine problemei noastre, să ținem seama de (3.13). Aceasta arată că semiaxele q_α și e_α sînt invers proporționale, adică, *deoarece* q_1 *este semiaxa mare a elipsei de echiamplitudine* $N(\overline{Q})$, *rezultă că* e_1 *trebuie să fie semiaxa mică a elipsei de polarizație* $\overline{\mathfrak{S}}$. Prin urmare, pentru $\mu = \mu_1$ trebuie să avem H minim, adică $\left(\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}\right)_1$ să fie pozitiv. Derivînd membrul întîi al relației (3.3), găsim

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)^2 + H\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \omega^2 \cdot \left[2D\sin\ 2\omega t - (C^2 - S^2)\cos\ 2\omega\, t.\right]. \tag{3.24}$$

Pentru expresiile lui $\sin 2\omega t$ și $\cos 2\omega t$ corespunzătoare la $\mu = \mu_1$, avem

$$\sin 2\omega\, t_1 = \frac{2\mu_1}{1+\mu_1^2}$$

$$\cos 2\omega\, t_1 = \frac{1-\mu_1^2}{1+\mu_1^2}.$$

Dar $\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_1 = 0$, conform relației (3.3). Prin urmare, (3.24) devine după o serie de calcule

$$\left(H \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}\right)_1 = \frac{\omega^2 \cdot R^2 \cdot \mu_1}{D(1+\mu_1^2)}.$$

Deoarece ne interesează numai semnul lui $\left(\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}\right)_1$, relația precedentă capătă forma mai simplă

$$\operatorname{sign}\left(H\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}\right)_1 = \operatorname{sign}\frac{\mu_1}{D}. \tag{3.25}$$

Dar μ_1 este dat de (3.21′), expresia depinzînd de parametrul ε, ceea ce transformă relația (3.25) în

$$\operatorname{sign}\left(H\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}\right) = \operatorname{sign}(C^2 - S^2 + \varepsilon R). \tag{3.25′}$$

Pe de altă parte, din (3.19) avem $R^2 > (C^2 - S^2)^2$, deci $R = C^2 - S^2 + R^+$ $(R^+ > 0)$.

Înlocuind în (3.25′) expresia lui R și utilizînd cele două ipoteze asupra semnului lui ε, avem

$$\operatorname{sign}\left(H\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}\right)_{1\varepsilon} = \begin{cases} 2\,(C^2 - S^2) + R^+ > 0 \\ -R^+ < 0 \end{cases} \qquad \varepsilon = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$$

sau încă

$$\operatorname{sign}\left(H\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}\right)_{1\varepsilon} = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases} \qquad \varepsilon = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases} \tag{3.26}$$

Cum $H > 0$ și $\left(\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}\right)_1$ trebuie să fie pozitiv, rezultă că $\left(H\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}\right)_1$ trebuie să fie și el pozitiv. *Această condiție este satisfăcută numai dacă* $\varepsilon = +1$, *în care caz sistemul de axe* $Oz^1 z^2$ *se suprapune peste sistemul de axe* $Oy^1 y^2$.

Ca urmare a stabilirii semnului lui ε, putem scrie

$$\left.\begin{aligned} &\mu_\alpha = \frac{C^2 - S^2 - (-1)^\alpha R}{2D}, \\ &\vec{\eta}^\alpha = \vec{\zeta}^\alpha = +\gamma_\alpha (\vec{C} - \mu_\alpha \vec{S}) \qquad \gamma_\alpha = \frac{1}{|\vec{C} - \mu_\alpha \vec{S}|} \\ &(\vec{Oy^\alpha})_x \qquad \frac{x^1}{C_1 - \mu_\alpha S_1} = \frac{x^2}{C_2 - \mu_\alpha S_2} = \frac{x_3}{C_3 - \mu_\alpha S_3} \end{aligned}\right\} \tag{3.27}$$

De asemenea, se pot stabili ușor între relațiile λ_α și μ_α

$$\lambda_\alpha = S^2 + D\,\mu_\beta = C^2 - D\mu_\alpha \tag{3.28}$$

și relația echivalentă

$$\lambda_\alpha \mu_\alpha = S^2 \mu_\alpha - D, \tag{3.29}$$

în care α, β sînt *indici ciclici* care au valorile 1,2; adică dacă

$$\alpha = (1,2) \text{ atunci } \beta = (2,1).$$

4. Despre rețelele echifază N și echiamplitudine N

4.1. *Despre fasciculul de drepte* $\overline{P}_B$

Dînd lui φ_N și A_N diferite valori, obținem două familii de sferice $\overline{\Sigma}_\varphi$ și $\overline{\Sigma}_A$, care sînt constituite din *meridianele*, respectiv *paralele eliptice sferice* relative la axa $\overline{B}$.

Pentru a studia rețeaua sferică astfel formată, o vom proiecta pe planul de polarizație $\overline{\overline{B}}$ ($\equiv Oy^1 y^2$), căpătînd o rețea plană constituită din *fasciculul de drepte* $\overline{P}_B$ și *fasciculul de elipse de echiamplitudine* N ($\overline{Q}_B$). Ecuația fasciculului de drepte $\overline{P}_B$ este determinată de vectorul $\vec{P}_B$ care dă direcția fasciculului. Ținînd seama de figura 4.1 și de relația (2.3)

$$\vec{P}_B = \vec{P} \times \vec{B} = (\vec{S} - \nu \vec{C}) \times \vec{B}. \tag{4.1}$$

Cu ajutorul acestei relații putem calcula pantele lui $\overline{P}_B$ în raport cu $\overline{O}y^{\alpha}$ ($\alpha = 1,2$) (fig. 4.2),

$$m_{\alpha\nu} = \operatorname{tg} \beta_{\alpha\nu} = \frac{|\vec{P}_B \times \vec{\eta}^{\alpha}|}{\vec{P}_B \cdot \vec{\eta}^{\alpha}}, \tag{4.2}$$

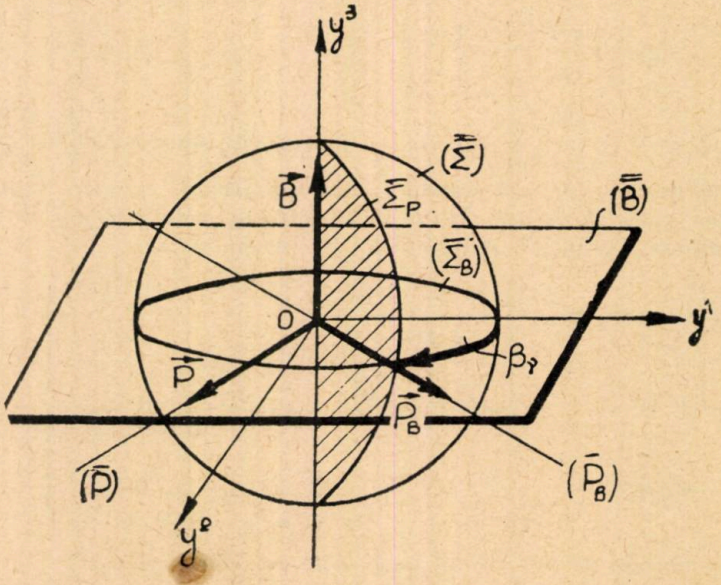


Fig. 4.1

în care $\vec{\eta}^{\alpha} = \vec{\zeta}^{\alpha}$ este dat de (3.27). Efectuînd calculul găsim

$$m_{\alpha\nu} = \frac{(\vec{S} - \nu \vec{C})(\vec{C} - \mu_{\alpha} \vec{S})}{B(\mu_{\alpha}\nu - 1)}.$$

Dar între λ_{α} și μ_{α} există relațiile (3.28), (3.29), care împreună cu (2.2) și (3.7) transformă pe $m_{\alpha\nu}$ în

$$m_{\alpha\nu} = \frac{\lambda_{\alpha}}{B} \cdot \frac{\nu + \mu_{\alpha}}{1 - \mu_{\alpha}\nu} = \frac{\lambda_{\alpha}}{B} \cdot \operatorname{tg}(\varphi_N + \omega t_{\alpha}^{*}) \tag{4.3}$$

Ecuația fasciculului căutat este prin urmare

$$(\overline{P}_B)_y \qquad y^2 = m_{1\nu} \cdot y^1. \tag{4.4}$$

Iată cîteva drepte particulare ale fasciculului $\overline{P}_B$:

1) dacă $\nu = 0$, obținem dreapta $\overline{P}_B(0) \perp \overline{S}$ de pantă

$$m_{10} = \frac{\lambda_1 \mu_1}{B}; \tag{4.5}$$

2) dacă $\nu = \infty$, obținem dreapta $\overline{P}_B(\infty) \perp \overline{C}$ de pantă

$$m_\infty = \frac{\lambda_1 \mu_2}{B}; \tag{4.6}$$

3) dacă $\nu = -\mu_\alpha$, găsim axele $\overline{Oy}^\beta$ (α, β sînt *indici ciclici* egali cu 1,2).

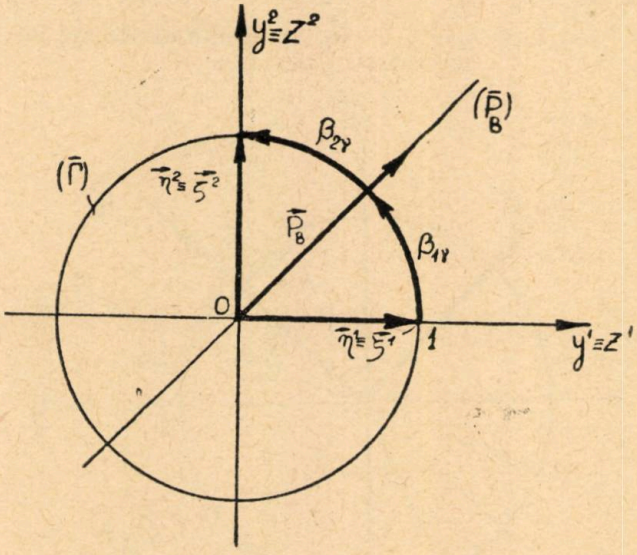


Fig. 4.2

Relația care dă unghiul ψ dintre $\overline{P}_B(0)$ și $\overline{P}_B(\infty)$ este

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{B}{D}, \tag{4.7}$$

identică cu (1.16).

Formulele (4.3) dau unghiul β_ν (fig. 4.3) corespunzător la un ν dat. Pentru a găsi valoarea lui ν corespunzătoare unghiului β_ν, vom inversa aceeași formulă și obținem după cîteva transformări

$$\nu = -\mu_\alpha \frac{Bm_{\alpha\nu} \cdot \mu_\beta + \lambda_\alpha}{Bm_{\alpha\nu} \cdot \mu_\alpha + \lambda_\alpha}. \tag{4.8}$$

Formulele (4.5) și (4.6) se regăsesc în relația (4.8) făcînd întîi $\alpha = 1$, $\beta = 2$, apoi $\nu = 0$, respectiv $\nu = \infty$.

4.2 *Despre familia de elipse $\overline{Q}_B$ și raporturile acesteia cu elipsa de polarizație $\overline{\mathfrak{E}}$*

Relațiile (2.21) și (2.22) dau ecuația familiei de elipse echiamplitudine $N(\overline{Q}_B)$, precum și lungimea semiaxelor q_α (fig. 4.4). Pentru a stabili poziția

elipselor $\overline{Q}_B$ în raport cu *ecuatorul unitate* $\overline{\Sigma}_B$ trebuie să deosebim patru cazuri:

$$\left.\begin{array}{lll} a) & 0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 & \overline{Q}_B \text{ interioară lui } \overline{\Sigma}_B, \\ b) & 0 < \lambda_0 = \lambda_1 < \lambda_2 & \overline{Q}_B \text{ tangentă interioară lui } \overline{\Sigma}_B, \\ c) & 0 < \lambda_1 < \lambda_0 < \lambda_2 & \overline{Q}_B \text{ secantă pentru } \overline{\Sigma}_B, \\ d) & 0 < \lambda_1 < \lambda_0 = \lambda_2 & \overline{Q}_B \text{ tangentă exterioară lui } \overline{\Sigma}_B. \end{array}\right\} \quad (4.9)$$

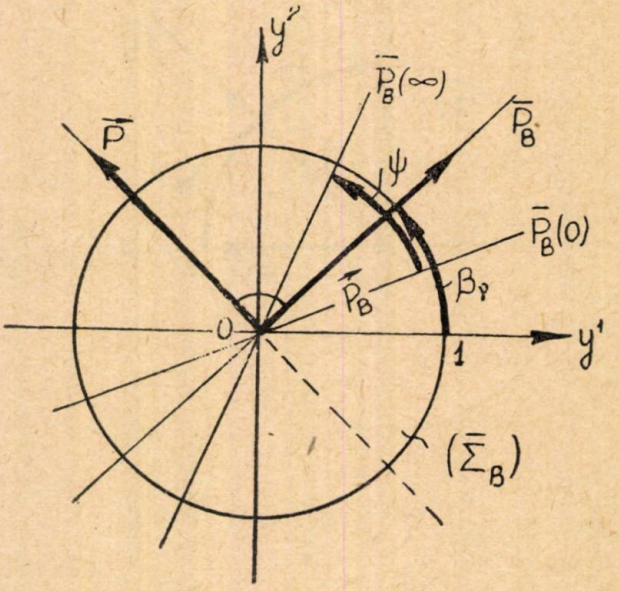


Fig. 4.3

Cele patru cazuri sînt arătate în figura 4.5.

În ceea ce privește poziția elipsei de polarizație $\overline{\mathscr{E}}_B$ în raport cu familia de elipse $\overline{Q}_B$, putem deosebi trei cazuri (fig. 4.6):

$$\left.\begin{array}{lll} a) & 0 < \lambda_1^2 = \lambda_0 < \lambda_2^2 & \overline{\mathscr{E}}_B \text{ tangentă exterioară lui } \overline{Q}_B, \\ b) & 0 < \lambda_1^2 < \lambda_0 < \lambda_2^2 & \overline{\mathscr{E}}_B \text{ secantă față de } \overline{Q}_B, \\ c) & 0 < \lambda_2^2 < \lambda_0 < \lambda_1^2 & \overline{\mathscr{E}}_B \text{ tangentă interioară lui } \overline{Q}_B, \end{array}\right\} \quad (4.10)$$

Intersecția dintre $\overline{\mathscr{E}}_B$ și $\overline{Q}_B$ se face în cel mult 4 puncte reale, care se deduc din punctul primului cadran prin simetrii în raport cu $\overline{Oy^1}$ și $\overline{Oy^2}$ și $\dot{O}$ (fig. 4.6). Coordonatele acestor puncte sînt

$$\left.\begin{array}{l} (y^1)^2 = \dfrac{\lambda_1 (\lambda_2^2 - \lambda_0)}{A^2 \cdot R}, \\ (y^2)^2 = \dfrac{\lambda_2 (\lambda_0 - \lambda_1^2)}{A^2 \cdot R}. \end{array}\right\} \quad (4.11)$$

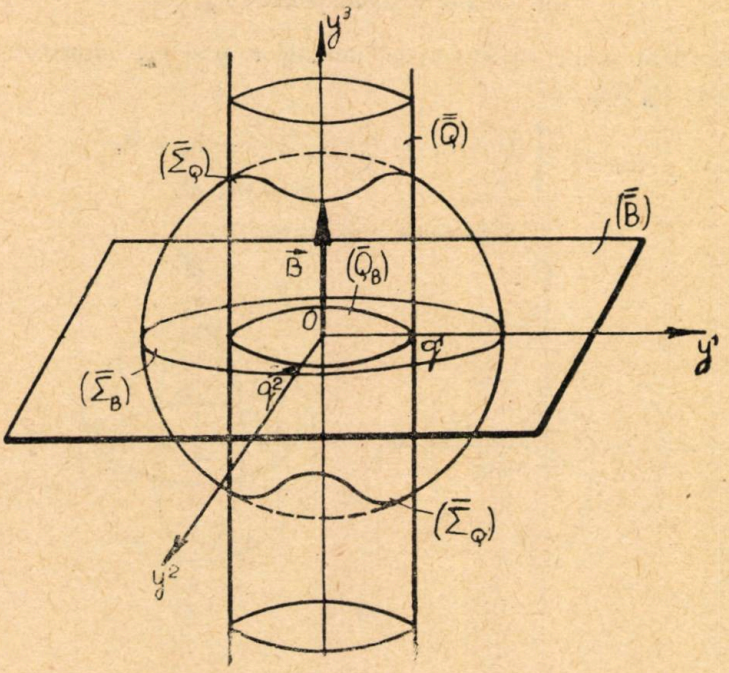

y³
(Q̄)
(Σ̄_Q)
(B̄)
B
(Q̄_B)
0
y¹
q¹
q²
(Σ̄_B)
(Σ̄_Q)
y²

Fig. 4.4

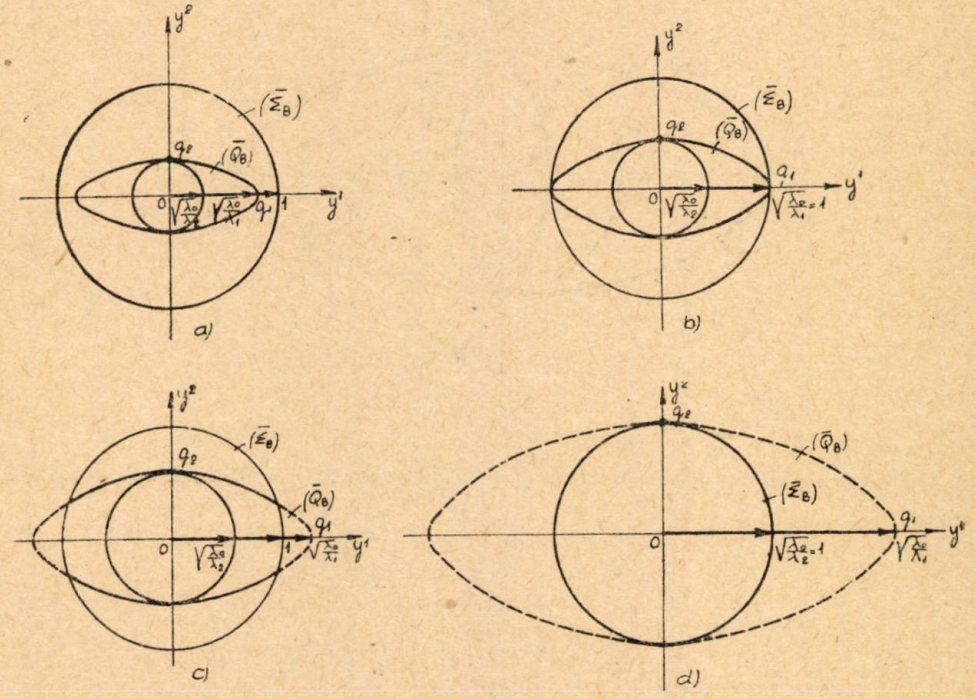

y²
(Σ̄_B)
q₂
(Q̄_B)
0
q₁
1
y¹
a)
y²
(Σ̄_B)
q₂
(Q̄_B)
0
q₁
y¹
b)
y²
(Σ̄_B)
q₂
(Q̄_B)
0
1
q₁
y¹
c)
y²
q₂
(Q̄_B)
(Σ̄_B)
0
q₁
y¹
d)

Fig. 4.5

4.3. *Despre rețeaua plană* $(\overline{P}_B, \overline{Q}_B)$

Să calculăm acum coordonatele punctelor $\dot{p} = \dot{p}_B$, intersecțiile dreptei $\overline{P}_B$ cu elipsa $\overline{Q}_B$ (fig. 4.7)

$$(\dot{p}_B)y \quad \begin{cases} (\overline{Q}_B)_y \lambda_1 (y^1)^2 + \lambda_2 (y^2)^2 - \lambda_0 = 0, \\ (\overline{P}_{By}) \qquad\qquad y^2 = m_{1\nu}\, y^1. \end{cases}$$

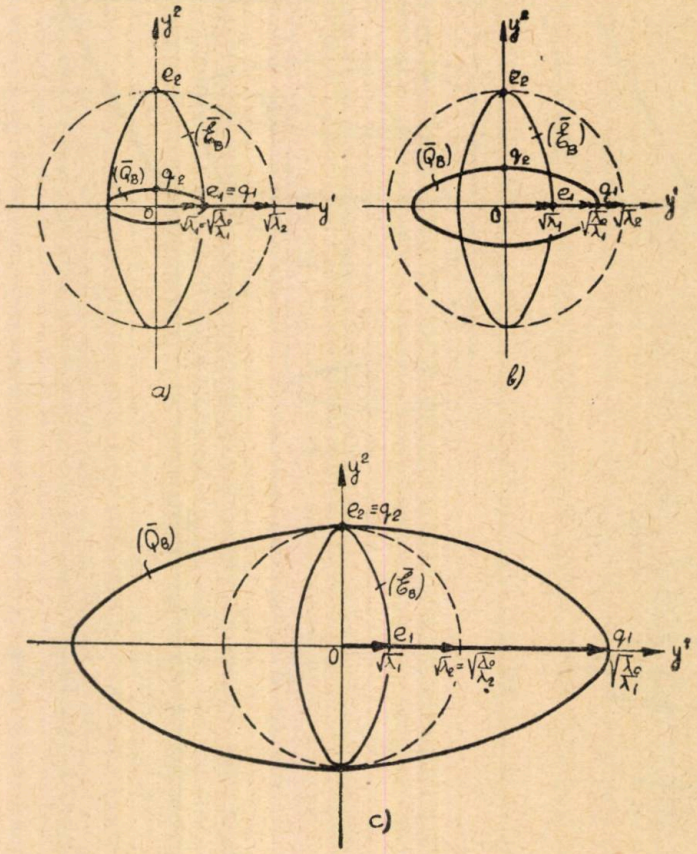


Fig. 4-6

Ținînd seama de expresia lui $m_{1\nu}$ dată de (4.3), rezultă pentru coordonatele lui $\dot{p}$.

$$(\dot{p}_B) \quad \begin{cases} y^1 = + \sqrt{\dfrac{\lambda_0}{\lambda_1}} \cdot \cos(\varphi_N + \omega t_1) \\ y^2 = + \sqrt{\dfrac{\lambda_0}{\lambda_2}} \cdot \sin(\varphi_N + \omega t_1) \end{cases} \tag{4.12}$$

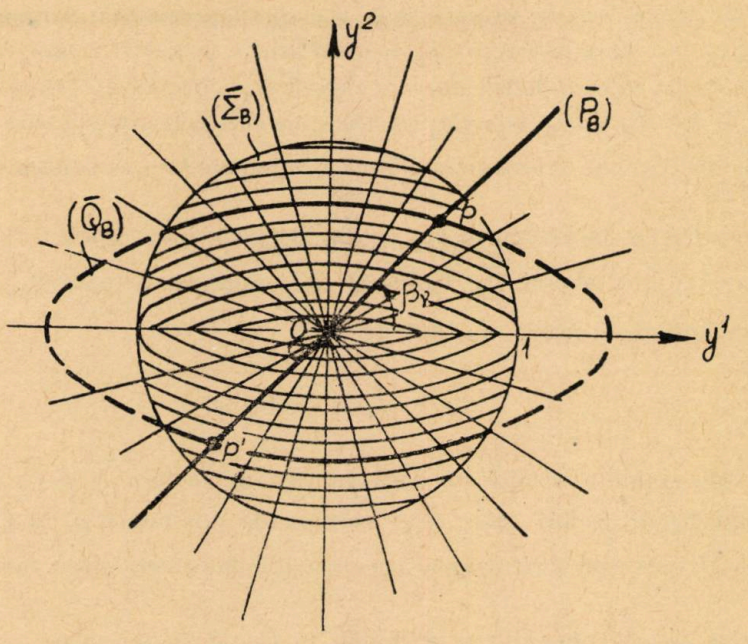


Fig. 4.7

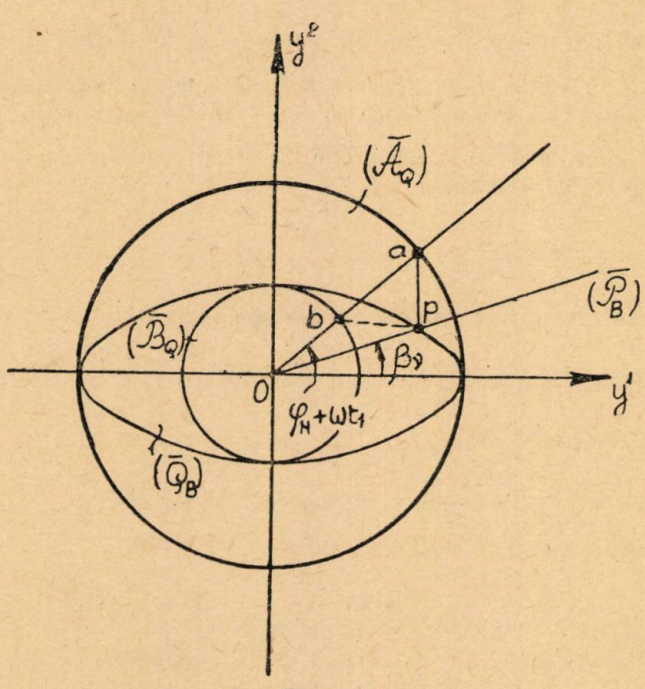


Fig. 4-8

Aceste ultime formule reprezintă în același timp ecuațiile parametrice ale elipsei $\overline{Q}_B$ cu φ_N parametru și dau o semnificație geometrică fazei $\varphi_N + \omega t_1$.

Într-adevăr, să considerăm una din elipsele $\overline{Q}_B$ corespunzătoare unui anumit $\lambda_0 = A_N^2$ și fie $\overline{\mathcal{A}}_Q$ și $\overline{\mathcal{B}}_Q$ *cercurile principale* ale elipsei noastre de raze respectiv $\sqrt{\frac{\lambda_0}{\lambda_1}}$ și $\sqrt{\frac{\lambda_0}{\lambda_2}}$ (fig. 4.8). Construcția elipsei prin puncte face ca la fiecare dreaptă care trece prin O și taie cercurile $\overline{\mathcal{A}}_Q$ și $\overline{\mathcal{B}}_Q$ în punctele a, respectiv b, să corespundă punctul p al elipsei $\overline{Q}_B$. Unind O cu p obținem dreapta $\overline{\mathcal{R}}_B$, care face cu $\overline{Oy^1}$ unghiul $\beta_\nu = \text{arctg } m_{1\nu}$, dat de (4.3).

Apoi

$$\varphi_N + \omega t_1 = \sphericalangle\, aOy^1. \tag{4.13}$$

Din cele stabilite rezultă că dacă cunoaștem vectorii $\vec{S}$ și $\vec{C}$, atunci la fiecare pereche de valori $(\varphi_N\ ,\ A_N)$ corespunde un punct p, în planul de polarizație $\overline{\overline{B}}$, care reprezintă imaginea geometrică plană a orientării cadrului (C).

5. Studiul variației fluxului și al f.e.m. în raport cu orientarea cadrului

5.1. *Expresia lui* Φ *și* U *pentru orientarea* $\vec{N}$ *a cadrului* (C)

Vom stabili expresiile fluxului Φ și ale f.e.m. U în funcție de orientarea $\vec{N}$ a cadrului (C), ținînd seama că acestea depind de H_N prin intermediul relațiilor (1.3) și (1.5). Pentru aceasta vom folosi coordonatele sferice cu *axa binormală* $\overline{B}$ ca axă de colatitudine $\delta = 0$ și *axa* $\overline{Oy^1}$ ca axă de azimut $\beta = 0$. Din figura 5.1 rezultă

$$\vec{N} = \sin\,\delta \cdot \cos\,\beta \cdot \vec{\eta}^1 + \sin\delta \cdot \sin\beta \cdot \vec{\eta}^2 + \cos\delta \cdot \vec{\eta}^3. \tag{5.1}$$

Valoarea lui H_N se obține ținînd seama de (1.9) și de relația de mai sus

$$H_N = \sin\delta\ (\cos\beta.\vec{\eta}^1 + \sin\beta.\vec{\eta}^2)\ (\cos\omega\, t.\vec{C} - \sin\omega\, t.\,\overline{S}) \tag{5.2}$$

sau încă dezvoltînd

$$H_N = \sin\delta.\,(c.\cos\omega\, t - s.\sin\omega\, t), \tag{5.3}$$

în care

$$\begin{aligned} c &= \cos\beta\,\vec{C}\cdot\vec{\eta}^1 + \sin\beta\cdot\vec{C}\cdot\vec{\eta}^2, \\ s &= \cos\beta\,\vec{S}\cdot\vec{\eta}^1 + \sin\beta\cdot\vec{S}\cdot\vec{\eta}^2. \end{aligned} \tag{5.3'}$$

Ţinînd seama de relaţiile (3.8), (3.12) şi (3.27) şi făcînd o serie de calcule simplificatoare, găsim

$$\left.\begin{aligned} c &= \frac{e_1 \cos\beta + \mu_1 e_2 \sin\beta}{\sqrt{1+\mu_1^2}} \\ s &= \frac{-\mu_1 e_1 \cos\beta + e_2 \sin\beta}{\sqrt{1+\mu_1^2}} \end{aligned}\right\} \qquad (5.3'')$$

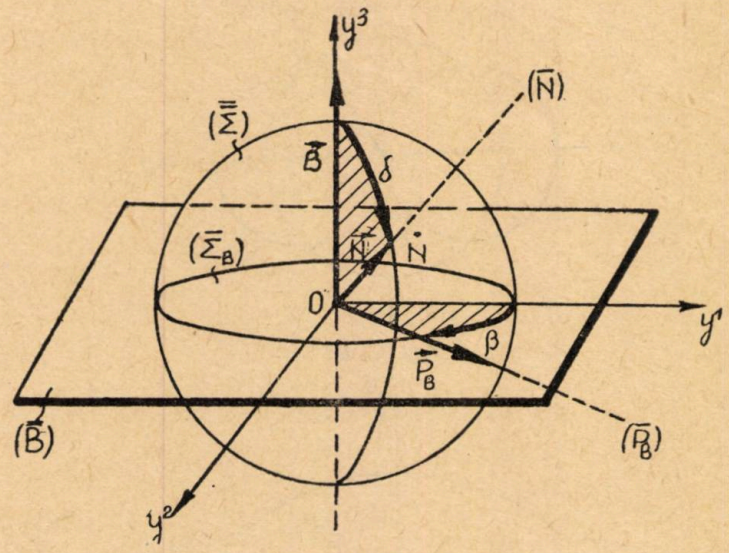


Fig. 5.1

Dar, pentru H_N putem găsi o expresie mai simplă decît (5.3), punînd

$$\left.\begin{aligned} c &= \Gamma \cdot \cos\gamma \\ s &= \Gamma \cdot \sin\gamma \end{aligned}\right\} \qquad (5.3''')$$

de unde rezultă

$$H_N = \sin\delta \cdot \Gamma \cdot \cos(\omega t + \gamma) \qquad (5.4)$$

Expresiile lui Γ şi γ le obţinem din (5.3″) şi (5.3‴) după o serie de calcule în care ţinem seama şi de (4.3):

$$\left.\begin{aligned} \Gamma^2 &= c^2 + s^2 = (e_1)^2 \cdot \cos^2\beta + (e_2)^2 \sin^2\beta, \\ \operatorname{tg}\gamma &= \frac{s}{c} = \operatorname{tg}\varphi_N \cdot \end{aligned}\right\} \qquad (5.4')$$

Vom introduce acum *funcţia caracteristică* $\Lambda_y(\beta, \delta)$ dată printr-una din formulele echivalente

$$\Lambda_y(\beta,\delta) = \left\{ \begin{array}{l} \sin\delta \sqrt{\lambda_1 \cos^2\beta + \lambda_2 \sin^2\beta}, \\ \sin\delta \cdot \sqrt{\dfrac{A^2 - R\cos 2\beta}{2}}. \end{array} \right\} \qquad (5.5)$$

Acum putem scrie expresiile lui H_N , Φ și U în funcție de $\Lambda_y(\beta, \delta)$:

$$\left.\begin{aligned} H_N &= \Lambda_y(\beta, \delta) \cdot \cos(\omega t + \varphi_N), \\ \Phi &= N_C S_C \Lambda_y(\beta, \delta) \cdot \cos(\omega t + \varphi_N), \\ U &= k_u \omega N_C S_C \Lambda_y(\beta, \delta) \cdot \sin(\omega t + \varphi_N), \end{aligned}\right\} \tag{5.6}$$

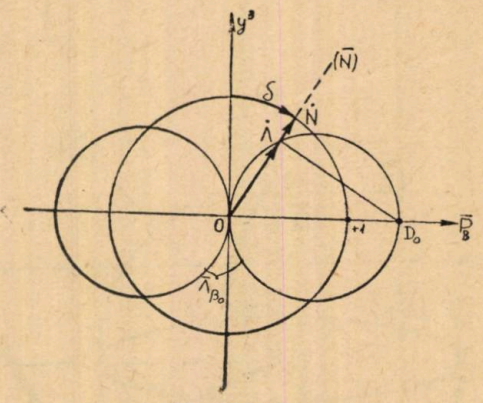


Fig. 5.2 *a*)

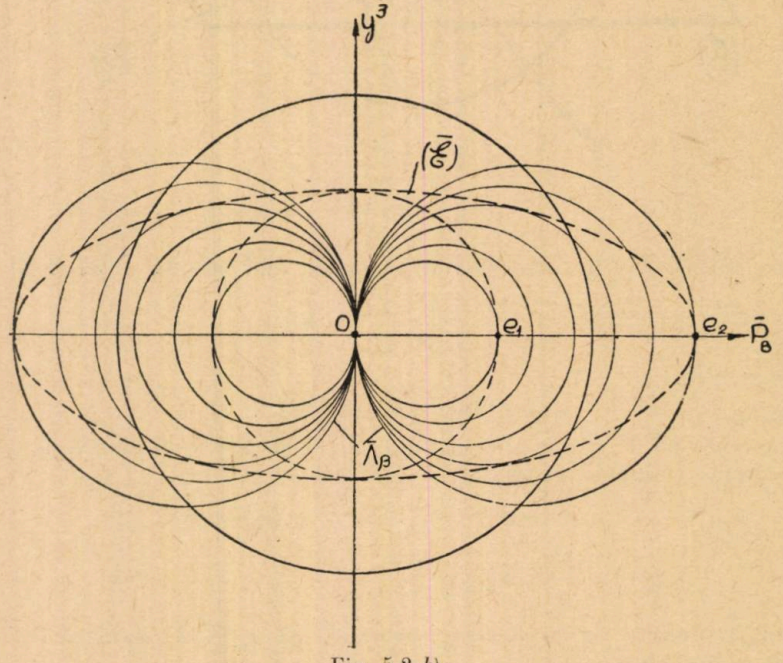


Fig. 5.2 *b*)

5.2. *Variația funcției caracteristice* $\Lambda_y(\beta,\delta)$ *cu orientarea* $\vec{N}$ *a cadrului* (C)

Studiul variației lui Φ și U în raport cu orientarea cadrului revine la studiul variației *funcției caracteristice* $\Lambda_y(\beta, \delta)$ dată de formula (5.5). Să con-

siderăm *vectorul caracteristic* definit prin

$$\vec{\Lambda} = \Lambda_y(\beta, \delta)\frac{\vec{N}}{N}. \tag{5.7}$$

Dacă $\dot{N}$, extremitatea lui $\vec{N}$, descrie sfera unitate $\overline{\overline{\Sigma}}$ atunci extremitatea $\dot{\Lambda}$ a lui $\vec{\Lambda}$ descrie *suprafața caracteristică de recepție* $\overline{\overline{\Lambda}}$ a cadrului (C) relativă la stația O. Aceasta este o *suprafață canal cu secțiunea ecuatorială lemniscata lui Booth.*

Într-adevăr, luînd $\beta = \beta_0 = \text{const.}$, căpătăm ecuația unei *secțiuni meridiane* $\overline{\Lambda}_{\beta_0}$

$$(\overline{\Lambda}_{\beta_0})_y \qquad \Lambda_y(\beta_0, \delta) = \sin\delta \cdot D_0, \tag{5.8}$$

cu

$$D_0^2 = \lambda_1 \cos^2\beta_0 + \lambda_2 \sin^2\beta_0$$

Or, în planul $Oy^3\mathfrak{T}$, ecuația (5.8) reprezintă *o curbă în 8 constituită din 2 cercuri bitangente în O la axa* Oy^3 (fig. 5.2 *a*).

Dacă β_0 parcurge intervalul $(0,2\pi)$, obținem *o familie de caracteristici în 8*, $\overline{\Lambda}_\beta$ avînd diametrul D_0 în intervalul (e_1, e_2) (fig. 5.2 *b*).

Pentru $\delta = \delta_0 = \text{const.}$ căpătăm ecuația unei *secțiuni paralele* $\overline{\Lambda}_{\delta_0}$

$$(\overline{\Lambda}_{\delta_0})_y \qquad \Lambda_y(\beta\,\delta_0) = B_0\sqrt{\lambda_1\cos^2\beta + \lambda_2\sin^2\beta}, \tag{5.9}$$

cu

$$B_0 = \sin\delta_0.$$

În planul Oy^1y^2 ecuația (5.9) reprezintă *o lemniscată Booth de axe* Oy^1, Oy^2 (fig. 5.3 *a*).

Dacă δ_0 parcurge intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, obținem *o familie de lemniscate Booth omocentice* $\overline{\Lambda}_\delta$, avînd semiaxele în intervalele $(0,e_1)$ și $(0,e_2)$ (fig. 5.3 *b*). Studii amănunțitoare privind caracteristica rezultantă pentru două componente ale cîmpului electric, perpendiculare și în cvadratură de fază sînt date de C. A. Heiland [4].

Trecînd în sistemul de coordonate $Oy^1y^2y^3$, ecuația suprafeței caracteristice devine

$$(\overline{\overline{\Lambda}})_y \qquad [(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2]^2 = \lambda_1(y^1)^2 + \lambda_2(y^2)^2. \tag{5.10}$$

Secțiunile principale ale lui $\overline{\overline{\Lambda}}$ în raport cu sistemul $Oy^1y^2y^3$ se obțin făcînd în (5.10) $y^3 = 0$, $vy^3 = 0$, $y^2 = 0$. Căpătăm lemniscata Booth relativă la elipsa de polarizație $\bar{\mathcal{E}}$ (fig. 5.4 *a*) și două curbe în 8 cu axele transverse Oy^2, respectiv Oy^1 (fig. 5.4 *b*, *c*):

$$\left.\begin{aligned}
&(\overline{\Lambda}_{12})_y \qquad [(y^1)^2 + (y^2)^2]^2 = \lambda_1(y^1)^2 + \lambda_2(y^2)^2\\
&(\overline{\Lambda}_{23})_y \qquad [(y^2)^2 + (y^3)^2]^2 = \lambda_2(y^2)^2\\
&(\overline{\Lambda}_{31})_y \qquad [(y^3)^2 + (y^1)^2]^2 = \lambda_1(y^1)^2
\end{aligned}\right\} \tag{5.11}$$

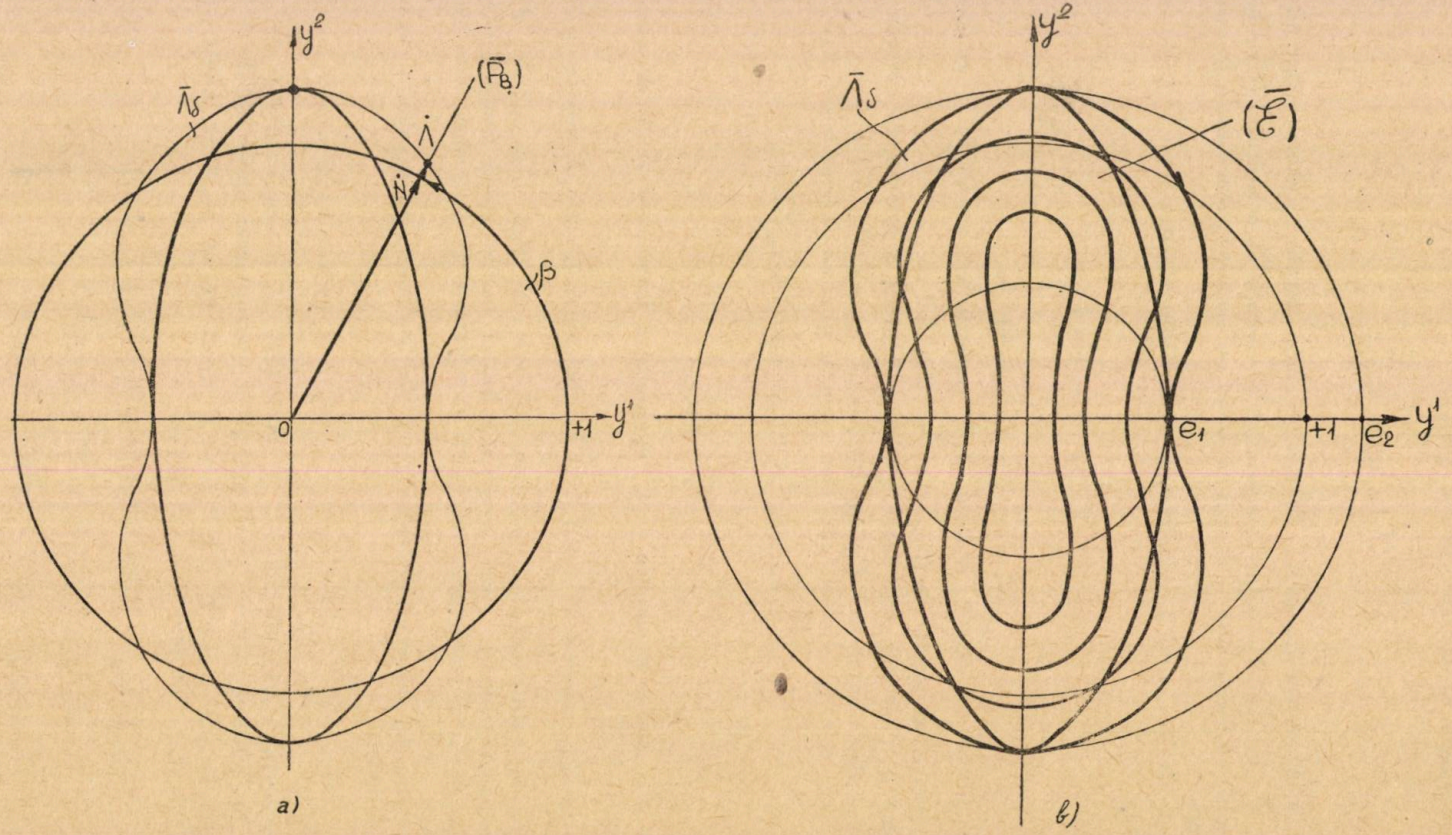

y²
$\bar{\Lambda}_S$
$(\bar{P}_\beta)$
$\dot{\Lambda}$
$\dot{N}$
β
0
+1
y¹
a)
y²
$\bar{\Lambda}_S$
$(\bar{\mathcal{E}})$
e_1
+1
e_2
y¹
b)

Fig. 5.3

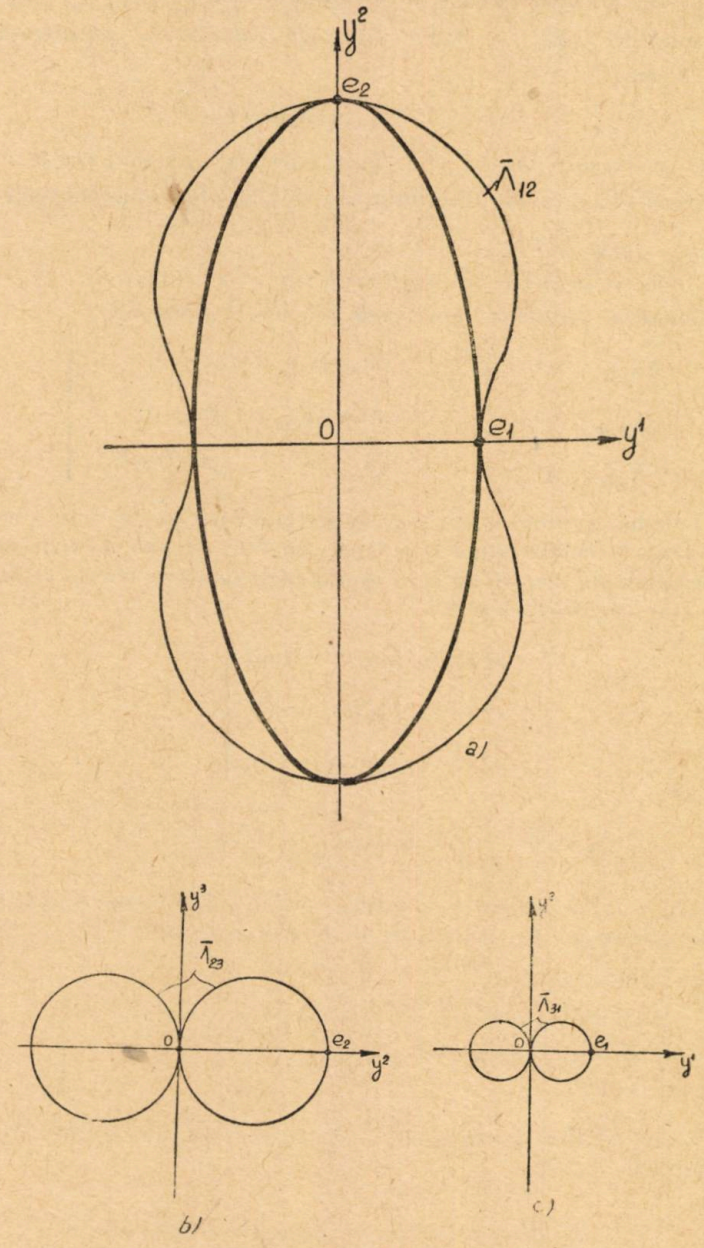


Fig. 5.4

Pentru a găsi ecuația suprafeței caracteristice în sistemul $Ox'x^2x^3$, vom ține seama pe de o parte că $(y_i)^2 \cdot (y^i)^2 \equiv (x_i)^2 \cdot (x^i)^2$, iar pe de altă parte de faptul că ecuațiile (2.21) și (1.26) sînt echivalente și reprezintă aceeași cvadrică $\overline{\overline{Q}}$. Avem

$$\overline{\overline{(\Lambda)}}_x \quad [(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2]^2 = C_{ij}\, x^i\, x^j. \tag{5.12}$$

Direcțiile principale ale lui $\overline{\overline{(\Lambda)}}$ în raport cu sistemul $Ox^1x^2x^3$ prezintă interes, deoarece ele dau amplitudinile $A_1 = \sqrt{C_{ii}}$ ale componentelor cîmpului magnetic $\vec{H}$ pe axele Ox^i $(i = 1, 2, 3)$.

Făcînd succesiv în (5.12) $(x^2 = x^3 = 0)$, $(x^3 = x^1 = 0)$, $(x^1 = x^2 = 0)$, găsim pentru *coordonatele punctelor principale ale lui* $\overline{\overline{\Lambda}}$ *valorile*

$$\left.\begin{array}{llll} (\dot{\Lambda}_1)_x & x^1 = \sqrt{C_{11}} & x^2 = 0 & x^3 = 0, \\ (\dot{\Lambda}_2)_x & x^1 = 0 & x^2 = \sqrt{C_{22}} & x^3 = 0, \\ (\dot{\Lambda}_3)_x & x^1 = 0 & x^2 = 0 & x^3 = \sqrt{C_{33}}. \end{array}\right\} \tag{5.13}$$

Vom exprima acuma ecuația $\overline{\overline{\Lambda}}$ în sistemul de coordonate sferice avînd *axa* Ox^3 ca axă de colatitudine $\theta = 0$ și *axa* Ox^1 ca axă de azimut, $\alpha = 0$. Utilizînd formulele de trecere de la sistemul cartezian $Ox^1x^2x^3$ la sistemul sferic (α, θ), care sînt (conform fig. 1.1)

$$\left.\begin{array}{l} x^1 = \Lambda_x \sin\theta \cdot \cos\alpha, \\ x^2 = \Lambda_x \sin\theta \cdot \sin\alpha, \\ x^3 = \Lambda_x \cos\theta, \end{array}\right\} \tag{5.14}$$

găsim imediat

$$\Lambda_x(\alpha, \theta) = \sqrt{\frac{p(\alpha)\cdot\tau^2 + 2\,q(\alpha)\cdot\tau + r(\alpha)}{1 + \tau^2}}, \tag{5.15}$$

în care prin $\Lambda_x(\alpha, \theta)$ *înțelegem transformata lui* $\Lambda_y(\beta, \delta)$ *cînd trecem la sistemul de coordonate sferice* (α, θ), iar τ, p, q, r *sînt dați de*

$$\left.\begin{array}{l} \tau = \operatorname{tg}\theta \\ p(\alpha) = C_{11}\cos^2\alpha + 2\,C_{12}\sin\alpha\cos\alpha + C_{22}\sin^2\alpha, \\ q(\alpha) = C_{23}\sin\alpha + C_{31}\cos\alpha, \\ r(\alpha) = C_{33}. \end{array}\right\} \tag{5.15'}$$

Dacă facem pe rînd în relația (5.15) $(\alpha, \theta) = (0°, 90°)$, $(90°, 90°)$ și $(\alpha, 0°)$ regăsim formulele (5.13).

5.3. *Studiul geometric al secțiunii ecuatoriale* $\overline{\Lambda}_\delta$

Vom indica, fără dezvoltarea calculelor, cîteva proprietăți caracteristice ale *lemniscatei lui Booth*, care este secțiunea ecuatorială a suprafeței $\overline{\overline{\Lambda}}$.

1) Curba $\overline{\Lambda}_\delta$ reprezentată polar, conform ecuației (5.9) pentru $\delta_0 = 90°$, nu posedă originea printre punctele sale, ceea ce este conform cu aspectul

fizic al fenomenului. În cazul reprezentării carteziene se obține însă o lemniscată Booth cu originea ca punct dublu izolat [5].

2) Curba $\overline{\Lambda}_\delta$ este simetrică în raport cu originea.

3) Curba $\overline{\Lambda}_\delta$ se află cuprinsă în coroana formată de cercurile de rază $\sqrt{e_1 e_1}$ și $\sqrt{e_2 e_2}$ (cercurile principale ale elipsei $\overline{\mathscr{E}}$) și este tangentă exterioară lui $\overline{\mathscr{E}}$, avînd vîrfuri comune.

4) Curba $\overline{\Lambda}_\delta$ admite puncte de inflexiune care se găsesc la intersecția diagonalelor dreptunghiului paralel cu axele Oy^1y^2 și bitangent cercurilor de raze $\sqrt{e_2 e_2}$ și $\sqrt{e_1 e_2}$.

5) Curba $\overline{\Lambda}_\delta$ este podara lui $\overline{\mathscr{E}}$ în raport cu $\dot{O}$.

În ceea ce privește construcția practică a lui $\overline{\Lambda}_\delta$, dăm două procedee de trasare prin puncte, plecînd de la elipsa de polarizație $\overline{\mathscr{E}}$.

Primul procedeu se bazează pe proprietatea 5) și pe următoarea proprietate a elipsei: normala $\overline{N}_M$ într-un punct curent $\dot{M}$ este bisectoarea unghiului format de razele vectoare $\overline{FM}$ și $\overline{F'M}$. De aici rezultă imediat construcția punctului $\dot{L} \in \overline{\Lambda}_\delta$ corespunzător lui $M \in \overline{\mathscr{E}}$. Se construiește normala $\overline{N}_M$ ca bisectoare a unghiului $\widehat{FMF'}$ și apoi se duce tangenta $\overline{T}_M$. Punctul $\dot{L}$ căutat este piciorul perpendicularei coborîte din $\dot{O}$ pe $\overline{T}_M$ (fig. 5.5 *a*).

Al doilea procedeu este cel al generării cisoidale [5] și anume: se construiește cercul $\overline{K}$ cu centrul în punctul median $\dot{K}$ al segmentului focal $\overline{OF}$ și de rază $\frac{e_2}{2}$. O rază vectoare de azimut β determină pe cerc punctele $\dot{P}$ și $\dot{P}'$, la care corespund punctele $\dot{L}$ și $\dot{L}'$ de pe $\overline{\Lambda}_\delta$. Acestea se găsesc luînd $\overline{OL} = \overline{OL'} = \overline{PP'}$ (fig. 5.5 *b*).

5.4. *Variația funcției caracteristice* Λ *cînd* $\vec{N}$ *este supus la legături*

Variația lui Λ, cînd $\vec{N}$ descrie curba $\overline{\Lambda}$, intersecția dintre suprafața caracteristică $\overline{\overline{\Lambda}}$ și conul $\overline{\overline{K}}$ de vîrf $\dot{O}$ și directoare sferică $\overline{\Sigma}$, prezintă interes din punct de vedere experimental.

Vom lua în considerare conurile $\overline{\overline{K}}$ de gradul 1 și 2 și vom utiliza, după caz, sistemele de coordonate carteziene $Ox^1x^2x^3$, $Oy^1y^2y^3$ sau sistemele de coordonate sferice (α, θ), (β, δ).

1. *Conul* $\overline{\overline{K}}^{(1)}$ *de gradul* 1

În acest caz, conul se reduce la un plan care trece prin $\dot{O}$. Directoarea sferică $\overline{\Sigma}$ este un cerc mare, iar cadrul (C) se rotește în jurul unui ax fix (fig. 5.6). Iată ecuațiile axului fix $\overline{J}$ și ecuația planului $\overline{\overline{J}}$ normal la $\overline{J}$ în sistemul de coordonate carteziene $Oz^1z^2z^3$.

$$\left.\begin{aligned} (\overline{J}) \quad & \frac{z^1}{J_{z1}} = \frac{z^2}{J_{z2}} = \frac{z^3}{J_{z3}}, \\ (\overline{\overline{J}}) \quad & J_i^{zi} = 0 . \end{aligned}\right\} \tag{5.16}$$

În coordonate sferice (u, v) avem

$$\left.\begin{aligned} &(\bar{J}) \quad \frac{\cos u}{J_{z1}} = \frac{\sin u}{J_{z2}} = \frac{\operatorname{cotg} v}{J_{z3}}, \\ &(\bar{\bar{J}}) \quad J_{z1}\cos u + J_{z2}\sin u + J_{z3}\operatorname{cotg} v = 0, \end{aligned}\right\} \tag{5.17}$$

în care

$$(u, v, z^i, J_{zi}) = \begin{cases} (\alpha, 0, x^i, J_{xi}), \\ (\beta, \delta, y^i, J_{yi}) \end{cases} \tag{5.17'}$$

Particularizînd formulele de mai sus și ținînd seama de expresiile lui Λ_x și Λ_y, date la (5.15) și (5.5), găsim expresiile lui Λ în coordonatele sferice (α, θ) și (β, δ)

$$\left.\begin{aligned} &\Lambda_x(\alpha) = \sqrt{\frac{J_{x3}^2 p(\alpha) - 2J_{x3}q(\alpha)(J_{x1}\cos\alpha + J_{x2}\sin\alpha) + r(J_{x1}\cos\alpha + J_{x2}\sin\alpha)^2}{(J_{x1}\cos\alpha + J_{x2}\sin\alpha)^2 + J_{x3}^2}} \\ &\text{și} \\ &\operatorname{tg}\theta = \frac{-J_{x3}}{J_{x1}\cos\alpha + J_{x2}\sin\alpha}, \end{aligned}\right\} \tag{5.18}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Lambda_y(\beta) = J_{y3}\sqrt{\frac{\lambda\cos^2\beta + \lambda_2\sin^2\beta}{(J_{y1}\cos\beta + J_{y2}\sin\beta)^2 + J_{y3}^2}}, \\ &\operatorname{tg}\delta = \frac{-J_{y3}}{J_{y1}\cos\beta + J_{y2}\sin\beta}. \end{aligned}\right\} \tag{5.19}$$

Sînt interesante cazurile particulare cînd cadrul (C) se rotește în jurul uneia din axele sistemului de coordonate. În acest caz $\bar{J} \equiv \overline{Ox^i}$ sau $\bar{J} \equiv \overline{Oy^i}$. Pentru sistemul $Ox^1x^2x^3$ găsim

$$\left.\begin{aligned} &\Lambda_x(90°, \theta) = \sqrt{\frac{C_{22}\tau^2 + 2C_{23}\tau + C_{33}}{1+\tau^2}} && \text{pentru } \bar{J} \equiv \overline{Ox^1} \\ &\Lambda_x(0°, \theta) = \sqrt{\frac{C_{11}\tau^2 + 2C_{13}\tau + C_{33}}{1+\tau^2}} && \text{pentru } \bar{J} \equiv \overline{Ox^2} \\ &\Lambda_x(\alpha, 90°) = \sqrt{C_{11}\cos^2\alpha + 2C_{12}\sin\alpha\cos\alpha + C_{22}\sin^2\alpha} && \text{pentru } \bar{J} \equiv \overline{Ox^3} \end{aligned}\right\} \tag{5.20}$$

Pentru sistemul $Oy^1y^2y^3$ găsim una din expresiile

$$\left.\begin{aligned} &\Lambda_y(90°, \delta) = e_2\sin\delta && \text{pentru } \bar{J} \equiv \overline{Oy^1} \\ &\Lambda_y(0°, \delta) = e_1\sin\delta && \text{pentru } \bar{J} \equiv \overline{Oy^2} \\ &\Lambda_y(\beta, 90°) = \sqrt{\lambda_1\cos^2\beta + \lambda_2\sin^2\beta} && \text{pentru } \bar{J} \equiv \overline{Oy^3} \end{aligned}\right\} \tag{5.21}$$

2. *Conul* $\bar{\bar{K}}^{(2)}$ *de gradul* 2

Vom considera cazul $\bar{\Sigma} = \bar{\Sigma}_Q$ și $\bar{\Sigma}_{\mathfrak{S}}$ intersecțiile sferei $\bar{\Sigma}$ cu cilindrii eliptici $\bar{\bar{Q}}$ și $\bar{\bar{\mathfrak{S}}}$ de secțiuni principale în planul Oy^1y^2, $\bar{Q}_B$, $\bar{\mathfrak{S}}_B$. În acest caz, ecuațiile

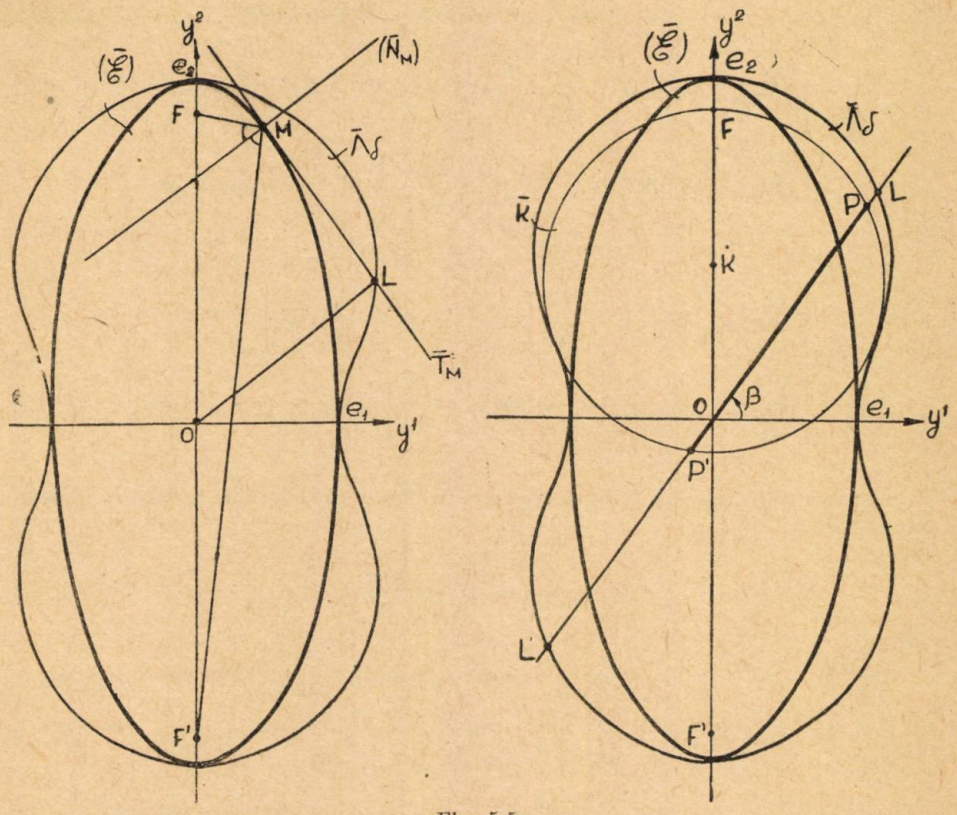

y²
(Ē)
e₂
F
M
(N̄M)
Λ̄ʃ
L
T̄M
e₁
O
y'
F'
y²
(Ē)
e₂
F
Λ̄ʃ
k̄
P
L
k̇
O
β
e₁
y'
P'
L'
F'

Fig. 5.5

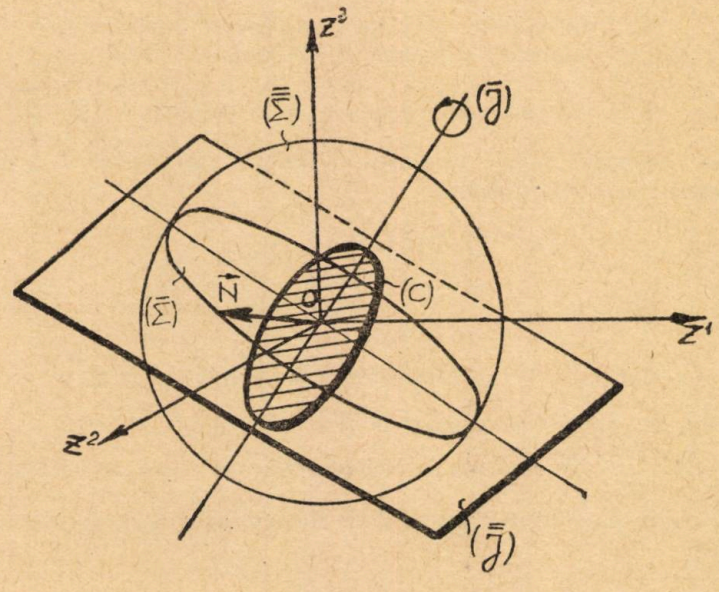

z³
(Σ̄̄)
(ḡ)
(Σ̄)
N̄
O
(C)
Σ¹
z²
(ḡ̄)

Fig. 5.6

conurilor respective sînt, după cum utilizăm sistemul $Ox^1x^2x^3$ sau $Oy^1y^2y^3$

$$(\overline{\overline{K}}_Q)\begin{cases}(\overline{\overline{K}}_Q)_x & C_{ij}x^ix^j - \dfrac{\lambda_0}{N^2}\cdot\left[(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2\right]=0\\ (\overline{\overline{K}}_Q)_y & \lambda_1(y^1)^2+\lambda_2(y^2)^2-\dfrac{\lambda_0}{N^2}\cdot\left[(y^1)^2+(y^2)^2+y^3)^2\right]=0\end{cases} \tag{5.22}$$

și

$$(\overline{\overline{K}}_{\mathcal{E}})\begin{cases}(\overline{\overline{K}}_{\mathcal{E}})_x & \mathcal{E}_{ij}x^ix^j - \dfrac{B^4}{N^2}\left[(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2\right]=0\\ (\overline{\overline{K}}_{\mathcal{E}})_y & \lambda_2(y^1)^2+\lambda_1(y^2)^2-\dfrac{B^2}{N^2}\left[(y^1)^2+(y^2)^2+(y^3)^2\right]=0\end{cases} \tag{5.23}$$

Intersectînd $\overline{\overline{K}}_Q$ cu $\overline{\overline{\Lambda}}$, găsim după o serie de calcule, expresia funcției caracteristice

$$\Lambda_x=\Lambda_y=\frac{\sqrt{\lambda_0}}{N}=\frac{A_N}{N}\,. \tag{5.24}$$

Intersectînd $\overline{\overline{K}}_{\mathcal{E}}$ cu $\overline{\overline{\Lambda}}$ găsim pentru funcția caracteristică expresia

$$\Lambda_y=\frac{B}{N}\sqrt{\frac{\lambda_1\cos^2\beta+\lambda_2\sin^2\beta}{\lambda_2\cos^2\beta+\lambda_1\sin^2\beta}} \tag{5.25}$$

Expresia lui Λ_x este complicată și nu prezintă prea mare interes.

6. Determinarea practică a mărimilor fundamentale asociate cîmpului electromagnetic local

6.1. *Determinarea practică a tensorilor* $\vec{\vec{C}}$ *și* $\vec{\vec{S}}$

Între curenții I induși în cadru și funcția caracteristică Λ există următoarele relații ușor de stabilit:

$$\left.\begin{aligned}I_{xi}&=k_I\Lambda_x\ (\alpha_i,\theta_i),\\ I_{yi}&=k_I\Lambda_y\ (\beta_i,\delta_i),\end{aligned}\right\}\ (i=1,2,3) \tag{6.1}$$

în care

I_{xi}, I_{yi} sînt curenții corespunzători la $\vec{N}\equiv\vec{\xi}^i$ și $\vec{N}\equiv\vec{\eta}^i$,

(α_i,θ_i), (β_i,δ_i) sînt coordonatele sferice ale lui $\vec{N}$,

$k_I=\dfrac{k_u\omega N_C\cdot S_C}{Z_C}$ este un coeficient constant legat de cadru.

Iată acum modalitatea practică de determinare a tensorilor fundamentali $\vec{\vec{C}}$ și $\vec{\vec{S}}$:

1) Se rotește cadrul (C) pînă ce se obține extincție în telefon (fig. 6.1 *a*). În acest caz $\vec{N} \equiv \vec{\eta}^3$, iar orientarea obținută corespunde la $\beta_3 = \beta$ oarecare, $\delta_3 = 0°$ sau $\alpha = \alpha_3$, $\theta = \theta_3$. Avem prin urmare

$$I_{y3} = k_I \Lambda_y (\beta, 0°) = k_I \Lambda_x (\alpha_3, \theta_3) = 0. \tag{6.2}$$

Ținînd seama de ecuațiile axei $\overline{B}$ (1.11), se deduc imediat

$$\left.\begin{aligned} S_{23} &= B \sin \theta_3 \cos \alpha_3, \\ S_{31} &= B \sin \theta_3 \sin \alpha_3, \\ S_{12} &= B \cos \theta_3, \end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

cu B determinat de (6.5).

2) Se rotește cadrul (C) în jurul axului $\overline{B}$ a cărui direcție a fost fixată conform 1) stabilindu-se direcțiile pentru care avem extreme în intensitatea sunetului din telefon (fig. 6.1 *b*). Acestea corespund la

$$\begin{aligned} I_{y1} &= k_I \Lambda_y (0°, 90°) = k_I e_1 \qquad \text{pentru } \vec{N} = \vec{\eta}^1 \\ I_{y2} &= k_I \Lambda_y (90°, 90°) = k_I e_2 \qquad \text{pentru } \vec{N} = \vec{\eta}^2 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Ținînd seama de faptul că $B^2 = \lambda_1 \lambda_2$ și de relația precedentă, rezultă imediat

$$B = \frac{I_{y1} I_{y2}}{k_I^2} \tag{6.5}$$

3) Se orientează cadrul (C) după axele triedrului $Ox^1x^2x^3$ (fig. 6.2). Ținînd seama de (5.15′) găsim

$$\left.\begin{aligned} I_{x1} &= k_I \Lambda_x (0°, 90°) = k_I \sqrt{C_{11}}, \quad \text{pentru } \vec{N} \equiv \vec{\xi}^1, \\ I_{x2} &= k_I \Lambda_x (90°, 90°) = k_I \sqrt{C_{22}}, \quad \text{pentru } \vec{N} \equiv \vec{\xi}^2, \\ I_{x3} &= k_I \Lambda_x (\alpha, 0°) \quad = k_I \sqrt{C_{33}}, \quad \text{pentru } \vec{N} \equiv \vec{\xi}^3, \end{aligned}\right\} \tag{6.6}$$

din care deducem C_{11}, C_{22}, C_{33}.

Determinarea componentelor C_{12}, C_{23}, C_{31} se face ținînd seama de (1.19) (6.3) și

$$\left.\begin{aligned} C_{12} &= \sqrt{C_{11} C_{22} - S_{12}^2}, \\ C_{23} &= \sqrt{C_{22} C_{33} - S_{23}^2}, \\ C_{31} &= \sqrt{C_{33} C_{11} - S_{31}^2}. \end{aligned}\right\} \tag{6.7}$$

Aceste formule dau însă numai valoarea absolută a componentelor C_{ij} $(i \neq j)$ dar nu și semnul acestora.

Pentru determinarea semnului vom studia intensitatea curentului indus I în anumite cazuri speciale.

Dezvoltăm relația (5.15) după puterile lui τ. Pentru $\theta \leqslant 5°$ puterile lui τ devin din ce în ce mai mici și putem scrie

$$\Lambda_x^2(\alpha,\ \theta \leqslant 5°) \approx C_{33} + 2\,(C_{23}\sin\alpha + C_{31}\cos\alpha)\,\tau.$$

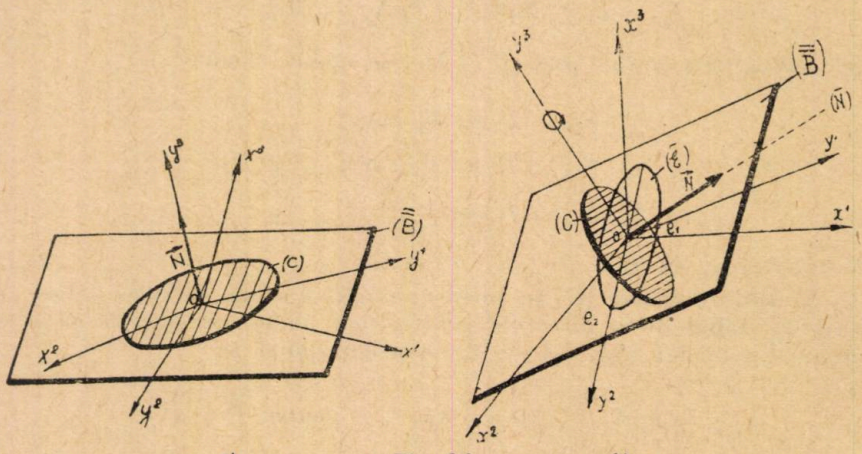


Fig. 6.1

De aici se pot deduce ușor următoarele relații

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sign} C_{31} &= \operatorname{sign}\,[I_x(0°,\ \theta \leqslant 5°) - I_x(180°,\ \theta \leqslant 5°)] \\ \operatorname{sign} C_{23} &= \operatorname{sign}\,[I_x(90°,\ \theta \leqslant 5°) - I_x(270°,\ \theta \leqslant 5°)] \end{aligned}\right\} \tag{6.8}$$

care dau semnul lui C_{31} și C_{23}.

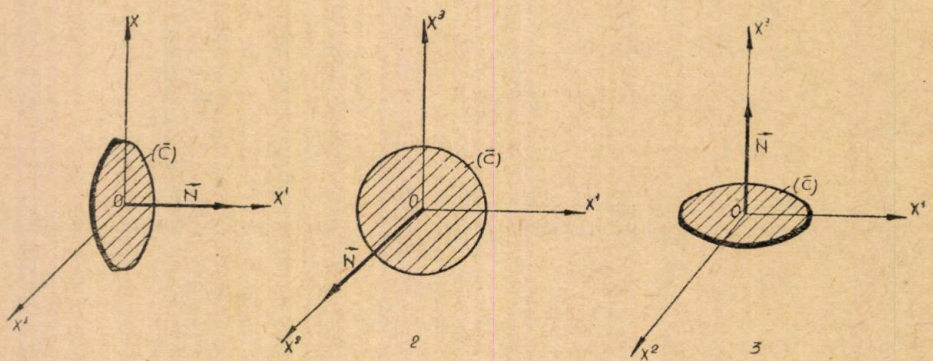


Fig. 6.2

În ceea ce privește semnul lui C_{12}, acesta este dat de

$$\operatorname{sign} C_{12} = \operatorname{sign}\left[I_x^2(45°, 90°) - \frac{1}{2}\cdot(I_{x1}^2 + I_{x2}^2)\right]. \tag{6.9}$$

Componentele C_{ii} sînt esențialmente pozitive. Ca verificare a rezultatelor obținute, trebuie să avem satisfăcută identitatea

$$I_{y1}^2 + I_{y2}^2 + I_{y3}^2 \equiv I_{x1}^2 + I_{x2}^2 + I_{x3}^2 \tag{6.10}$$

4) Fazele inițiale compuse φ_{ij}, se determină prin formulele

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_{12} &= \frac{S_{12}}{C_{12}}, \\ \operatorname{tg} \varphi_{23} &= \frac{S_{23}}{C_{23}}, \\ \operatorname{tg} \varphi_{31} &= \frac{S_{31}}{C_{31}}. \end{aligned}\right\} \tag{6.11}$$

În acest mod, din formulele (6.6), (6.3), (6.5), (6.7), (6.8), și (6.9) determinăm în mod complet tensorii $\vec{C}$ și $\vec{S}$.

Rezultatele de la (6.6), (6.4) și (6.2) le mai putem scrie sub forma matricială astfel:

$$\begin{Vmatrix} I_{x1} & I_{x2} & I_{x3} \\ I_{y1} & I_{y2} & I_{y3} \end{Vmatrix} = k_I \begin{Vmatrix} \sqrt{C_{11}} & \sqrt{C_{22}} & \sqrt{C_{33}} \\ e_1 & e_2 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{6.12}$$

6.2. *Observații asupra determinării practice a vectorilor* $\vec{C}$ *și* $\vec{S}$

Vectorii $\vec{C}$ și $\vec{S}$ sînt complet determinați dacă se cunosc amplitudinile A_i și fazele inițiale φ_i. Or, $A_i = \sqrt{C_{ii}}$ se obțin din (6.6) cu ajutorul formulelor

$$A_i = \frac{I_{xi}}{k_I}. \tag{6.13}$$

Dacă ținem seama de relația (1.14) și căutăm să exprimăm pe D în funcție de φ_{ij} (date de (6.11), atunci una din fazele inițiale φ_α ($\alpha = 1, 2, 3$) se obține din

$$\sin 2(\varphi_\alpha - \varphi^*) = \frac{2D}{A^*}, \tag{6.14}$$

în care

$$\left.\begin{aligned} (A^*)^2 &= \sum_{i,j} C_{ii}\, C_{jj} \cos 2\varphi_{ij}, \\ \operatorname{tg} 2\varphi^* &= \frac{\sum_i C_{ii} \sin 2\varphi_{\alpha i}}{\sum_i C_{ii} \cos 2\varphi_{\alpha i}} \end{aligned}\right\} \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{6.14'}$$

Prin urmare, $\vec{C}$ și $\vec{S}$ depind de C_{ii}, φ_{ij} și D.

Vom enunța acum o propoziție importantă relativ la determinarea lui D:

Nu există valori $(\beta, \delta) = (\beta_D, \delta_D)$ *astfel încît mărimea D să se exprime cu ajutorul lui* $\Lambda_y(\beta_D, \delta_D)$. Aceasta arată din punct de vedere fizic *imposibilitatea determinării lui D numai prin orientări convenabile date cadrului (C).*

Într-adevăr, dacă exprimăm pe Λ și D în funcție de variabilele independente C, S și ψ, condiția necesară și suficientă pentru ca D să se poată exprima cu ajutorul lui Λ, este ca determinanții funcționali de ordinul 2 ai matricei $||\mathfrak{M}||$,

$$||\mathfrak{M}|| = \begin{Vmatrix} \frac{\partial \Lambda_y}{\partial C} & \frac{\partial \Lambda_y}{\partial S} & \frac{\partial \Lambda_y}{\partial \psi} \\ \frac{\partial D}{\partial C} & \frac{\partial D}{\partial S} & \frac{\partial D}{\partial \psi} \end{Vmatrix}, \tag{6.15}$$

să fie identici nuli oricare ar fi β și δ.

Dacă ținem seama de expresiile lui Λ_y și D date de (5.5) (5.2) și (1.14) și efectuăm calculele, obținem condițiile de dependență funcțională

$$\left.\begin{aligned} \sin^2\delta \cdot [R - (C^2 + S^2) \cdot \cos 2\beta] &\equiv 0, \\ \sin^2\delta \cdot [R + (C^2 - S^2) \cdot \cos 2\beta] &\equiv 0, \\ \sin^2\delta \cdot [R - (C^2 - S^2) \cdot \cos 2\beta] &\equiv 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.16}$$

Acest sistem este satisfăcut identic oricare ar fi C și S numai pentru $\delta = 0$ sau π și pentru β oarecare, ceea ce face $\Lambda_y = 0$. Este evident că această soluție nu convine și, prin urmare, nu există valori $\beta = \beta_D$, $\delta = \delta_D$, astfel încît D să se poată exprima cu ajutorul lui $\Lambda_y(\beta_D, \delta_D)$.

Cu toate acestea D rămîne un invariant fizic care nu este legat de orientarea cadrului, ci de aspectul energetic al fenomenului.

6.3. *Determinarea nomografică a f.e.m. de inducție U*

Odată determinate experimental axele elipsei de polarizație $\bar{\mathfrak{E}}$ prin formulele (6.4), putem scrie expresia lui $\bar{\Lambda}$ pentru orice orientare $\vec{N}(\beta, \delta)$ a cadrului. Pentru a obține rapid valorile lui $\Lambda_y(\beta, \delta)$, introducem mărimea $\rho(k_\lambda\,;\,\beta, \delta)$ definită prin

$$\rho(k_\lambda\,;\,\beta, \delta) = \sin\delta\sqrt{1 - k_\lambda \cos 2\beta}. \tag{6.17}$$

Relațiile dintre ρ și Λ, precum și expresia lui k_λ sînt date de

$$\left.\begin{aligned} \rho(k_\lambda\,;\,\beta, \delta) &= \frac{\Lambda_y(\beta, \delta)}{A} \cdot \sqrt{2} \\ k_\lambda &= \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1} = \frac{R}{A^2} \end{aligned}\right\} \tag{6.17'}$$

În acest mod am redus numărul variabilelor de la 5, cîte erau în $\Lambda_\lambda(\beta, \delta)$, la 4, cîte sînt în $\rho(k_\lambda; \beta, \delta)$. Expresia (6.17) se poate nomografia prin puncte aliniate, ea fiind o ecuație de ordinul 4 de nomografiere reductibilă la forma canonică Cauchy.

Schița generală a nomogramei este cea din figura 6.3. Ecuațiile scărilor sînt

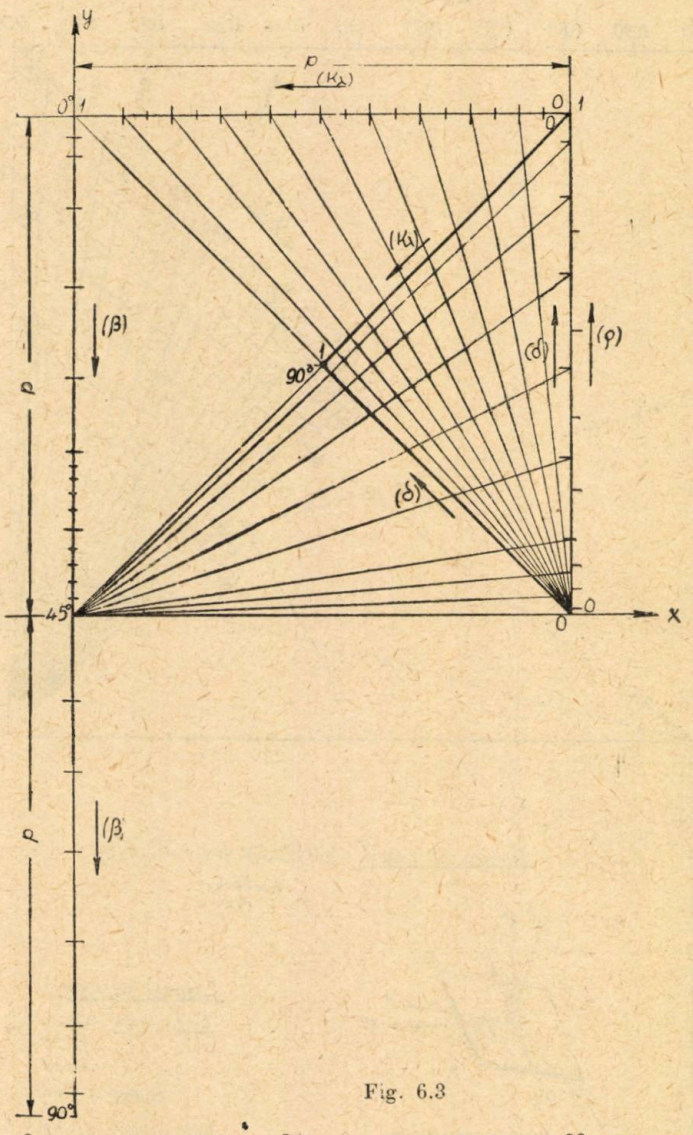


Fig. 6.3

$$
\left.
\begin{array}{lllll}
(\beta) & x = 0, & y = p \cdot \cos 2\beta, & & 0^\circ \leqslant \beta \leqslant 90^\circ, \\
(\rho) & x = p, & y = p\rho^2, & & 0^\circ \leqslant \rho \leqslant 1, \\
(\delta) & x = p, & y = p \sin^2\delta, & z = \dfrac{p \cdot \sqrt{2} \sin^2\delta}{1 + \sin^2\delta}, & 0^\circ \leqslant \delta \leqslant 90^\circ, \\
(k_\lambda) & x = p(1 - k_\lambda), & y = p, & z = \dfrac{p\sqrt{2}k_\lambda}{1 + k_\lambda}, & 0^\circ \leqslant k_\lambda \leqslant 1.
\end{array}
\right\} \quad (6.18)
$$

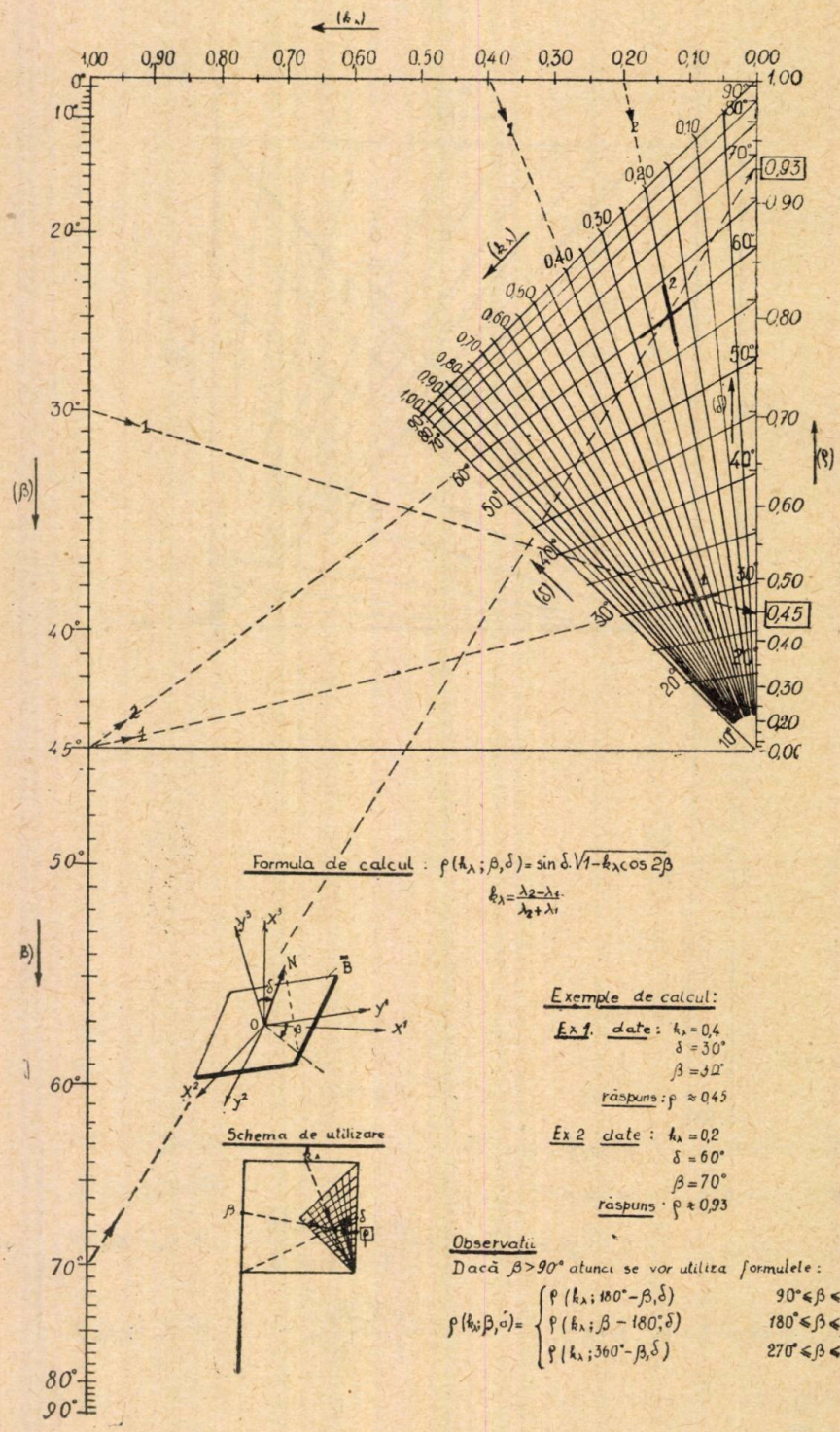

(kλ)
1,00 0,90 0,80 0,70 0,60 0,50 0,40 0,30 0,20 0,10 0,00
(β)
(δ)
(ρ)
0,93
0,45
Formula de calcul : ρ(kλ; β, δ) = sin δ · √(1 − kλ cos 2β)
kλ = (λ2 − λ1)/(λ2 + λ1)
Schema de utilizare
Exemple de calcul:
Ex 1. date: kλ = 0,4
δ = 30°
β = 30°
răspuns: ρ ≈ 0,45
Ex 2 date: kλ = 0,2
δ = 60°
β = 70°
răspuns: ρ ≈ 0,93
Observații
Dacă β > 90° atunci se vor utiliza formulele:
ρ(kλ; β, δ) = { ρ(kλ; 180° − β, δ) 90° ≤ β ≤ 180°
ρ(kλ; β − 180°, δ) 180° ≤ β ≤ 270°
ρ(kλ; 360° − β, δ) 270° ≤ β ≤ 360°

Fig. 6.4

în care x și y sînt coordonatele carteziene ale unui punct curent al scării paralele cu Ox sau Oy; z este ordonata unui punct curent de pe scara oblică; p este un parametru care determină dimensiunile nomogramei.

Dacă $\beta > 90°$, atunci ρ se calculează după formulele

$$\rho(k_\lambda; \beta, \delta) = \begin{cases} \rho(k_\lambda; \beta, \delta) & 0° \leqslant \beta \leqslant 90° \\ \rho(k_\lambda; 180° - \beta, \delta) & 90° \leqslant \beta \leqslant 180° \\ \rho(k_\lambda; \beta - 180°, \delta) & 180° \leqslant \beta \leqslant 270° \\ \rho(k_\lambda; 360° - \beta, \delta) & 270° \leqslant \beta \leqslant 360° \end{cases} \tag{6.19}$$

Figura 6.4 reprezintă nomograma pentru cazul $p = 90$ mm cu două exemple de calcul.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕМЕННОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ МЕТОДОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ РАЗВЕДКИ ТУРАМА

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Целью настоящей работы является определение физико-математических величин, связанных с ориентировкой подвижной рамки вокруг ее центра для применения их к «Критическому исследованию метода электромагнитной разведки Турама». Полученные результаты имеют существенное значение и широкую область применения.

В начале работы автор устанавливает выражения магнитного потока и индуктивной электродвигательной силы U, возникающей в подвижной рамке (C) вокруг ее центра. Определяются затем основные векторы $\vec{C}$ и $\vec{S}$, приданные им величины $\vec{B}$, $\vec{A}$, $\vec{D}$, а также основные тензоры $\vec{\vec{C}}$ и $\vec{\vec{S}}$ с инвариантами I_1 и I_2.

Автор переходит затем к изучению эквифазных плоскости и кривой на сфере N $(\overline{\overline{P}}\ \overline{\overline{\Sigma}}_P)$ и эквиамплитудных квадрики и кривои на сфере N $(\overline{\overline{Q}}, \overline{\overline{\Sigma}}_Q)$, причем устанавливает некоторые физикогеометрические свойства характеризующие явление.

Далее изучается эллипс поляризации $(\overline{\mathcal{E}})$ поля $\vec{H}$ и устанавливаются условия, при которых индукционная электродвигательная сила U аннулируется. Приводятся еще уравнения цилиндра и тензора поляризации.

Если фаза φ_N или амплитуда A_N нормальной составляющей $\vec{H}_N$ поля $\vec{H}$ постоянны, получается сеть кривых на сфере проектирующаяся на площадь поляризации $(\overline{\overline{B}})$ и принимающая вид сети, составленной сходящимися прямыми и концентрическими эллипсами.

Для того чтобы получить выражения для Ф и соответствующей U при данной ориентировке рамки, вводится характеристическая функ-

ция $\Lambda(\beta, \delta)$, в связи с которой рассматривается характеристическая поверхность $\overline{\overline{\Lambda}}$.

Последняя часть работы посвящена практической стороне задачи, причем автор ставит себе целью определить полностью тензоры $\vec{C}$ и $\vec{S}$ и частично векторы $\vec{C}$ и $\vec{S}$ при данных индукционных токах для надлежащей ориентировки рамки. Полное определение векторов $\vec{C}$ и $\vec{S}$ зависит от инварианта D, который не может быть определен только путем вращения рамки. В конце работы приведена номограмма с расположенными в ряд точками, дающая возможность найти характеристическую функцию $\Lambda(\beta, \delta)$, когда известны ориентировка рамы и оси поляризации.

INTRODUCTION À L'ÉTUDE DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE ALTERNATIF DANS LA MÉTHODE DE PROSPECTION TURAM

(RÉSUMÉ)

Le but de ce Mémoire est de déterminer les grandeurs physico-mathématiques reliées à l'orientation d'un cadre mobile autour de son centre, en vue de l'application à l'« Etude critique de la méthode de prospection électromagnétique Turam ». Les résultats obtenus possèdent une valeur intrinsèque et ont un large champ d'application.

L'Auteur établit d'abord les expressions du flux magnétique et de la f.e.m. d'induction U qui prend naissance dans un cadre (C) mobile autour de son centre. On définit ensuite les vecteurs fondamentaux $\vec{C}$ et $\vec{S}$, leurs grandeurs associées $\vec{B}$, $\vec{A}$, D, ainsi que les tenseurs fondamentaux $\vec{\vec{C}}$ et $\vec{\vec{S}}$ avec les invariants I_1 et I_2.

On étudie le plan et la sphérique équiphase $N(\overline{\overline{P}}, \overline{\Sigma}_P)$ ainsi que la quadrique et la sphérique équiamplitude $N(\overline{\overline{Q}}, \overline{\Sigma}_Q)$ et l'on établit certaines propriétés physico-géométriques caractéristiques de ce phénomène.

L'Auteur étudie ensuite l'ellipse de polarisation $(\overline{\mathcal{E}})$ du champ $\vec{H}$ et établit les conditions d'annulation de la f.e.m. d'induction U. On présente encore les équations du cylindre et du tenseur de polarisation.

Si la phase φ_N ou l'amplitude A_N de la composante normale $\vec{H}_N$ du champ $\vec{H}$ sont constantes, on obtient un réseau de sphériques qui se projette sur le plan de polarisation $(\overline{\overline{B}})$ d'après un réseau formé de droites concurrentes et d'ellipses concentriques.

Pour obtenir les expressions de Φ et U correspondantes à une orientation donnée du cadre, on introduit la fonction caractéristique $\overline{\overline{\Lambda}}(\beta, \delta)$. Relativement à cette fonction, on étudie la surface caractéristique $\overline{\overline{\Lambda}}$.

La dernière partie du Mémoire est consacrée à l'aspect pratique du problème et on y étudie la détermination totale des tenseurs $\vec{\vec{C}}$ et $\vec{\vec{S}}$ et partielle

pour les vecteurs $\vec{C}$ et $\vec{S}$, connaissant les courants d'induction pour des orientations convenables du cadre. La détermination complète des vecteurs $\vec{C}$ et $\vec{S}$ est fonction de l'invariant D qui ne peut être obtenu uniquement par rotation du cadre. A la fin du Mémoire on présente un nomogramme aux points alignés, permettant la connaisance de la fonction caractéristique Λ (β, δ), l'orientation du cadre et les axes de polarisation étant connues.

BIBLIOGRAFIE

1. * * * *Manualul inginerului de mine.* Ed. tehnică, București, 1952, vol. II, partea a X-a, p. 123.
2. H. Hedstrom, *Phase Measurements in Electrical Prospecting AIME.* Geophysical Prospecting Tech. Pub. 827, 1937.
3. T. P. Ghițulescu, M. Socolescu și S. S. Ștefănescu, *Le champ magnétique de l'émetteur rectiligne alternatif de grande longueur.* Anuarul Institutului geologic al Romîniei, 1931, vol. 16.
4. C. A. Heiland, *Geophysical Exploration.* Prentice-Hall, 1946, p. 687.
5. I. Creangă, Gh. Gheorghiev, A. Haimovici, M. Haimovici, O. Mayer, I. Popa și M. Roth, *Curs de geometrie analitică.* Ed. tehnică, București, 1951, p. 465.

STUDII ȘI CERCETĂRI DE FIZICĂ
Tomul VI, nr. 2, 1955

O METODĂ DE INDUCȚIE PENTRU MĂSURAREA INTENSITĂȚII CÎMPULUI MAGNETIC*)

DE

M. NACHMAN și A. GEORGESCU

Metodele cele mai folosite azi pentru măsurarea intensității unui cîmp magnetic constant (sau care variază încet în timp) se bazează pe fenomenul inducției electromagnetice [1].

Printr-un mijloc oarecare se obține o variație a fluxului magnetic care străbate un anumit circuit și se măsoară curentul electric (respectiv produsul dintre curent și durata variației fluxului) care apare în circuit datorită forței electromotoare induse. Din valoarea curentului indus se deduce valoarea inducției magnetice (deci a intensității cîmpului magnetic, dacă permeabilitatea mediului este cunoscută).

Astfel, în metoda măsurării cîmpului magnetic cu ajutorul unei bobine sondă și a unui galvanometru balistic [1] (sau a unui fluxmetru) pentru producerea unui flux magnetic variabil într-o bobină, aceasta este smulsă din cîmp (sau rotită cu 180° în cîmp, sau, dacă este posibil bobina rămîne fixă și se schimbă sensul cîmpului). Sarcina totală indusă, adică produsul dintre intensitatea curentului indus și durata variației fluxului magnetic prin bobină, este măsurat cu ajutorul unui galvanometru balistic sau al unui fluxmetru (pe care se citește direct valoarea fluxului magnetic care străbate bobina).

Această metodă prezintă marele neajuns că nu se poate urmări continuu cum variază cîmpul magnetic. Acest neajuns nu mai apare la cealaltă metodă de inducție [2], larg folosită azi, la care rotirea bobinei în cîmp se face cu ajutorul unui motor sincron. Curentul indus fiind un curent variabil periodic, poate fi amplificat ușor și măsurat apoi cu un instrument de măsură de sensibilitate mică. În felul acesta se poate urmări continuu variația cîmpului magnetic (cu condiția ca aceasta să nu fie prea rapidă).

Cele două metode prezintă însă unele dezavantaje. Cum am mai spus, cu bobina sondă și cu fluxmetrul nu se poate urmări continuu variația cîmpului magnetic. Ea permite măsurarea cîmpului numai din cînd în cînd. Metoda cu bobina rotită de un motor sincron permite măsurarea continuă a cîmpurilor magnetice (începînd de la inducții magnetice de ordinul gauss-ului), dar prezintă marele dezavantaj (indicat chiar de autorul metodei [2]) că nu pot fi

*) Lucrare prezentată Institutului de fizică la data de 31 octombrie 1954.

măsurate cîmpuri decît în întrefieruri destul de mari, deoarece volumul necesar pentru a permite mișcarea bobinei rotitoare nu poate fi redus sub anumite limite.

Pe de altă parte, deși teoretic sensibilitatea celor două metode poate fi făcută oricît de mare, mărind fie numărul spirelor bobinei, fie aria delimitată de spire*), totuși orice creștere a sensibilității este legată de mărimea volumului ocupat de bobină, deci de necesitatea măririi regiunii de uniformitate a cîmpului de măsurat.

Nu insistăm aici asupra celorlalte metode de măsură a cîmpurilor [1], ca de exemplu metoda care se bazează pe variația rezistenței electrice cu cîmpul

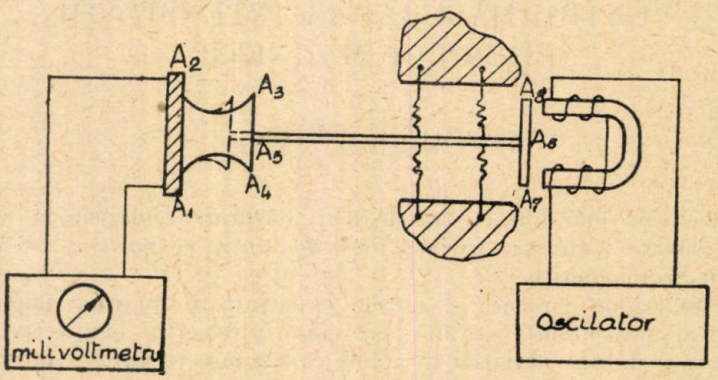


Fig. 1

magnetic al unei spirale de bismut, cea care se bazează pe înălțarea unui lichid paramagnetic într-un vas capilar, cea care se bazează pe efectul Hall și cea care se bazează pe acțiunea cîmpului asupra unui conductor străbătut de un curent electric etc., care toate sînt fie mai puțin sensibile, fie mult mai incomode ca metoda de inducție.

Metoda folosită de noi este o metodă de inducție și prezintă deci toate avantajele metodelor de inducție (proporționalitatea forței electromotoare induse cu variația în timp a fluxului inducției magnetice, lipsa de inerție a fenomenului de inducție, neinfluențarea cîmpului magnetic de măsurat de către dispozitivul de măsură, independența de temperatura mediului ambiant); ea permite măsurarea continuă a cîmpului magnetic fără să prezinte dezavantajul de a necesita un volum mare pentru dispozitivul care se introduce în cîmpul magnetic.

1. *Principiul metodei.* Metoda se bazează pe ideea că se poate obține un flux magnetic variabil printr-un circuit nu numai prin schimbarea poziției circuitului în cîmpul magnetic constant dat, ci și variind printr-un mijloc oarecare *aria* circuitului, menținut de altfel într-o poziție fixă în cîmpul magnetic dat.

Fie un cîmp magnetic uniform, constant, de inducție $\vec{B}$, a cărui intensitate trebuie determinată (fig. 1).

*) În cazul bobinei rotite de motorul sincron, numărul de turații nu poate fi făcut oricît de mare.

În cîmpul $\vec{B}$ (normal la planul figurii) se introduce spira plană S, perpendiculară pe $\vec{B}$. Spira S (de forma indicată în fig. 1) are o porțiune rigidă și fixă $A_1\ A_2$, confecționată dintr-un material izolant și porțiunile A_1, A_4, $A_2\ A_3$ confecționate dintr-un fir de material conductor, elastic, neferomagnetic; porțiunile $A_1\ A_4$ și $A_2\ A_3$ sînt sudate în A_4 și A_3 de un fir rigid, mai gros, care este fixat de o tijă $A_5\ A_6$, capătul căreia este sudat de o lamă rigidă feromagnetică $A_7\ A_8$ de magnetism remanent neglijabil (fig. 1). Această lamă este pusă în stare de vibrație cu ajutorul unui electromagnet E alimentat de la un generator de oscilații. Lama $A_7\ A_8$ vibrînd, porțiunea $A_3\ A_4$ vibrează și ea apropiindu-se și depărtîndu-se de $A_1\ A_2$.

În felul acesta suprafața spirei variază și în spiră este indusă o forță electromotoare de inducție,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}, \tag{1}$$

datorită variației fluxului inducției magnetice Φ prin spiră. Forța electromotoare, variind periodic, poate fi amplificată și măsurată ușor. Din relația (1) se vede imediat că, dacă variația suprafeței spirei se produce mereu în același mod, $\mathcal{E}$ este proporțional cu B, căci din $\Phi = B\,S$ (cîmpul este presupus uniform și constant) rezultă

$$\mathcal{E} = -B\frac{dS}{dt}, \tag{2}$$

adică valoarea maximă a forței electromotoare induse este dată de relația

$$\mathcal{E}_{max} = C\,B\,, \tag{2'}$$

unde C este o constantă care depinde de unități, de frecvența ν a vibrațiilor porțiunii mobile $A_3\ A_4$ a spirei și de valoarea variației maxime ΔS_{max} a ariei spirei

$$C = K\,\nu\,\Delta\,S_{max}\,, \tag{2''}$$

factorul k depinzînd de unitățile alese.

2. *Sensibilitatea metodei.* Cum rezultă din relația (2'), sensibilitatea metode depinde de mărimea constantei C. Se știe că tensiunile alternative minime care pot fi măsurate sînt de ordinul a 10^{-6} volt. Pe de altă parte, se poate realiza ușor un dispozitiv de variație care să ducă la o variație cu aproximativ 10% a ariei unei spire de 1 cm^2, cu o frecvență de 100 oscilații pe secundă. Deci, dacă tensiunea este dată în volți și inducția magnetică în gauss constanta C va fi egală cu

$$C = \frac{1}{10^7}\ \text{volt/gauss}. \tag{3}$$

În aceste condiții se pot măsura inducții magnetice începînd de la

$$B = \frac{\mathcal{E}}{C} = 10\ \text{gauss}. \tag{4}$$

Bineînțeles că mărind frecvența și păstrînd amplitudinea oscilațiilor neschimbată, se poate mări sensibilitatea metodei.

3. *Avantajele metodei.* Metoda prezintă următoarele avantaje importante:

a) Permite măsurarea continuă a cîmpului magnetic.

b) Dispozitivul care trebuie introdus în cîmp, spira de suprafață variabilă, nu ocupă decît un spațiu foarte mic, putîndu-se măsura cîmpuri în întrefieruri de ordinul milimetrului și chiar mai înguste (în funcție de diametrul firului din care este confecționată spira de suprafață variabilă și de diametrul tijei).

În cîmpuri mai intense, aria spirei poate fi micșorată mult (nefiind necesară o sensibilitate foarte mare), ceea ce duce la posibilitatea determinării cîmpurilor intense neuniforme.

c) Dispozitivul nu influențează cîmpul magnetic de măsurat, părțile feromagnetice anexe ale dispozitivului putînd fi plasate la distanțe suficient de mari de regiunea studiată (lungind $A_5\ A_6$).

d) Măsurătorile nu sînt afectate de nici un fenomen de inerție, variațiile cîmpului ducînd instantaneu la variații ale forței electromotoare induse.

e) Datorită proporționalității între $\mathcal{E}$ și B pentru etalonarea dispozitivului (determinarea constantei C) este suficientă teoretic, o singură măsurătoare într-un cîmp cunoscut.

f) Construcția dispozitivului este foarte simplă.

4. *Rezultatele experimentale.* Determinările experimentale au fost făcute cu o spiră cu dimensiunile date în figura 2, la care porțiunile elastice $A_1\ A_4$ și $A_2\ A_3$ erau făcute din wolfram de $\varnothing = 0{,}15$ mm. Amplitudinea oscilațiilor

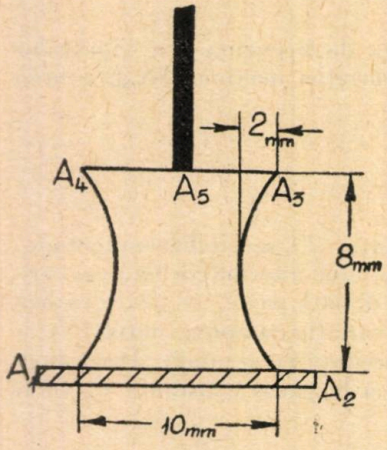


Fig. 2

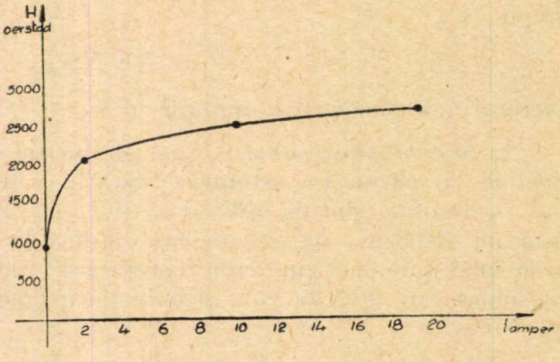


Fig. 3

porțiunii $A_3\ A_4$ era de aproximativ 2 mm, iar frecvența vibrațiilor era de 100 Hz. Forța electromotoare indusă măsurată cu un voltmetru electronic era de $\mathcal{E} = 1$ m V pentru un cîmp de 2 500 Oe (măsurat cu o bobină sondă și un fluxmetru).

În figura 3 este dată curba dependenței de intensitatea curentului magnetizant a cîmpului magnetic între polii cilindrici ai unui electromagnet; curba a fost trasată prin metoda spirei de suprafață variabilă; pentru control această curbă a fost trasată cu ajutorul unei bobine sondă și a unui fluxmetru. Rezultatele obținute prin cele două metode sînt în bună concordanță între ele.

ИНДУКЦИОННЫЙ МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ НАПРЯЖЕННОСТИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Описан индукционный метод измерения напряженности постоянного или медленно изменяющегося во времени магнитного поля. В постоянное магнитное поле помещается рамка, площадь которой периодически изменяется, что вызывает появление переменного магнитного потока.

Возникающая в рамке переменная э. д. с. усиливается и измеряется при помощи лампового вольтметра.

Метод имеет то преимущество, что позволяет измерять поля в очень узких зазорах и непрерывно следить за изменениями поля.

UNE MÉTHODE D'INDUCTION POUR MESURER L'INTENSITÉ DU CHAMP MAGNÉTIQUE

(RÉSUMÉ)

Les Auteurs décrivent une méthode d'induction pour mesurer l'intensité des champs magnétiques constants ou aux variations lentes dans le temps.

Un flux magnétique variable est obtenu au moyen d'une spire, introduite dans le champ magnétique constant, en faisant varier périodiquement l'aire de la spire. Une f.e.m. alternative apparaît dans la spire, f.e.m. amplifiée, puis mesurée à l'aide d'un voltmètre électrique.

Cette méthode présente l'avantage de permettre de mesurer des champs dans des entrefers très réduits et de pouvoir suivre d'une manière continue la variation du champ.

BIBLIOGRAFIE

1. F. Kohlrausch, Pratkische Physik, Teubner, Lipsca, 1953, vol 2.
2. L. I. Baida, N. S. Dobrotvorski, D. L. Orșanski, S. N. Pcelinskaia, N. N. Razumovski, E. A. Svirski, A. V. Fremke, *Curs general de măsuri electrice*. Ed. energetică de stat, București, 1953.
3. D. C. Chapin, *A sensitive magnetometre for very small areas*. Rev. Sc. Instr., 1949, t. 20, p. 945.
4. P. Weinzierl, *A new method for the measurement of inhomogeneans magnetic fields*. Rev. Sc. Instr., 1950, t. 21, p. 492.
5. A. Kohaut, *Ein Messgerät für magnetische Felder*. Zeitschr. f. techn. Phys., 1937, t. 18, p. 198.

STUDII ȘI CERCETĂRI DE FIZICĂ
Tomul VI, nr. 2, 1955

UN NOU ASPECT AL MIȘCĂRILOR PARTICULELOR *)

DE

MARIUS BORNEAS și ERVIN KALMAN

1. Comportarea atît corpusculară, cît și ondulatoare, a electronului a condus, după lungi discuții, la concepția dualistă că electronul este și corpuscul și undă, admițîndu-se că e vorba de o undă de probabilitate [1] și [2]. Această interpretare a undei-electron nu este chiar atît de limpede, după cum putem deduce din amplele discuții ce au loc între oamenii de știință**). În ultimă analiză, aspectul ondulator al electronului este admis pe baza experiențelor de difracție și a succeselor mecanicii ondulatorii. Să analizăm cele două probleme.

Să considerăm trecerea electronilor printr-o fantă îngustă. Dacă trece un număr mare de electroni, se obțin franje de difracție, fie dacă electronii trec deodată, fie dacă trec izolați unul după altul. Dar dacă trimitem un singur electron, sau cîțiva, nu se obțin franje ci puncte, urmele electronilor izolați [2]. Această experiență nu ne spune că electronul este undă, ci că probabilitatea este ondulatoare. Socotim mult mai justificat să presupunem că electronul este corpuscul, iar în momentul în care trece prin fantă primește un impuls suplimentar, datorită unei cauze variabile după o anumită lege. Acest fapt atrage după sine ajungerea electronului pe paravan în diferite puncte, cu probabilități diferite, deci în cazul unui număr mare de electroni, formarea franjelor.

În literatura științifică problema înlăturării statisticii cuantice se pune sub următoarea formă: « Un microfenomen individual poate fi realizat în diferite moduri. Mecanica cuantică dă numai probabilitatea realizării unei posibilități sau a alteia. Nu se pot găsi mărimi (« parametri ascunși ») a căror cunoaștere ar permite să prevedem în mod univoc fiecare microfenomen individual? » [3]. La această întrebare, N e u m a n n și R e i c h e n b a c h răspund negativ. B l o h i n ț e v afirmă că posibilitatea existenței « parametrilor ascunși » nu poate fi nici acceptată, nici respinsă *a priori*. « Sensul lor fizic posibil este caracteristica numerică a macrocondițiilor asupra microfenomenului individual » [3]. Considerăm că formularea de mai sus a problemei înlăturării statisticii cuantice, care de altfel se vede că momentan nu duce la nici un rezultat [4], este esențial insuficientă.

---

*) Lucrare prezentată Institutului de fizică la data de 1 noiembrie 1954.

**) De pildă problema ansamblurilor cuantice și discuția ei între B l o h i n ț e v și F o c k.

Ipoteza noastră este că *electronul e corpuscul, iar aspectul ondulator al comportării lui se datorește influenței vidului.* Așa dar, nu cauze macroscopice sînt acelea care conduc direct la comportarea incertă a electronilor, ci manifestări microscopice ale vidului. Cauzele macroscopice pot influența doar indirect, prin intermediul vidului, de aceea comportarea electronului apare ca ondulatoare. Este mult mai natural să admitem că vidul are anumite proprietăți ondulatoare, decît că particula este și undă.

Faptul că vidul nu este un simplu gol, ci este un mediu *(vacuum)* cu anumite proprietăți, este astăzi arătat de electrodinamica cuantică și teoria particulelor elementare. Teoria modernă nu este însă completă în această privință, nedescriind just unele probleme și neclarificînd legătura între diferite cîmpuri de vid [1], [3] și [5]. Putem să admitem o astfel de complexitate a vacuumului, încît influența lui să fie mai multilaterală decît cea recunoscută pînă acum și să atribuim pe socoteala unei acțiuni a acestuia aspectul de undă al electronilor. Pentru simplificarea limbajului, să numim acțiunea vidului ce conduce la comportarea ondulatoare a electronilor, cîmp 0.

Fenomenul de difracție a electronilor se poate atunci explica prin distorsionarea cîmpului 0 de către dispozitivul de difracție, ceea ce dă naștere la impulsul transversal amintit. Faptul că forma franjelor de difracție este determinată de întreaga rețea cristalină, se explică ușor prin aceea că rețeaua cristalină în întregime influențează zona respectivă a cîmpului 0.

Să vedem acum problema valorii mecanicii ondulatorii, referindu-ne la întrebarea dacă succesele ei sînt un argument valid în sprijinul dualității corpuscul-undă. La prima vedere se pare că da, deoarece este clădită pe această bază și conduce la excelente rezultate, confirmate în largă măsură de experiență. Dar dacă analizăm mai profund chestiunea, ne dăm seama că, admițînd că comportarea probabilistă e cauzată de cîmpul 0, mecanica cuantică ne dă posibilitatea să tragem concluzii asupra naturii ondulatoare nu a particulelor, ci a cîmpului 0. Mecanica ondulatoare trebuie să fie un mijloc provizoriu de descriere a mișcării microparticulelor, mai ales în ansamblul lor. Ar trebui să se construiască o mecanică cuantică corpusculară, care să conducă la mecanica ondulatoare, dacă se ia în considerare probabilitatea de mișcare a microparticulelor-corpuscule.

2. Să încercăm în cele ce urmează, situîndu-ne într-un caz particular, să arătăm că poate exista și un răspuns corpuscular la problema mișcării electronilor. Vom schița cîteva puncte de pornire, într-o aproximație nerelativistă, neglijînd spinul și pentru energii mici, unde nu apar transformări de particule, studiind mișcarea liberă.

Pentru studierea mișcării electronilor vom lua ca bază principiul variațional al acțiunii

$$\delta \mathcal{A} = \delta \int_{\alpha}^{\beta} L \, dt = 0 , \tag{1}$$

unde L reprezintă un lagrangean, care urmează a fi determinat. Condițiile pe care trebuie să le îndeplinească acest lagrangean, trebuie justificate prin anumite considerații fizice și prin faptul de a nu intra în contrazicere cu experiența. Acest lucru îl putem realiza prin intermediul mecanicii cuantice care conduce la rezultate probabilistic juste, deci lagrangeanul nostru trebuie să fie în concordanță cu ecuațiile mecanicii cuantice.

Considerațiile fizice sînt următoarele. Presupunem că energia cinetică a electronului e formată din energia de translație și o energie cinetică datorită cîmpului 0. Cîmpul 0 acționează asupra electronului astfel că lui i se datorește un surplus la parametrii ce ar descrie mișcarea de translație, deci, cu alte cuvinte, un surplus de viteză generalizată, ceea ce raportat la unitatea de timp reprezintă o accelerație generalizată. Reciproc, electronul va acționa asupra cîmpului 0, existînd astfel o influență bilaterală. Deoarece nu putem exprima cîmpul 0 printr-o funcție independentă de starea particulei, acțiunea lui nu va intra în expresia energiei de poziție, ci trebuie să o regăsim în forma energiei de mișcare. De asemenea, prezența corpurilor străine deformează cîmpul 0, deci influența lui se modifică substanțial. Urmează că energia de mișcare trebuie să aibă o formă în care, la o cotă de energie de translație să se adune energia cinetică datorită cîmpului 0. Acest termen trebuie să fie proporțional: întîi cu contribuția procentuală datorită vidului liber, care în baza considerațiilor anterioare se exprimă în funcție de accelerația generalizată; al doilea cu contribuția procentuală datorită deformației cîmpului 0 prin prezența unor corpuri străine.

În concluzie, forma lagrangeanului va fi următoarea:

$$L, (q_K, \dot{q}_K, \ddot{q}_K, t) = \left(1 - \frac{h}{\varkappa}\right) T + a\, h \left(\frac{\tau}{T}\right)\left(h \frac{D}{T}\right) - U(q_K, t), \qquad (2)$$

T este energia cinetică de translație,
τ — contribuția cîmpului 0 liber,
D — contribuția deformației cîmpului 0,
U — funcția de forță, sau energia potențială cînd nu depinde de timp,
$\varkappa$ — o constantă, care depinde de măsura în care energia cinetică se manifestă în formă clasică; în fenomenele cuantice vor alege pentru $\varkappa$ o valoare apropiată de h, astfel că termenul întîi din lagrangean e neglijabil;
a — o constantă ce urmează a se determina.

Pentru τ am ales forma obișnuită a energiei cinetice, dar înlocuind viteza prin accelerație, ceea ce este în spiritul considerațiilor anterioare.

D ia valoarea 1, în lipsa unei deformații a cîmpului 0, datorită corpurilor străine.

3. Să aflăm ecuațiile de mișcare în general. Variația primă a lui $\mathcal{A}$ ne dă

$$\delta\mathcal{A} = \varepsilon \int_\alpha^\beta \left(\sum_K \eta_K \frac{\partial L}{\partial q_K} + \sum_K \dot{\eta}_K \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_K} + \sum_K \ddot{\eta}_K \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_K} \right) \mathrm{d}t, \qquad (3)$$

unde ε este un coeficient arbitrar oricît de mic dorim, iar η_K reprezintă trei funcții regulate într-un interval și care se anulează pentru $t = \alpha$ și $t = \beta$. Făcînd cîteva integrări prin părți în relația (3), se elimină $\dot{\eta}_K$ și $\ddot{\eta}_K$ și obținem

$$\delta\mathcal{A} = \varepsilon \int_\alpha^\beta \sum_K \eta_K \left[\frac{\partial L}{\partial q_K} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_K}\right) + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_K}\right) \right] \mathrm{d}t. \qquad (4)$$

În baza condiției (1) urmează că ecuațiile de mișcare sînt

$$\frac{\partial L}{\partial q_K} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_K}\right) + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_K}\right) = 0. \qquad (5)$$

Să calculăm acum derivata în raport cu timpul a funcţiei L

$$\frac{dL}{dt} = \sum \frac{\partial L}{\partial q_K} \dot{q}_K + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_K} \ddot{q}_K + \sum \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_K} \dddot{q}_K . \tag{6}$$

Prin transformări simple ajungem la expresia

$$\frac{dL}{dt} = \sum_K \frac{\partial L}{\partial q_K} \dot{q}_K - \sum_K \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_K}\right) \dot{q}_K + \sum_K \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_K}\right) \dot{q}_K +$$

$$+ \sum_K \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_K} \dot{q}_K\right) + \sum_K \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_K}\right) \ddot{q}_K - \sum_K \frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_K}\right) \dot{q}_K\right]. \tag{7}$$

Ţinînd seama de (5) rămîne

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_K \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_K} \dot{q}_K\right) + \sum_K \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_K} \ddot{q}_K\right) - \sum_K \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_K}\right) \dot{q}_K\right] - L\right\} = 0 . \tag{8}$$

Mărimea din paranteză se vede că este o mărime constantă a mişcării de dimensiunile energiei, deci o putem considera funcţia de energie sau hamiltoniană. Avem aşadar

$$H \equiv \sum_K \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_K} \dot{q}_K\right) + \sum_K \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_K} \ddot{q}_K\right) - \sum_K \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_K}\right) \dot{q}_K\right] - L . \tag{9}$$

Dacă U nu depinde de timp şi reprezintă energia potenţială, H reprezintă tocmai energia totală, deci

$$H = E \tag{10}$$

4. Să studiem acum mişcarea unei particule «libere», adică $U = 0$. Ţinînd seama de cele observate la punctul 2, obţinem pentru lagrangean, după simplificări, expresia

$$L = 2a \frac{h^2}{m} \ddot{x}^2 \dot{x}^{-4} . \tag{11}$$

Introducînd pe L în (5), obţinem ecuaţia de mişcare în acest caz

$$4a \frac{h^2}{m} \dddot{x} \ddot{x} \dot{x}^{-4} - 32a \frac{h^2}{m} \dddot{x} \ddot{x} \dot{x}^{-5} + 40\, a \frac{h^2}{m} \ddot{x}^3 \dot{x}^{-6} = 0 , \tag{12}$$

sau mai simplu

$$\dddot{x} \dot{x}^{-4} - 8 \ddot{x} \ddot{x} \dot{x}^{-5} + 10 \ddot{x}^3 \dot{x}^{-6} = 0 . \tag{12'}$$

Rezolvînd această ecuație primim pe rînd următoarele soluții

$$\dot{x} = \infty, \tag{13}$$

$$\dot{x} = c_1, \; x = c_1 t + c_2, \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned} t + t_0 &= c_4^{-1}\left[\frac{c_5\sqrt{2x + c_5^2}}{\dot{x}} + \ln\frac{\sqrt{2\dot{x} + c_5^2} - c_5}{\sqrt{2\dot{x} + c_5^2} + c^5}\right], \\ x + x_0 &= c_4^{-1} c_5^{-1} \ln\frac{\sqrt{2\dot{x} + c_5^2} - c_5}{\sqrt{2\dot{x} + c_5^2} + c_5}, \end{aligned}\right\}$$

sau (15)

$$\left.\begin{aligned} t + t_0 &= c_4^{-1}\left[\frac{c_5\sqrt{2\dot{x} - c_5^2}}{\dot{x}} + 2 \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2\dot{x} - c_5^2} - c_5}{c_5}\right], \\ x + x_0 &= 2 c_4^{-1} c_5^{-1} \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2\dot{x} - c_5^2}}{c_5}, \end{aligned}\right\}$$

notînd $c_5 = \pm\sqrt{|c_3|}$.

Soluțiile (15) reprezintă ecuațiile parametrice ale timpului și spațiului. Soluția (14) concordă cu soluția clasică a mișcării. Soluția (13) reprezintă niște salturi discontinue *. Semnificația soluțiilor (15) este deocamdată îndoielnică.

Să scriem acum funcția hamiltoniană pentru cazul dat

$$H \equiv -4a\frac{\hbar^2}{m}\dddot{x}\,\dot{x}^{-3} + 10a\frac{\hbar^2}{m}\ddot{x}^2\dot{x}^{-4} = E. \tag{16}$$

Făcînd unele transformări, se ajunge la următoarea expresie pentru energie

$$-4a\frac{\hbar^2}{m}\dot{x}^{-1}\frac{\mathrm{d}^2\dot{x}}{\mathrm{d}x^2} + 6a\frac{\hbar^2}{m}\ddot{x}^2\left(\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x}\right)^2 = E. \tag{16'}$$

Considerînd că probabilitatea de poziție a particulei într-un interval $\mathrm{d}x$ este proporțională cu timpul $\mathrm{d}t$ corespunzător, putem scrie

$$w(x)\,\mathrm{d}x = b\,\mathrm{d}t = b\frac{\mathrm{d}x}{v} = b\frac{\mathrm{d}x}{\dot{x}},$$

b fiind o constantă oarecare, de unde

$$w(x) = b\,\dot{x}^{-1}.$$

Mai facem notația

$$\sqrt{w(x)} = s,$$

deci avem

$$s^2 = b\,\dot{x}^{-1}, \; s = b^{\frac{1}{2}}\dot{x}^{\frac{1}{2}}.$$

*) Faptul că particula «saltă» în timp infinit scurt dintr-o poziție într-alta, ar fi în concordanță cu ipoteza «lungimii minime» introdusă în unele teorii moderne.

Să facem înlocuirea

$$\dot{x} = bs^{-2},$$

în ecuația energiei. Obținem după cîteva transformări și calcule

$$8a\frac{\hbar^2}{m}s^{-1}\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}x^2} = E,$$

sau

$$16a\frac{\hbar^2}{m}\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}x^2} = ES.$$

Dacă avem $a = -\frac{1}{16}$, aceasta este tocmai ecuația lui Schrödinger pentru mișcarea liberă, ținînd seama că s^2 este probabilitatea de poziție, deci are aceeași semnificație ca și $(\psi)^2$.

Se observă deci, că rezultatele satisfac condiția de a fi probabilistic conform cu mecanica ondulatorie.

5. În continuare, să cercetăm « oscilatorul armonic ». Pentru aceasta în expresia unidimensională a lagrangeanului punem

$$U = \frac{m\omega^2}{2}x^2.$$

Funcția hamiltoniană va fi atunci

$$H = \frac{1}{4}\frac{\hbar^2}{m}\dddot{x}\dot{x}^{-3} - \frac{5}{8}\frac{\hbar^2}{m}\ddot{x}^2\dot{x}^{-4} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 = E.$$

După unele transformări ajungem la

$$\frac{1}{4}\frac{\hbar^2}{m}\dot{x}^{-1}\frac{\mathrm{d}^2\dot{x}}{\mathrm{d}x^2} - \frac{3}{8}\frac{\hbar^2}{m}\dot{x}^2\left(\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \frac{m\omega^2}{2}x^2 = E.$$

Ținînd seama de expresia probabilității

$$w = k\rho^{-1} = k\dot{x}^{-1},$$

cu notația

$$s = \sqrt{w},$$

obținem

$$-\frac{1}{2}\frac{\hbar^2}{m}s^{-1}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x^2} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 = E,$$

sau

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}x^2} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 s = ES,$$

adică ecuația lui Schrödinger. Urmează că se ajunge la toate rezultatele mecanicii ondulatorii.

Să vedem la ce rezultate se ajunge în plus, pornind de la ecuația de mișcare corpusculară (5).

Făcînd înlocuirile respective, scriem ecuația

$$-\frac{1}{4}\frac{\hbar^2}{m}\dddot{x}\,\dot{x}^{-4}+2\frac{\hbar^2}{m}\ddot{x}\,\ddot{x}\,\dot{x}^{-5}-\frac{5}{2}\frac{\hbar^2}{m}\ddot{x}^3\,\dot{x}^{-6}=m\omega^2 x. \tag{17}$$

Făcînd notația

$$B=\frac{4\,m^2\,\omega^2}{\hbar^2},$$

avem

$$\dddot{x}\,\dot{x}^{-4}-8\,\ddot{x}\,\ddot{x}\,\dot{x}^{-5}+10\,\ddot{x}^3\,\dot{x}^{-6}=-Bx. \tag{17'}$$

Rezolvînd această ecuație în etape, cu ajutorul seriilor, obținem în cele din urmă

$$t+t_0=\int\frac{\mathrm{d}x}{e^{\alpha-1}+\alpha_0\frac{x}{1}+\alpha_1\frac{x^2}{2}+\ldots+\alpha_n\frac{x^{n+1}}{n+1}},$$

$\alpha-1$, α_0 și α_1 fiind constante arbitrare, iar ceilalți coeficienți determinați în funcție de α_0, α_1 și B.

Avînd în vedere că valorile lui x sînt foarte mici, păstrăm numai primii doi termeni ai seriei, deci scriem

$$t+t_0=\int e^{-\alpha-1-\alpha_0 x}\,\mathrm{d}x,$$

integrală care ne dă

$$t+t_0=-\frac{e^{-\alpha-1}}{\alpha_0}e^{-\alpha_0 x}.$$

Făcînd notațiile

$$-\frac{e^{-\alpha-1}}{\alpha_0}=\rho\,e^{i\varphi}\ \text{și}\ -\alpha_0=i\,\Omega,$$

putem scrie

$$t+t_0=\rho\,e^{i(\Omega x+\varphi)}.$$

Această expresie se poate pune sub forma

$$x=M\,e^{i(\gamma+2\nu\pi)}$$

cu notaţiile

$$M = \frac{1}{\Omega}\sqrt{(2\lambda\pi = \varphi)^2 + \left(\ln\frac{t+t_0}{\rho}\right)^2},$$

$$\operatorname{tg}\gamma = -\frac{1}{2\lambda\pi - \varphi}\ln\frac{t+t_0}{\rho}.$$

Putem deci asimila mişcarea particulei cu o oscilaţie, dar ea e foarte complicată şi nu corespunde cu mişcarea unui oscilator armonic în înţelesul clasic. Analiza ei urmează a se face.

НОВЫЙ АСПЕКТ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Рассматривая вопрос о двойственности частица-волна, проявляющейся в опытах над явлениями диффракции, и достижения волновой механики, основанной на этой гипотезе, авторы в настоящей работе утверждают, что предположение о существовании двойственности частица-электрон ведет к тем же результатам, принимая во внимание влияние некоего поля пустоты.

Рассматривая этот новый аспект, под которым представляется движение частиц, авторы настоящей работы исходят из некоторых соображений физического характера и затем устанавливают на основании этих соображений квантовый лагранжиан. При помощи этого квантового лагранжиана выводятся уравнения движения, исходящие из принципа минимального действия. Они применяются к «свободному» движению частицы, а также к «гармоническому осциллятору». Авторы указывают также, что функция Гамильтона, выведенная из установленного лагранжиана приводит, в вышеуказанных случаях, к уравнению Шрёдингера.

UN NOUVEL ASPECT DU MOUVEMENT DES PARTICULES

(RÉSUMÉ)

Le problème de la dualité corpuscule-onde, manifestée par l'expérience de deffraction,et les succès de la mécanique ondulatoire basée sur cette hypothèse, mènent les Auteurs de ce travail à affirmer qu'en tenant compte de l'influence d'un certain champ de vide, la supposition de l'électron-corpuscule conduit aux mêmes résultats.

Pour traiter ce nouvel aspect du mouvement des particules, les Auteurs prennent pour point de départ certaines considérations physiques et s'en servent pour établir un lagrangien quantique. A l'aide de ce lagrangien quantique, les équations du mouvement sont déduites du principe de l'action minime. Elles s'appliquent au mouvement « libre » de la particule, ainsi qu'à « l'oscillateur

harmonique ». Les Auteurs montrent également que la fonction de Hamilton déduite du lagrangien établi mêne, dans les cas cités, à l'équation de Schrödinger.

BIBLIOGRAFIE

1. E. N. Spolski, *Fizica atomică*. Ed. tehnică, București, 1952—1953
2. D. I. Blohințev, *Bazele mecanicii cuantice*. Ed. tehnică, București, 1954.
3. — *Critica concepțiilor filozofice ale așa numitei școli de la Copenhaga în fizică*. Izd. Akad. Nauk. SSSR, 1952 (caiet de traduceri al Academiei R.P.R., Inst. de st. rom.-sov.).
4. — *Otvet akademiku V. A. Foku*. Voprosî filozofii, 1952, nr. 6.
5. A. Sokolov i D. Ivanenko, *Kvantovaia teoriia polea*. Gosizdat teoreticescoi teknicescoi literaturî, Moscova-Leningrad, 1952.
6. I. P. Terleţki, *Voprosî razvitiia kvantovoi teorii*. Voprosî filozofii, 1952, nr. 5.
7. G. K. Suslov, *Mecanica rațională*. Ed. tehnică, București, 1950.

STUDII DE CERCETĂRI DE FIZICĂ
Tomul VI, nr. 2, 1955

CARACTERIZAREA OPTICĂ A AEROSOLULUI ATMOSFERIC*)

DE

MIRCEA IIEROVANU

Difuzia luminii în aerosolul atmosferic ridică două probleme principale. Prima constă în căutarea expresiei exacte a legii de difuzie, iar cea de a doua în caracterizarea aerosolului prin mărimi deduse din măsurarea extincției radiației solare directe sau a radiației difuzate. În ceea ce privește prima problemă, se admite că difuzia în aerosolul atmosferic este exprimată, în mod satisfăcător, prin legea lui Mie. Cît privește problema a doua, este necesar ca legea de difuzie să fie astfel exprimată, încît din măsurători actinometrice să se poată deduce mărimi care să exprime concentrația suspensiilor și ordinul lor de mărime. Aceasta este problema de care ne-am ocupat într-o lucrare anterioară [1] și pe care o reluăm în cele ce urmează.

1. *Legea lui Ångström.* După legea lui Bouguer, densitatea de flux a radiației solare de lungime de undă λ este dată de

$$I_{\lambda M} = I_{\lambda 0}\, e^{-A_\lambda M}, \tag{1}$$

unde $I_{\lambda 0}$ este densitatea de flux a radiației la limita superioară a atmosferei, M masa atmosferică, iar A_λ coeficientul de extincție exprimat de suma

$$A_\lambda = a_{1\lambda} + a_{2\lambda}. \tag{2}$$

Prin $a_{1\lambda}$ și $a_{2\lambda}$ s-au notat, respectiv, coeficientul de extincție moleculară a aerului pur și uscat, dat de legea lui Rayleigh, respectiv coeficientul de extincție în aerosol.

După Ångström

$$a_{2\lambda} = \beta\lambda^{-\alpha}, \tag{3}$$

unde β, coeficientul de extincție la $\lambda = 1$, dă o măsură a concentrației particulelor aerosolului, iar α este un exponent care ar depinde numai de ordinul de mărime al particulelor.

Pe de altă parte, după Mie, extincția în aerosol ar trebui exprimată prin

$$a_{2\lambda} = \pi\, n\, r^2\, K(\delta,\ m), \tag{4}$$

*) Lucrare prezentată Institutului de fizică la data de 18 decembrie 1954.

n fiind numărul de particule de rază r și indice de refracție m, cuprinse în unitatea de volum. Prin δ s-a notat

$$\delta = 2\pi \frac{r}{\lambda}. \tag{5}$$

K reprezintă raportul dintre coeficientul de extincție al unei particule difuzante și secțiunea particulei. Acest K a fost calculat de diferiți autori pentru diferite valori ale lui δ și ale indicelui de refracție.

Expresia (3) are un caracter mai curînd empiric, pe cîtă vreme (4) este teoretic întemeiată. Din compararea lui (3) cu (4) se vede că α trebuie să depindă nu numai de r ci și de λ.

Excluzînd cazul particulelor de pîclă și al nucleelor de condensare mai mici de 0,1 μ (acestea din urmă fără acțiune optică apreciabilă asupra radiațiilor solare), particulele aerosolului sînt formate din nuclee-picături, adică din picături de soluții de săruri în apă. Picăturile cu acțiune optică apreciabilă au indici de refracție mai mici decît 2. Or, după cum a arătat v a n d e H u l s t [2], în acest caz, pentru o valoare dată a indicelui de refracție m, funcția K se poate exprima prin

$$K(\delta, m) = \frac{m-1}{\frac{4}{3}-1} K\left(\delta, \frac{4}{3}\right), \tag{6}$$

sau

$$K(\delta, m) = 3(m-1) K\left(\delta, \frac{4}{3}\right), \tag{7}$$

$K(\delta, 4/3)$ fiind valoarea funcției K pentru apa pură ($m = 4/3$). Suprimînd, pentru simplificare, pe $4/3$ din expresia lui K, vom putea scrie deci în locul lui (4),

$$a_{2\lambda} = 3\pi (m-1) n r^2 K(\delta). \tag{8}$$

Plecînd de la valorile funcției $K(\delta)$ obținute de S t r a t t o n și H o u g h t o n pentru picături de apă pură, F o i t z i k a calculat valorile corespunzătoare ale lui α. Folosind aceste valori, am arătat că în domeniul $0 \leqslant \frac{r}{\lambda} \leqslant 1,6$, α poate fi exprimat printr-o funcție liniară de $\frac{r}{\lambda}$. Cum în situațiile atmosferice obișnuite, caracterizate prin lipsa norilor, ceței și pîclei pe drumul razelor solare, particulele optic active se situează în acest domeniu, urmează ca expresia lui Ångström poate căpăta o formă nouă, în acord cu cea a lui Mie. În realitate, dacă se ține seama de modul în care a fost calculat α, se constată că prin exprimarea lui α printr-o funcție liniară de $\frac{r}{\lambda}$, β pierde înțelesul său inițial. Pentru aceste motive, am adoptat următoarea cale.

După definiția sa, β este coeficientul de extincție la $\lambda = 1$. Prin urmare, corespunzător lui (8) și (5),

$$\beta = 3\pi (m-1) r^2 n K\left(2\pi \frac{r}{1}\right). \tag{9}$$

Atunci, pentru ca (3) să fie identic cu (8) este necesar ca

$$\lambda^{-\alpha} = \frac{K\left(2\pi \frac{r}{\lambda}\right)}{K\left(2\pi \frac{r}{1}\right)}. \tag{10}$$

Obținem astfel o nouă exprimare a lui (8) în forma (3) sau, este totuna, o nouă caracterizare a mărimilor β și α din expresia lui Ångström. Lucrul are o importanță practică fiindcă pornind de la valori cunoscute ale lui $a_{2\lambda}$, avem posibilitatea să determinăm grafic pe α și implicit pe r. Într-adevăr, relația (3) în formă logaritmică,

$$\log a_{2\lambda} = \log \beta - \alpha \log \lambda, \tag{11}$$

exprimă în sistemul de coordonate [log $a_{2\lambda}$, logλ] o curbă, iar panta tangentei dusă la abscisa log λ măsoară pe α corespunzător acestui λ. Atunci, cunoscînd pe $K\left(2\pi \frac{r}{\lambda}\right)$ și avînd tabelat pe α din (10) în funcție de r și λ, putem mai întîi afla pe r, apoi pe β și, în sfîrșit, din (9), pe n.

Trebuie remarcat faptul că, grație relației (7) a lui van de Hulst, nu este necesar să cunoaștem indicele de refracție pentru a putea determina pe r și că prezența acestui indice în expresia lui β, ca necunoscută chiar, nu constituie propriu-zis un inconvenient. După toate probabilitățile, m variază puțin și deci influența lui asupra variațiilor lui n este neglijabilă.

Toate aceste lucruri arată că, pierzînd înțelesul său inițial, expresia lui Ångström ar putea deveni o simplă formă în care o expresie dată pentru extincția prin difuzie, poate fi folosită cu mai multă ușurință.

2. *Aerosolul atmosferic.* Expresiile arătate mai înainte nu sînt riguros valabile decît pentru un aerosol format din particule de aceeași rază. Or, aerosolul atmosferic este departe de a satisface această condiție. După clasificația lui Chr. Junge [3], particulele care îl formează se împart în:

a) nuclee Aitken, de rază mai mică de 0,1 μ (ioni mijlocii, ioni Langevin, parte din ionii foarte mari);

b) nuclee mari, cu raza cuprinsă între 0,1 μ și 1 μ (ioni foarte mari și în general nuclee-picături);

c) particule foarte mari, cu rază mai mare de 1 μ (picături de ceață, particule de pîclă).

Tot după Junge, nucleele Aitken, deși cele mai numeroase, reprezintă o parte neînsemnată din volumul total al aerosolului. După cum am mai spus, din punct de vedere optic, singurele care contează sînt particulele cu $r > 0{,}1\ \mu$ și în condiții normale pînă la aproximativ $r = 1\ \mu$, fiindcă, prin numărul lor foarte redus, particulele mari au o acțiune optică neglijabilă.

Mai trebuie menționat că, după G. Zanotelli [4], particulele cuprinse între 0,1λ și 10λ (λ fiind lungimea de undă a radiației considerate) exercită o absorbție neglijabilă. Or, majoritatea covîrșitoare a particulelor aerosolului se situează între aceste limite.

Revenind la dificultatea semnalată mai înainte, cu privire la faptul că aerosolul atmosferic este format din particule de raze diferite, trebuie arătat că în studiul cețelor naturale și artificiale relația (4), în care r are înțelesul

unei raze medii, a dus la rezultatele valabile. Aceasta arată că expresia (8), în oricare din formele arătate la punctul precedent, ar putea fi aplicată și aerosolului. Atît numai că r care s-ar determina pe această cale, n-ar putea fi considerat ca o rază mijlocie. După J u n g e, în condiții normale, particulele cu $r = 0{,}05\ \mu$ sînt cele mai numeroase. Dar acestea nu au o acțiune optică sensibilă. Raza obținută în felul arătat s-ar raporta atunci numai la particule optic active, corespunzător eficacității și numărului lor.

Dacă voim să ținem seama de spectrul dimensional al picăturilor aerosolului, este necesar să pornim de la legea de distribuție a dimensiunilor

$$n = n(r) \tag{12}$$

și să luăm în locul lui (8) pe

$$a_{2\lambda} = 3\,\pi\,(m-1)\int_{r_0}^{r} r^2\,k\,(\delta)\,dn(r), \tag{13}$$

unde r_0 reprezintă raza cea mai mică, iar r raza cea mai mare, existentă la un moment dat și hotărîtă de dimensiunea inițială a nucleului și umiditatea relativă a aerului.

Folosind un material de observație foarte bogat și notînd cu C un număr care depinde de conținutul total de particule din unitatea de volum, J u n g e [5] a găsit că legea de distribuție a dimensiunilor în aerosolul atmosferic este dată de

$$\frac{dn}{d\log r}\cdot r^3 = C'. \tag{14}$$

Legea este valabilă numai pentru nucleele mari și foarte mari (clasificația arătată mai înainte). De curînd, legea lui Junge, stabilită din observații făcute pe continentul european, a fost regăsită de A. H. W o o d c o c k [6] pentru America.

După cum arată J u n g e, legea este valabilă pentru valori medii. În cazuri singulare pot apare abateri apreciabile, mai ales prin producerea proceselor de condensare a vaporilor. Totuși, în spațiul fără nori și ceață, în care influența perturbatoare a formării norilor nu intervine, distribuția după mărime a particulelor de rază mai mare de $0{,}1\ \mu$, dată de (14), rămîne o caracteristică a aerosolului atmosferic.

În aceste condiții și admițînd că numărul de particule pe cm^3 descreşte în înălțime după o aceeași lege exponențială oricare ar fi valoarea razei, legea (14) va fi valabilă nu numai într-o regiune dată a atmosferei, ci și pentru întregul parcurs al razelor solare. Să scriem atunci pe (14) în forma

$$dn = 0{,}434\ C\,r^{-4}\,dr. \tag{15}$$

Cu aceasta, (13) devine

$$a_{2\lambda} = 1{,}302\ (m-1)\,\pi\,C\int_{r_0}^{r} r^{-2}\,k\,(\delta)\,dr, \tag{16}$$

sau ținînd seama de (5)

$$a_{2\lambda} = 2{,}604\,(m-1)\,\pi^2\,C\lambda^{-1}\int_{\delta_0}^{\delta}\delta^{-2}\,k\,(\delta)\,d\,\delta. \tag{17}$$

Evident, integrala din membrul al doilea este o mărime care prin δ depinde de r_0 și r, adică de limitele spectrului dimensional în situația atmosferică dată. Cu toate acestea, într-o lucrare recentă, K. B u l l r i c h [7] execută integrarea asupra tuturor razelor posibile și obține o valoare firește constantă, independentă de situația atmosferică. În cele din urmă, el obține o expresie care, corespunzător lui (17), se scrie

$$a_{2\lambda} = 2{,}604\ (m-1)\ \pi^2 c\ I\ \lambda^{-1}. \tag{18}$$

I fiind, aici, valoarea constantă a integralei din (17). Totodată, B u l l r i c h amintește de unele cercetări din care ar rezulta că într-adevăr coeficientul de extincție al aerosolului este de forma (18) sau, este totuna, de forma (3) în care $\alpha = 1{,}0$. El amintește de asemenea, de cercetările mai vechi ale lui Å n g s t r ö m, după care $\alpha = 1{,}3$.

De fapt, așa cum am mai amintit [1], observațiile actinometrice arată, în mod neîndoios, că α nu este o mărime constantă și că ea variază între anumite limite, după condițiile atmosferice momentane. Prin urmare, calculul integralei din (17) trebuie făcut nu pentru toate razele ci numai pînă la raza maximă caracteristică momentului observației. Cu această precizare relația (17) devine echivalentă expresiei (8) pentru cazul cînd se ia în considerare legea de distribuție a dimensiunilor particulelor în funcție de rază.

În sfîrșit, mai avem de observat că pentru limita inferioară a razei ar trebui să luăm $r = 0{,}1\ \mu$, valoare pînă la care se aplică legea lui Junge. În realitate, integrarea se poate face de la $r = 0$ (și deci $\delta = 0$), fiindcă particulele de rază $\leqslant 0{,}1\ \mu$ dau în totalitatea lor o extincție practic neglijabilă.

Notînd

$$A = \int_0^{\delta} \delta^{-2} K(\delta)\, d\delta \tag{19}$$

și revenind la expresia lui Ångström vom avea, ca și în cazul precedent

$$\beta = 2{,}604\ (m-1)\ \pi^2 C A\left(2\pi \frac{r}{1}\right) \tag{20}$$

și

$$\lambda^{-\alpha} = \frac{\lambda^{-1} A\left(2\pi \dfrac{r}{\lambda}\right)}{A\left(2\pi \dfrac{r}{1}\right)} \tag{21}$$

3. *Calculul lui* α. Cu ajutorul expresiilor (10) și (21) am calculat exponentul de mărime α, din expresia lui Ångström, în funcție de λ și r, corespunzător expresiei lui Mie (ρ și λ în microni).

În acest scop, am folosit valorile lui K recalculate recent de H. G. H o u g h t o n și W. R. C h a l k e r [8] pentru picături de apă pură ($m = 4/3$). Valorile lui K au fost înscrise grafic în funcție de δ. Curba astfel obținută, a fost netezită de fluctuațiile care apar dincolo de $\delta = 10$. Cu valorile citite pe această curbă și introduse în expresia (10), am obținut valorile din tabloul nr. 1.

Tabloul nr. 1

Exponentul de mărime α în funcție de r și λ pentru cazul cînd particulele aerosolului sînt de aceeași mărime

r \ λ	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	1,2	1,5	2,0	2,5	3,0
0,2	2,2	2,4	2,6	2,8	2,9	3,0	3,2	3,4	3,6	3,7	3,8
0,3	1,6	1,9	2,1	2,3	2,4	2,5	2,7	2,9	3,0	3,2	3,3
0,4	0,8	1,3	1,6	1,8	1,9	2,0	2,2	2,4	2,7	2,8	2,9
0,5	0,0	0,6	1,0	1,3	1,5	1,6	1,9	2,1	2,4	2,5	2,6
0,6	−0,2	−0,1	0,4	0,8	1,1	1,2	1,6	1,8	2,1	2,2	2,3
0,7	0,0	−0,6	−0,3	0,3	0,6	0,8	1,3	1,6	1,8	2,0	2,1
0,8	0,0	−0,7	−0,8	−0,3	0,1	0,4	1,0	1,3	1,6	1,8	1,9

În tabloul nr. 2 sînt date valorile lui $3\pi r^2 K\left(2\pi\frac{r}{1}\right)$ în funcție de r. Cu ajutorul acestor valori se poate obține $n\ (m-1)$ din (9).

Tabloul nr. 2

$b = 3\ \pi\ r^2\ K\left(2\pi\frac{r}{1}\right)$ cm^{-1} în funcție de r (μ)

r	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$b.\ 10^8$	0,08	0,50	1,84	4,45	8,72	14,64	21,66

Pornind de la aceleași valori ale lui K, am calculat grafic integrala din (19) și cu valorile obținute (tabloul nr. 3) am determinat pe α din (21). Rezultatele se găsesc în tabloul nr. 4.

Tabloul nr. 3

$A = \int_0^{\delta} \delta^{-2}\ K\ (\delta)\ d\ \delta$ cm^{-1} în funcție de δ

δ	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$A.10^8$	0,708	0,834	0,926	0,988	1,030	1,057	1,075	1,088	1,100	1,112

δ	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$A.10^8$	1,125	1,136	1,147	1,155	1,163	1,168	1,173	1,177	1,181	1,185

Tabloul nr. 4

Exponentul de mărime α în funcție de r max și λ, pentru cazul cînd particulele aerosolului ascultă de legea (14)

r \ λ	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	1,2	1,5	2,0	2,5	3,0
0,6	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0
0,8	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	1,9	2,0	2,0	2,0	2,0
1,0	1,3	1,3	1,4	1,4	1,5	1,6	1,8	1,9	1,9	2,0	2,0
1,3	1,2	1,2	1,2	1,2	1,3	1,3	1,5	1,6	1,8	1,8	1,8
1,6	1,1	1,1	1,1	1,2	1,2	1,2	1,3	1,4	1,6	1,7	1,7
1,9	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,2	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,2	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,2	1,2	1,3	1,4	1,5

În sfîrșit în tabloul nr. 5 sînt date valorile lui $2{,}604\ \pi^2 A\left(2\pi\frac{r}{1}\right)$. Cu aceste valori se poate obține $C(m-1)$ din (20).

Tabloul nr. 5

$b = 2{,}604\ \pi^2 A\left(2\pi\frac{r}{1}\right)$ cm^{-1} în funcție de r_{max} (μ)

r	0,8	1,0	1,3	1,6	1,9	2,2
b. 10^8	18,25	22,10	25,57	27,19	28,14	28,84

Să cercetăm mai întîi cazul cînd aerosolul poate fi considerat ca format din picături de aceeași rază, deci cînd coeficientul de extincție este dat de (8). Pentru acest caz, tabloul nr. 1 arată că α din expresia (3) variază atît cu lungimea de undă cît și cu raza. După cum se știe, Ångström obținuse pentru α o valoare medie de 1,3, independentă de λ, iar alți cercetători, valoarea de 1,0. Dacă ne limităm la domeniul vizibil al spectrului (în care s-au executat măsurătorile) și dacă considerăm α, cuprins între 1,3 și 1,0, ca valoare medie pentru acest domeniu, observăm că raza picăturilor ar trebui să fie cuprinsă între 0,4 și 0,5 μ. O asemenea rază, cum am mai spus, nu trebuie considerată ca rază medie; ea este, mai curînd, un indice al ordinului de mărime al picăturilor aerosolului.

Cu valorile din tabloul nr. 3 introduse în (17) obținem coeficientul de extincție în funcție de raza maximă a picăturilor aerosolului, în cazul cînd acestea ascultă de legea (14).

Tabloul nr. 4 dă, pentru acest caz, exponentul α în funcție de lungimea de undă și raza maximă. Variația lui α este mai slabă decît în cazul precedent. Se observă că în domeniul 0,3— 0,6 μ, cel mai convenabil pentru studiul extincției prin difuzie în spectrul solar, α, cuprins între 1,3 și 1,0, corespunde la particule de rază maximă egală sau mai mare de 1,1 μ și că apropierea lui α de valoarea 1,0 înseamnă trecerea de la picătura-nucleu la picătura noroasă ($r > 2\mu$).

În sfîrșit, mai trebuie arătat că în domenii spectrale nu prea restrînse, cum este cel arătat mai sus, α poate fi considerat, în prima aproximație, ca independent de lungimea de undă. Lucrul acesta merită să fie subliniat fiindcă el ne reîntoarce la înțelesul pe care Ångström îl dădea inițial expresiei sale, anume că exponentul de mărime α depinde numai de mărimea particulelor difuzante.

4. *Concluzii.* Din cele arătate în această lucrare se constată următoarele:

a) Relația (8) dată de Mie pentru coeficientul monocromatic de extincție, în cazul cînd picăturile aerosolului sînt presupuse avînd aceeași rază, poate fi înlocuită prin expresia lui Ångström (3); în care β și α au semnificațiile date de expresiile (9) și (10). Avantajul constă în aceea că pornind de la coeficienții de extincție monocromatici, se poate determina grafic α și β, tabloul nr. 1 permițînd aflarea razei. Cum picăturile aerosolului au mărimi diferite, nu ne putem aștepta la rezultate precise. Raza obținută pe această cale va fi doar un indice asupra ordinului de mărime, utilizabil pentru a urmări variațiile dimensiunilor picăturilor sub acțiunea umidității.

b) Admiţînd valabilitatea legii lui Junge cu privire la spectrul dimensional al picăturilor aerosolului atmosferic şi pornind de la expresia lui Mie, se obţine o nouă expresie pentru coeficientul de extincţie. Ea dă acest coeficient în funcţie de concentraţia picăturilor şi de raza lor maximă [expresiile (17 şi (5)]. Şi de data aceasta se poate folosi expresia (3), cu avantajele semnalate la punctul precedent, β şi α fiind exprimate prin expresiile (20) şi (21).

c) De data aceasta apare un fapt nou. Variaţia lui α cu raza şi lungimea de undă se reduce apreciabil şi pentru domenii spectrale destul de largi de altfel, α poate fi aproximat ca o funcţie numai de rază. Această revenire la înţelesul iniţial al expresiei (3) tinde să confirme acele observaţii menţionate în [1], după care α ar fi independent de lungimea de undă.

d) În această situaţie dezacordul între expresia lui Ångström şi cea a lui Mie tinde să dispară. În acelaşi timp, expresia lui Ångström, mai curînd empirică dar acum justificată teoretic întrucîtva, tinde să se impună. Şi cu toate că un acord între cele două expresii există, se pune întrebarea care din ele trebuie preferată. Desigur, observaţia va hotărî şi singurul lucru care se poate spune deocamdată este faptul că prin ipotezele simplificatoare care stau la baza ei, ca şi prin verificările ce i s-au făcut, expresia lui Mie este şi ea, aproximativă.

ОПТИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА АТМОСФЕРНОГО АЭРОЗОЛЯ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей работе автор сравнивает данное Ангстрёмом выражение коэффициента экстинкции (показателя ослабления), вызванного рассеиванием (3) с выражением, данным Мие (4), (8). Таким образом устанавливаются соотношения (9) и (10), В таблице 1 даны значения для α, вычисленные при помощи (10) для случая, когда все рассеивающие капли имеют один и тот же радиус.

Считая, что в атмосферном аэрозоле распределение величин капель, в зависимости от концентрации, подчинено закону Юнга (14), получаем коэффициент экстинкции, имеющий вид (16) и (17). В эти выражения входит радиус самых больших капель, принятый для данного момента времени. Значения функции A даны в таблице 3.

В таблице 4 даны значения α из (21) в зависимости от λ и наибольшего радиуса. Видно что для довольно больших спектральных областей можно считать, что α является функцией только радиуса, то есть другими словами можно перейти к первичным значениям (3). При таком положении неувязка между этими двумя выражениями коэффициента экстинкции исчезает.

CARACTÉRISATION OPTIQUE DE L'AÉROSOL ATMOSPHÉRIQUE

(RÉSUMÉ)

Dans ce Mémoire, l'Auteur compare l'expression donnée par Ångström pour le coefficient d'extinction par diffusion (3) avec celle de M i e (4) et (8) pour le cas où les gouttelettes ont toutes le même rayon. Il établit les relations

(9) et (10) qui relient ces deux expressions. Le tableau 1 contient les valeurs calculées pour α à l'aide de l'expression (10).

Si l'on suppose que la distribution des dimensions des gouttelettes en fonction de leur nombre, dans l'aérosol atmosphérique, suit la loi de Junge (14), on obtient pour le coefficient d'extinction des expressions (16) et (17) où figure le rayon des plus grandes gouttelettes existant à un moment donné. Les valeurs de la fonction A sont données dans le tableau 3.

Le tableau 4 contient les valeurs de α déduites de la relation (21), en fonction de λ et du rayon maximum. On voit que pour des domaines spectraux assez larges, α peut être considéré comme étant une fonction seulement du rayon, ou, autrement dit, on revient au sens primitif de (3). Dans cette situation, le désaccord entre les deux expressions données pour le coefficient d'extinction tend à disparaître.

BIBLIOGRAFIE

1. M. Herovanu, Studii și cercetări de fizică, t. IV, nr. 3—4, iulie-decembrie 1953, p. 305.
2. H. C. v. d. Hulst, *The Atmospheres of the Earth and Planets*. G. P. Kuiper, Chicago, 1948, cap. III.
3. Chr. Junge, Tellus, 1953, v. 5, p. 1.
4. G. Zanotelli, Atti Accad. Ital. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., 1940, v. 2, p. 42.
5. Chr. Junge, Ber. Dtsch. Wetterdienst U.S. Zone, 1952, p. 261.
6. A. H. Woodcock, Journ. of Met., 1952, v. 9, p. 200.
7. K. Bullrich, Geofis. pura e app., 1952, v. 23, p. 69.
8. H. G. Houghton, W. R. Chalker, Journ. Opt. Soc. of America, 1949, v. 39, p. 955.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE FIZICĂ
Tomul VI, nr. 2, 1955

FORMAREA ŞI DISIPAREA NORILOR ŞI CEŢII PRIN VARIAŢIA BRUSCĂ A RAZEI PICĂTURILOR*)

DE

AL. GRIGORIU şi GH. GIURGEA

Procesul de condensare a apei în atmosfera liberă se realizează în următoarele etape: nucleu de condensare, picătură-germen mică, picătură mare de ceaţă sau nor. Precipitarea norilor reprezintă un cu totul alt proces, care urmează etapelor citate mai sus şi de care nu ne vom ocupa în lucrarea de faţă.

Studiul de faţă se va mărgini la condiţiile apariţiei şi disipării ceţii sau norilor, considerate ca sisteme opace de picături. În prima etapă ne vom referi numai la sistemele omogene, alcătuite din picături de aceeaşi mărime, constituite pe suportul unor nuclee solubile, reprezentînd fiecare n' moli de substanţă şi avînd acelaşi potenţial electric P.

Considerăm ca nesatisfăcătoare metoda clasică de studiu al echilibrului picătură-vapori prin urmărirea relaţiei dintre raza r de echilibru şi umezeala relativă U_p de saturaţie faţă de picătura de rază r. Simpla urmărire a necesităţilor picăturii, exprimate prin U_p, nu ne permite să stabilim modul în care umezeala relativă a mediului u este influenţată de raza picăturii şi cum, la rîndul ei, impune acestei raze o anumită valoare.

Deoarece elementul activ în procesul de condensare este tensiunea vaporilor şi deoarece raza de echilibru este condiţionată de egalitatea dintre tensiunea e din mediu şi tensiunea E_p solicitată de picătură, metoda pe care o vom utiliza în cele ce urmează se va sprijini pe confruntarea permanentă dintre curba $E_p(r)$ şi curba $e(r)$. Această confruntare ne va permite să urmărim interinfluenţa dintre raza picăturii condensate şi tensiunea vaporilor din mediu, ambele mărimi fiind determinate unic drept coordonate ale punctului de intersecţie a curbelor $e(r)$ şi $E_p(r)$.

Rezultatele obţinute în lucrarea de faţă pot fi sintetizate în următoarele:

a) Raza de echilibru şi tensiunea vaporilor care îi corespunde sînt interdependente şi în acelaşi timp determinate de:

— parametrii macroscopici ai masei de aer (presiunea p, temperatura T şi apa totală X_0 amestecată cu gramul de aer uscat);

— parametrii individuali ai fiecărei picături în parte (potenţialul electric P şi mărimea n' a nucleului);

---

*) Lucrare prezentată Institutului de fizică la data de 20 decembrie 1954.

— parametrul ansamblului de picături (exprimat prin numărul N_0 de nuclee activate în gramul de aer uscat).

b) Variaţia razei de echilibru r_e şi a tensiunii de echilibru e_e este determinată de variaţia parametrilor termodinamici ai masei de aer şi se face continuu, atît în faza de picătură-germen, cît şi în faza de picătură mare de nor sau ceaţă. În tot cursul variaţiei continui egalitatea dintre e şi E_p este respectată.

c) Tranziţia de la picătura-germen la picătura mare, sau invers, se realizează în general printr-o variaţie discontinuă şi limitată a razei r_c şi tensiunii e, la anumite valori critice ale parametrilor termodinamici care dirijează transformarea. În cursul tranziţiei starea de echilibru încetează, tensiunea din mediu e este mai mare (condensare) sau mai mică (evaporare) decît E_p, aerul devine *temporar* suprasaturat sau nesaturat *faţă de picătură*.

d) Condiţiile termodinamice şi limitele domeniului de tranziţie bruscă la evaporarea sistemului opac sînt altele decît acelea pentru care s-a realizat tranziţia în cursul condensării.

În cele ce urmează vom expune bazele teoretice care ne-au condus la aceste concluzii.

TENSIUNEA VAPORILOR DIN MEDIU

Vom considera o masă de aer conţinînd 1 g aer uscat, x g vapori de apă şi y g apă condensată în N_0 picături. Vom considera de asemenea că toate picăturile rămîn incontinuu în sistem, neglijînd deci acţiunea gravităţii care poate separa sistemul de picături de masa-mumă de aer în care s-a constituit. Această neglijare a acţiunii gravitaţiei este perfect valabilă chiar în interiorul unui strat condensat ceva mai gros, de 2—3 m şi chiar mai mult, deoarece, statistic, numărul de picături care părăseşte prin cădere masa-mumă de aer este exact compensat de numărul de picături identice care intră în masa de aer respectivă din stratul imediat superior. Din acest motiv apa totală X_0 asociată cu gramul de aer este constantă

$$X_0 = x + y = \text{const.} \tag{1}$$

şi de aceea o vom considera ca un parametru iniţial invariabil al masei de aer.

Aerul umed va ocupa un volum liber V şi se va găsi la temperatura absolută T şi presiunea totală p

$$p = p_a + e, \tag{2}$$

în care p_a este presiunea parţială a aerului uscat.

Legătura dintre «coeficientul de amestec» x şi tensiunea de vapori e este dată de relaţia clasică

$$e = p\frac{x}{\frac{M_v}{M_a} + x} = p\frac{x}{\mu + x}, \tag{3}$$

în care $M_v = 18{,}016$ g/mol şi $M_a = 28{,}966$ g/mol sînt respectiv greutăţile moleculare ale vaporilor de apă şi aerului normal uscat, raportul lor avînd valoarea $\mu = 0{,}62197 \simeq 0{,}622$.

Deoarece, dacă neglijăm masa infimă a nucleului de condensare, avem

$$x = X_0 - y = X - \frac{4}{3}\pi N_0 \rho_p r^3 \tag{4}$$

în care ρ_p este densitatea picăturii, vom putea scrie imediat relaţia între e şi raza r a picăturilor condensate, în funcţie de parametrul variabil p determinabil experimental, şi parametrii invariabili X_0 şi N_0

$$e = p \frac{X_0 - \frac{4}{3}\pi N_0 \rho_p r^3}{\mu + X_0 - \frac{4}{3}\pi N_0 \rho_p r^3}. \tag{5}$$

Pe o diagramă $r > 0$; $e > 0$ curba reprezentativă $e = e(r)$ va avea un maxim care anulează derivata

$$\frac{\partial e}{\partial r} = \frac{\partial e}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} = \left[p \frac{\mu}{(\mu + x)^2} \right] (-4\pi N_0 \rho_p r^2) < 0, \tag{6}$$

pentru abscisa $r = 0$ (picăturile complet evaporate, nucleul de condensare neglijabil). Valoarea maximului este

$$e_m = p \frac{X_0}{\mu + X_0}. \tag{7}$$

Curba va intersecta axa absciselor ($e = 0$, deci $x = 0$) pentru raza maximă posibilă, dedusă din (5) prin anularea numărătorului

$$r_m = \sqrt[3]{\frac{3 X_0}{4\pi N_0 \rho_p}}. \tag{8}$$

Cînd raza picăturilor creşte de la zero la r_m, tensiunea e descreşte continuu ($\partial e/\partial r < 0$) şi uniform, fără puncte de inflexiune, deoarece derivata a doua

$$\frac{\partial^2 e}{\partial r^2} = -8\pi \mu p N_0 \rho_p r \frac{(\mu + x) + 4\pi N_0 \rho_p r^3}{(\mu + x)^3} < 0, \tag{9}$$

nu se anulează în interiorul acestui interval.

Tangenta la curba e, orizontală pentru $r = 0$, se înclină treptat, păstrînd în punctul extrem r_m o înclinare dată de

$$tg\, \omega_m = \left(\frac{\partial e}{\partial r}\right)_{r_m} = -\frac{p}{\mu} \cdot 4\pi N_0 \rho_p r_m^2 = -\frac{p}{\mu} \sqrt[3]{9 X_0^2 \cdot 4\pi \rho_p N_0}. \tag{10}$$

Vom analiza acum modul cum migrează curba lui e în planul diagramei în cursul formării ceţii (răcire izobară: $dp = 0$, $dT < 0$) sau disipării ei (încălzire izobară: $dp = 0$, $dT > 0$), precum şi în cursul formării norilor (mişcare ascendentă, destindere adiabatică: $dp < 0$, $dT < 0$) sau disipării lor (mişcare descendentă, comprimare adiabatică: $dp > 0$, $dT < 0$).

Vom considera în primă aproximaţie $\delta_p = \text{const.}$, ceea ce ne va dispensa de a urmări directa influenţă, în orice caz infimă, a variaţiilor temperaturii asupra lui e şi mărimilor derivate din e.

În cazul ceţii, deoarece p este constant, atît e cît şi e_m sau r_m nu suferă variaţii, deci curba lui e rămîne imobilă în planul diagramei.

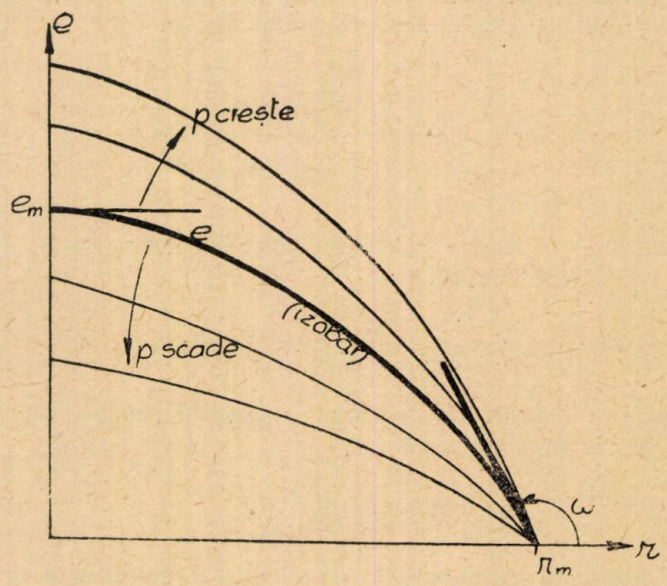


Fig. 1.

În cazul norilor, sau al condensării prin comprimare izotermă (în laborator), p variază şi vom avea

$$\frac{\partial e}{\partial p} = \frac{x}{\mu + x} > 0 \; ;$$

$$\frac{\partial e_m}{\partial p} = \frac{X_0}{\mu + X_0} > 0 \; ; \; \frac{\partial r_m}{\partial p} = 0 ; \tag{11}$$

$$\frac{\partial \operatorname{tg}\omega_m}{\partial p} = -\frac{1}{\mu}\sqrt[3]{9\,X_0^2 \,.\, 4\,\pi\,\rho_p\,N_0} < 0 \,.$$

Rezultă că, în cazul destinderii izoterme sau în acela al formării norilor (nimbogeneză, $dp < 0$), curba lui e şi maximul ei e_m coboară spre axa absciselor, punctul extrem r_m rămîne fix, iar tangenta în acest punct tinde către orizontală (fig. 1).

In cazul comprimării izoterme sau al disipării norilor (nimboliză, $dp > 0$), curba lui e şi maximul ei e_m se ridică în planul diagramei, iar tangenta în punctul fix r_m tinde către verticală (fig. 1).

TENSIUNEA NECESARĂ PICĂTURII PENTRU ECHILIBRU

Legile lui Kelvin și Raoult, puse într-o formă mai riguroasă [1], ne arată că deasupra suprafeței curbe convexe a picăturii de rază r și tensiune superficială σ, la potențialul electric P, constituită pe un nucleu de condensare de masă m' și greutate moleculară M' (care reprezintă deci un număr de moli $n' = m'/M'$ de corp dizolvat în soluția diluată a picăturii), tensiunea necesară echilibrului lichid-vapori rezultă din relația

$$E_p = E_\infty \epsilon^{\psi}, \tag{12}$$

în care $E_\infty (T)$ reprezintă tensiunea maximă deasupra unei suprafețe plane și neutre electric de apă pură, iar $\epsilon = \exp.$ Funcția ψ este dată [1] de expresia

$$\psi = \frac{2\sigma}{\rho_p R_v T} \cdot \frac{1}{r} - \frac{P^2}{8\pi \rho_p R_v T} \cdot \frac{1}{r^2} - \frac{3 M_v n'}{4\pi \rho_p} \cdot \frac{1}{r^3}, \tag{13}$$

unde $R_v = R/M_v$ este constanta gazelor pentru vaporii de apă, iar P, potențialul electric, rezultă din raportul dintre sarcina electrică și raza picăturii. Al treilea termen este dedus din legea Raoult, în aproximația $\ln [n/(n+n')] = -n'/n$, satisfăcătoare [1] la valorile mici pe care le ia raportul n'/n în cazul picăturii.

Pe aceeași diagramă rază-tensiune de vapori, utilizată pentru e, funcția E_p are un maxim $(E_p)_M$ pentru raza r_M care îi anulează derivata

$$\frac{\partial E_p}{\partial r} = E_\infty (T)\, \epsilon^{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \tag{14}$$

deci care anulează derivata lui ψ

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{2\sigma}{\rho_p R_v T r^4} \left(r^2 - \frac{P^2}{8\pi\sigma} r - \frac{9 R T n'}{8\pi\sigma} \right). \tag{15}$$

Din anularea parantezei

$$r^2 - 2\frac{P^2}{16\pi\sigma} r - \frac{9\, R T\, n'}{8\pi\sigma} = r^2 - 2Ar - B = 0 \tag{16}$$

rezultă r_M real (semnul + înaintea radicalului)

$$r_M = A + \sqrt{A^2 + B} = \frac{P^2}{16\pi\sigma} + \sqrt{\left(\frac{p^2}{16\pi\sigma}\right)^2 + \frac{9 R T n'}{8\pi\sigma}}$$

$$r_M = \frac{1}{16\pi\sigma} \left(P^2 + \sqrt{P^4 + 288\pi\sigma R T n'} \right) \tag{17}$$

Înlocuind în ψ obținem, după grupări și reduceri convenabile, maximul acestuia

$$\psi_M = \frac{2\sigma}{3\rho_p R_v T} \cdot \frac{2r_m - A}{2Ar_m + B}, \tag{18}$$

întotdeauna pozitiv deoarece, din relația (16), se deduce: $2 r_M - A > 0$.

Rezultă, în consecinţă,

$$(E_p)_M = E_\infty \epsilon^{\psi_M} > E_\infty \tag{19}$$

În intervalul de la $r = 0$ la $r = r_M$ avem $\partial\psi/\partial r > 0$, deci $\partial E_p/\partial r > 0$, deci E_p creşte continuu.

În intervalul de la $r = r_M$ la $r = \infty$ avem $\partial\psi/\partial r < 0$, deci $\partial E_p/\partial r < 0$, deci E_p scade continuu.

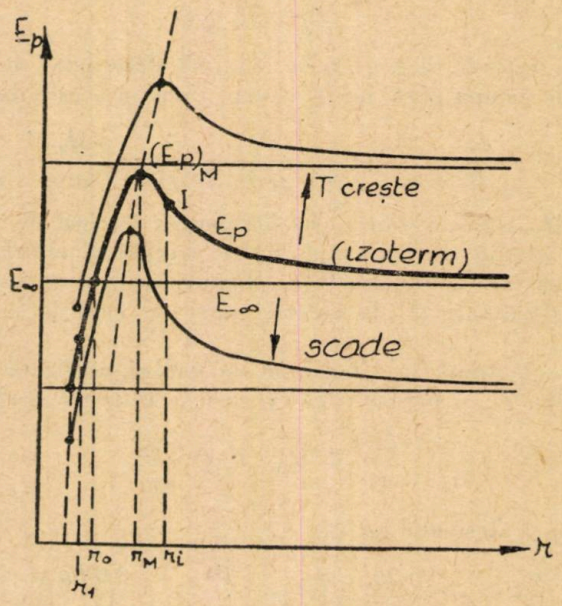


Fig. 2

Cînd r tinde către zero (fig. 2), E_p tinde către zero

$$\lim_{r=0} \psi = -\infty, \text{ deci } \lim_{r=0} E_p = 0,$$

coborînd din $(E_p)_M$ şi trecînd mai întîi prin valoarea $(E_p)_0 = E_\infty$ pentru o rază r_0 care anulează funcţia ψ

$$\psi_0 = \frac{2\sigma}{\rho_p R_v T r_0^3}\left(r_0^2 - Ar_0 - \frac{1}{3}B\right) = 0. \tag{20}$$

Din această ecuaţie rezultă r_0

$$r_0 = \frac{A}{2} + \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \frac{B}{3}} < r_m. \tag{21}$$

Pentru raze mai mici ca r_0 avem $\psi < 0$, deci $E_p < E_\infty$. Coborîrea curbei E_p către zero pentru raze mici este însă de fapt limitată fizic de evaporarea completă a apei şi reconstituirea nucleului de condensare solid, la anumite

valori inferioare unităţii ale raportului E_p/E_∞, valori ce depind de masa şi natura chimică a nucleului [1]*).

Cînd r creşte peste valoarea r_M, E_p scade, trecînd mai întîi printr-un punct de inflexiune I pentru o rază r_i care anulează derivata a doua a lui E_p

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial r^2} = E_\infty \epsilon^{\psi}\left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)^2 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}\right] = 0 \tag{22}$$

şi în care $\partial E_p / \partial r$ trece printr-un minim între cele două anulări pentru $r = r_M$ şi $r = \infty$.

Dincolo de inflexiune, E_p scade continuu tinzînd către asimptota orizontală $E_\infty = \text{const.}$

$$\lim_{r\to\infty} \psi = 0, \text{ deci } \lim_{r\to\infty} E_p = E_\infty;$$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \text{ deci } \lim_{r\to\infty} \frac{\partial E_p}{\partial r} = 0.$$

Vom analiza acum modul cum migrează, în planul diagramei, curba E_p, în cursul formării sau disipării ceţii şi norilor sau în cursul comprimării izoterme. Remarcăm de la început că în expresia lui E_p presiunea p nu apare explicit, aşa că vom urmări numai efectul variaţiilor temperaturii în transformarea izobară (ceaţă) sau adiabatică (nori). Va trebui deci să urmărim derivatele în raport cu T ale funcţiilor E_∞, ψ, E_p şi r_M.

Tensiunea maximă E_∞ (faţă de apa plană, pură, neutră) creşte exponenţial cu temperatura, fiind exprimată destul de bine de ecuaţia Clapeyron-Clausius

$$(E_\infty)_T = (E_\infty)_{T_0} \epsilon^{\frac{L}{AR_v T_0}\cdot\frac{T-T_0}{T}} \simeq (E_\infty)_{273^\circ K}\, 10^{\frac{8{,}5\,(T-273)}{T}}$$

sau, şi mai bine, de ecuaţia empirică a lui Magnus [1]**)

$$(E_\infty)_t = (E_\infty)_{0^\circ C}\, 10^{\frac{7{,}45\,t}{235+t}}. \tag{23}$$

Valorile funcţiei E_∞ pentru diferite temperaturi curente se găsesc în tabelele de constante. Derivata normală sau acea logaritmică sînt întotdeauna pozitive şi trec, pentru temperaturile uzuale, prin următoarele valori deduse după Magnus

t°C	−30	−20	−10	0	10	20	30	40
E_∞ (torr)	0,39	0,96	2,16	4,58	9,21	17,54	31,83	55,34
$\frac{dE_\infty}{dT}$ (torr/°K)	0,037	0,084	0,172	0,334	0,619	1,087	1,827	2,950
$\frac{1}{E_\infty}\cdot\frac{dE_\infty}{dT}$ ($°K^{-1}$)	0,096	0,087	0,080	0,073	0,067	0,062	0,057	0,053

*) p. 437.
**) p. 402.

Derivata lui ψ în raport cu T este

$$\frac{\partial \psi}{\partial T} = \frac{2\dfrac{\partial \sigma}{\partial T}}{\rho_p R_v T} \cdot \frac{1}{r} - \frac{1}{T}\left(\frac{2\sigma}{\rho_p R_v T} \cdot \frac{1}{r} - \frac{P^2}{8\pi \rho_p R_v T} \cdot \frac{1}{r^2}\right) =$$

$$= \frac{2\dfrac{\partial \sigma}{\partial T}}{\rho_p R_v T} \cdot \frac{1}{r} - \frac{1}{T}\left(\psi + \frac{3 M_v n'}{4\pi \rho_p} \cdot \frac{1}{r^3}\right) = \tag{24}$$

$$= \frac{2}{\rho_p R_v T r}\left[\frac{\partial \sigma}{\partial T} - \frac{1}{T}\left(\sigma - \frac{P^2}{16\pi r}\right)\right].$$

Pentru toate punctele curbei E_p de deasupra asimptotei E_∞ paranteza mică din (24) este pozitivă, deci $\partial\psi/\partial T < 0$, deoarece primul termen este întotdeauna negativ $\partial\sigma/\partial T < 0$.

Derivata $\partial\psi/\partial T$ continuă să rămînă negativă şi pentru ramura curbei de sub asimptotă, pînă cînd expresia acestei derivate se anulează, pentru raze r_1, mai mici decît r_0, date de

$$r_1 = \frac{P^2}{16\pi T\left(\dfrac{\sigma}{T} - \dfrac{\partial \sigma}{\partial T}\right)}. \tag{25}$$

Aşadar, cu excepţia unei mici porţiuni iniţiale corespunzătoare unor raze mai mici ca r_1, în tot lungul curbei E_p derivata lui ψ este negativă

$$\frac{\partial \psi}{\partial T} < 0. \tag{26}$$

În particular, pentru $\partial\psi_M / \partial T$ din punctul maxim de deasupra asimptotei, vom avea întotdeauna

$$\frac{\partial \psi_M}{\partial T} < 0. \tag{27}$$

Derivata în raport cu T a funcţiei E_p este dată de

$$\frac{\partial E_p}{\partial T} = E_p\left(\frac{1}{E_\infty} \cdot \frac{dE_\infty}{\partial T} + \frac{\partial \psi}{\partial T}\right). \tag{28}$$

Primul termen este întotdeauna pozitiv şi trece prin valorile numerice date în tabloul anterior. Al doilea termen este pozitiv pentru raze mai mici ca r_1, aşa că în acest caz avem sigur $\partial E_p/\partial T > 0$. Pentru raze mai mari ca r_1 derivata $\partial\psi/\partial T$ ia valori negative, dar inferioare în modul valorilor pozitive ale primului termen, aşa că şi în acest caz $\partial E_p/\partial T > O$.

Pentru a arăta aceasta este suficient să constatăm că porţiunile iniţiale ($r < r_1$) şi finale (spre asimptotă) ale curbei E_p cresc cu T şi că oricare ar fi valoarea maximului $(E_p)_M$ la o anumită temperatură T, putem găsi întotdeauna o temperatură superioară T', astfel ca asimptota E'_∞ a curbei E'_p să se situeze deasupra valorii $(E_p)_M$ a primei curbe şi deci întreaga porţiune a

curbei E'_p de deasupra asimptotei sale să fie superioară porțiunii corespunzătoare a curbei E_p. Aceasta înseamnă că prin ridicarea temperaturii curba E_p se ridică în planul diagramei odată cu asimptota ei, deci în ansamblu

$$\frac{\partial E_p}{\partial T} > 0. \tag{29}$$

O discuție analitică asupra acestei deplasări nu este posibilă din cauza necunoașterii valorilor numerice al derivatei $\partial\psi/\partial T$.

În ceea ce privește variația cu temperatura a razei r_M, notînd $h = 288\pi R$, deducem din (17)

$$\frac{\partial r_M}{\partial T} = \frac{-\frac{\partial\sigma}{\partial T}(2P^2 \cdot 16\,\pi\sigma\, r_M + h\sigma\, T\, n') + h\sigma^2 n'}{32\,\pi\sigma^2\sqrt{P^4 + h\sigma\, T\, n'}} > 0 \tag{30}$$

expresie întotdeauna pozitivă, deoarece $\partial\sigma/\partial T < 0$.

Utilizînd cele deduse pînă acum privitor la influența temperaturii asupra curbei E_p, vom analiza, după cum am procedat și pentru curba e, modul cum se realizează migrarea curbei E_p în cazul comprimării izoterme, al ceții și al norilor.

Cazul procesului izoterm este simplu: temperatura rămînînd constantă, curba E_p va rămîne fixă în planul diagramei.

Atît producerea ceții cît și apariția norului sînt determinate de o scădere a temperaturii (răcire izobară sau adiabatică) ceea ce antrenează coborîrea curbei E_p și a asimptotei sale E_∞. De asemenea, maximul $(E_p)_M$ coboară, deplasîndu-se concomitent și către razele mici (fig. 2).

La disiparea ceții sau norului temperatura crește, curba E_p urcă, iar maximul $(E_p)_M$ se urcă de asemenea, deplasîndu-se în același timp către razele mari.

RAZA DE ECHILIBRU

Echilibrul dintre picătură și vaporii din mediu nu se realizează decît în cazul cînd tensiunea de echilibru E_p devine egală cu tensiunea e din mediu.

Dacă tensiunea e din mediu este mai mare decît E_p, avem suprasaturație *față de picătură* și condensarea continuă. Dacă e este mai mică decît E_p, mediul este nesaturat *față de picătură* și picătura se evaporă.

Condensarea sau evaporarea picăturii continuă pînă ce aceasta capătă raza r_c care verifică ecuația

$$e = E_p$$

$$p\,\frac{X_0 - \frac{4}{3}\pi N_0 \rho_p r_c^3}{\mu + X_0 - \frac{4}{3}\pi N_0 \rho_p r_c^3} = E_\infty(T) \cdot \epsilon^{\frac{2\sigma}{\rho_p R_v T r_c} - \frac{p^2}{8\pi\rho_p R_v T r_c^2} - \frac{3 M_v n'}{4\pi\rho_p r_c^3}}. \tag{31}$$

Această rază este dată de intersecția curbelor e și E_p înscrise pe o aceeași diagramă în funcție de raza picăturii.

Problemele legate de rezolvarea ecuației (31) impun mai întîi căutarea legăturii între p și T, pentru a putea proceda la eliminarea unuia din cei trei parametri variabili r_c, p, T astfel ca să ne rămînă o relație numai între doi

din ei pentru definirea stării finale a sistemului. În cazurile particulare cu parametru constant, răcire izobară (ceaţă) sau compresiune izotermă, problema se simplifică datorită independenţei dintre p şi T. În toate celelalte cazuri, inclusiv transformările adiabatice care dirijează geneza norilor, problema rămîne complicată.

În lucrarea de faţă nu ne vom preocupa de acest aspect analitic al problemei, ci ne vom rezuma numai la constatări de ansamblu asupra relaţiilor geometrice dintre curbele e şi E_p.

ÎN CURSUL COMPRIMĂRII SAU DESTINDERII IZOTERME

În acest caz poziţia curbei E_p rămîne fixă în planul diagramei deoarece $T = \text{const.}$ (fig. 3). În schimb curba e va migra în planul diagramei din cauza creşterii sau scăderii presiunii aerului, rotindu-se în jurul contactului cu axa absciselor în conformitate cu relaţiile (5) şi (8) care definesc pe e şi r_m. La comprimare, deoarece presiunea creşte, e va trece prin poziţiile succesive de la e_1 la e_5, iar la destindere printr-o succesiune inversă.

Este evident că în faza iniţială punctul de contact C_1 între cele două curbe trebuie să ne conducă la o picătură-germen de rază foarte mică $(r_c)_1$, constituită şi evoluînd ca atare mai întîi la umezeli relative inferioare valorii de 100% (sub asimptota E_∞), apoi chiar la umezeli relative mai mari decît 100% (deasupra asimptotei E_∞) pe tot parcursul de la C_1 la C_2.

Pentru presiunea $p_2 > p_1$ curba e ajunge în poziţia e_2 cînd, în afară de contactul C_2 ea devine şi tangentă inferioară la ramura asimptotică a curbei E_p, în punctul T_i. Raza de echilibru rămîne însă $(r_c)_2$, întrucît picătura nu poate creşte pînă la $(r'_c)_2$, deoarece pe parcursul $C_2\,T_i$ am avea $e < E_p$, adică aerul ar fi nesaturat faţă de picătură, ceea ce s-ar opune condensării.

Aceeaşi situaţie continuă şi pentru poziţia e_3, raza de echilibru evoluînd încet de la $(r_c)_2$ la $(r_c)_3$.

Cînd e ajunge în poziţia e_4, iar raza la $(r_c)_4$, corespunzătoare punctului de tangenţă superioară T_s, echilibrul de fază se strică brusc, devenind astfel posibilă creşterea spontană a picăturii. Într-adevăr, între punctele T_s şi C'_4 mediul va fi suprasaturat faţă de picătură $(e_4 > E_p)$ deoarece e_4 se situează pe acest parcurs deasupra curbei E_p. Raza picăturii va creşte deci spontan de la $(r_c)_4$ la $(r'_c)_4$, dată de noul contact de echilibru C'_4.

Dacă creşterea presiunii totale p continuă, curba tensiunii din mediu ia poziţia e_5, iar raza picăturii creşte iarăşi continuu de la $(r'_c)_4$, la $(r'_c)_5$.

Dincolo de maximul curbei E_p creşterea picăturii nu este deci nelimitată, ci este mereu determinată foarte precis de contacte de tip C_5.

Constatăm deci că, în faza iniţială de picătură-germen mică şi în faza finală de picătură mare de ceaţă, creşterea picăturii se face continuu pe drumurile $C_1C_2C_3T_s$ şi apoi C'_4C_5, ambele situate pe curba E_p. În faza intermediară, de salt de la picătura-germen la picătura de ceaţă, creşterea picăturii se face brusc, prin puncte reprezentative situate pe drumul $T_sS_4C'_4$ de pe curba e_4. Punctele T_s şi C'_4 sînt deci puncte de discontinuitate de-a lungul curbei care ne dă legătura dintre raza reală a picăturilor şi tensiunea din mediu, tensiune dirijată simultan de creşterea presiunii şi de fenomenul condensării. Întreaga curbă a fenomenului este deci reprezentată de porţiunile C_1T_s (pe E_p), $T_sC'_4$ (pe e_4) şi C'_4C_5 (din nou pe E_p).

Procesul invers, al evaporării picăturilor, determinat de scăderea izotermă a presiunii de la p_5 la p_1, și deci de contactele succesive pe care le au diferitele poziții e_5, e_4, ..., e_1 ale curbei e cu curba E_p, este reprezentat în general, în faza inițială și finală, de aceleași curbe, dar în faza intermediară, corespunzătoare saltului razei, ia un alt drum decît la condensare.

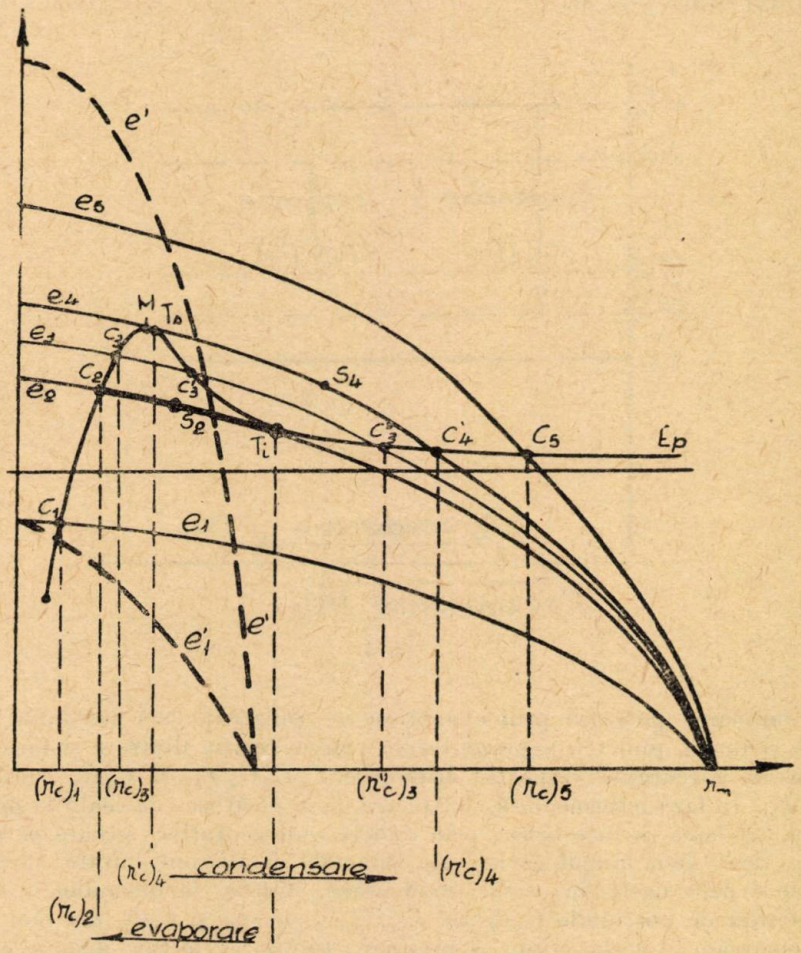


Fig. 3

Într-adevăr, în clipa cînd picătura în evaporare a ajuns de la raza $(r_c)_5$ la $(r_c)_4$ iar contactul în $(C'_c)_4$, evaporarea spontană nu este posibilă, cum a fost condensarea, deoarece pe parcursul $C'_4 S_4 T_s$ am avea mereu suprasaturație $(e_4 > E_p)$. De aceea, pe măsură ce presiunea scade, contactul se mută treptat din C'_4 în C_3 și final în punctul de tangență inferioară T_i pentru o rază $(r'_c)_2$.

Din acest moment echilibrul se strică și raza picăturii scade brusc de la $(r'_c)_2$ la $(r_c)_2$, dînd din nou o picătură-germen. Evaporarea spontană a picăturii este determinată de faptul că, pe tot parcursul $T_i S_2 C_2$, mediul rămîne nesaturat față de picătură, tensiunea din mediu menținîndu-se incontinuu mai

mică decît tensiunea de echilibru ($e_2 < E_p$). Observăm deci că limitele între care se produce saltul brusc al razei picăturilor la evaporare sînt inferioare acelora de la condensare. În acelaşi timp intervalul respectiv al tensiunii de vapori la evaporare (corespunzător parcursului $T_i\, C_2$) este mai mic decît intervalul corespunzător de la condensare, determinat de parcursul $T_s C_4'$, şi cuprins în acesta din urmă (fig. 4).

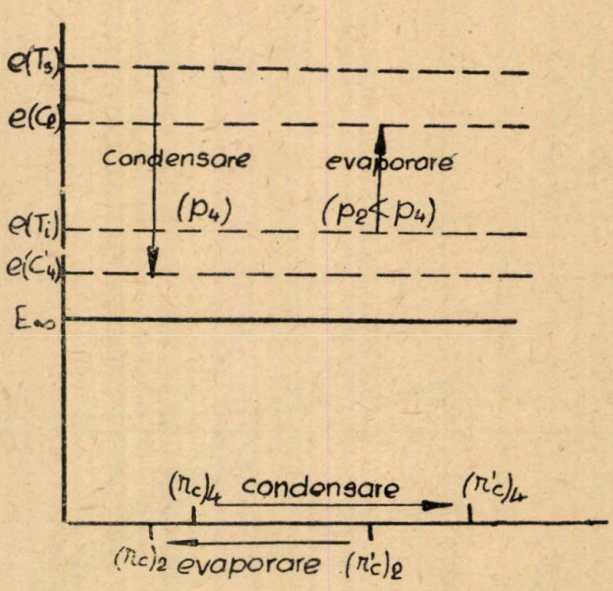


Fig. 4

Diminuarea picăturii prin evaporare se realizează deci continuu în faza iniţială şi finală, punctele reprezentative pentru relaţia dintre r şi tensiunea e din mediu parcurgînd respectiv drumurile $C_5 C_4' C_3 T_i$ şi $C_2 C_1$ situate pe curba E_p. În faza intermediară, de trecere de la picătura de ceaţă la picătura-germen, scăderea se face brusc, prin puncte reprezentative situate pe drumul $T_i S_2 C_2$, deci de-a lungul curbei e_2. Punctele de discontinuitate sînt T_i şi C_2, altele deci decît în cazul condensării. Curba fenomenului este deci reprezentată de porţiunile $C_5 T_i$ (pe E_p), $T_i C_2$ (pe e_2) şi $C_2 C_1$ (din nou pe E_p).

Remarcăm în acelaşi timp că presiunea totală p_2 la care dispare ceaţa în destinderea izotermă este inferioară presiunei p_4 la care ea se formează în cursul comprimării izoterme. După cum am văzut, în timpul saltului, deşi presiunea totală respectivă rămîne constantă, tensiunile de vapori scad de la $e_4\,(T_s)$ la $e_4\,(C_4')$ la condensare, şi cresc de la $e_2\,(T_i)$ la $e_2(C_2)$ la evaporare (fig. 4).

Mai trebuie să subliniem că creşterea picăturilor poate fi uneori foarte limitată, saltul brusc putînd chiar să dispară complet. Astfel (fig. 3, curbele e_1' şi e' punctate) dacă, pentru aceeaşi masă de aer cu apă totală X_0, numărul de nuclee de condensare ar fi mult mai mare, atunci raza maximă r_m, variind invers proporţional cu rădăcina cubică a numărului de nuclee conform relaţiei (8), se poate micşora destul de mult, de exemplu pînă la r_m'. Curba e_1 s-ar

transforma în e'_1, și, oricît de mult ar crește presiunea, ea nu ar putea lua ulterior decît o poziție de aspectul curbei e', avînd deci un singur contact cu E_p pentru raze în orice caz mai mici decît r'_m. Așadar, în acest caz razele rămîn mici, iar creșterea prin salt nu mai este posibilă.

ÎN CURSUL FORMĂRII SAU DISIPĂRII CEȚII

Fenomenul este cauzat de răcirea sau încălzirea izobară a masei de aer. Deci temperatura scade (la formarea ceții) sau crește (la disipare), ceea ce antrenează respectiv o coborîre sau o urcare a curbei E_p în planul diagramei. În schimb însă curba e rămîne fixă în cursul procesului izobar, datorită faptului că presiunea rămîne constantă (fig. 5).

Printr-o analiză similară aceleia din cazul transformării izoterme vom constata că, în cazul răcirii izobare (formarea ceții), curba E_p coboară și contactul cu e se deplasează treptat pe drumul $C_1C_2T_s$ de pe curba e pînă în punctul de tangență superioară T_s. În acel moment se instaurează instabilitatea [$e > (E_p)_4$, deci suprasaturație]. Punctul reprezentativ se deplasează spontan, tot pe curba e, de-a lungul drumului $T_sT_iC'_4$, pînă în C'_4, raza crescînd brusc de la $(r_c)_4$ la noua rază de echilibru $(r_c)_4$. Dacă răcirea continuă, creșterea treptată este reluată spre raze $(r_c)_5$, de-a lungul curbei e.

La disiparea ceții (încălzire izobară) curba e continuă să rămînă fixă, în timp ce curba E_p parcurge în sens invers etapele menționate, trecînd de la $(E_p)_5$ la $(E_p)_1$. Punctele de contact cu e se vor deplasa mai întîi treptat pe drumul $C_5C'_4T_i$ de pe curba e, pînă la punctul de tangență inferioară T_i, cînd, din aceleași motive ca în cazul anterior, se produce instabilitatea [$e < (E_p)_2$, deci nesaturație] și raza scade brusc de la $(r'_c)_2$ la raza de echilibru $(r_c)_2$ corespunzînd picăturii-germen. Punctul reprezentativ se va deplasa brusc de la T_i la C_2 de-a lungul drumului $T_iT_sC_2$ de pe curba e.

Dacă încălzirea continuă, raza picăturilor-germen va continua să scadă lent de la $(r_c)_2$ la raze $(r_c)_1$, drumul punctelor reprezentative fiind C_2C_1 pe aceeași curbă e.

Așadar, saltul brusc al picăturii se realizează, și în cazul ceții, la disipare în condiții diferite față de acelea de la producere. Relațiile de poziție dintre razele ce limitează domeniile de salt (fig. 6) sînt aceleași ca în cazul anterior al transformării izoterme. În ceea ce privește însă tensiunile e, domeniul de salt la disipare este decalat spre valori mai mari decît acelea de la formarea ceții (fig. 6).

De asemenea, trebuie subliniat că ambele porțiuni de discontinuitate $T_sT_iC'_4$ (condensare) și $T_iT_sC_2$ (evaporare), se situează pe o aceeași curbă e, iar drumurile de creștere continuă ($C_1C_2T_s$ și C'_4C_5) sau de scădere continuă ($C_5C'_4T_i$ și C_2C_1) din fazele inițiale și finale se plasează pe aceeași curbă fixă e, nu pe curba E_p ca în cazul anterior.

Trebuie repetată și aici observația că, atunci cînd numărul N'_0 al nucleelor de condensare ar fi mult mai mare decît N_0 din cazul curbei e, această curbă ia o nouă poziție e', retractată la baza spre origine, astfel încît saltul brusc să diminueze substanțial sau să dispară complet, iar creșterea picăturilor să fie neînsemnată și deci ceața propriu-zisă să nu se producă. În cazul acesta se poate produce, în timpul nopții, numai o pîclă ușoară, însoțită uneori, vara, de depuneri masive de rouă. Imposibilitatea ceții în acest caz, deși umezeala relativă a aerului din apropierea solului atinge sau depășește 100%, se explică

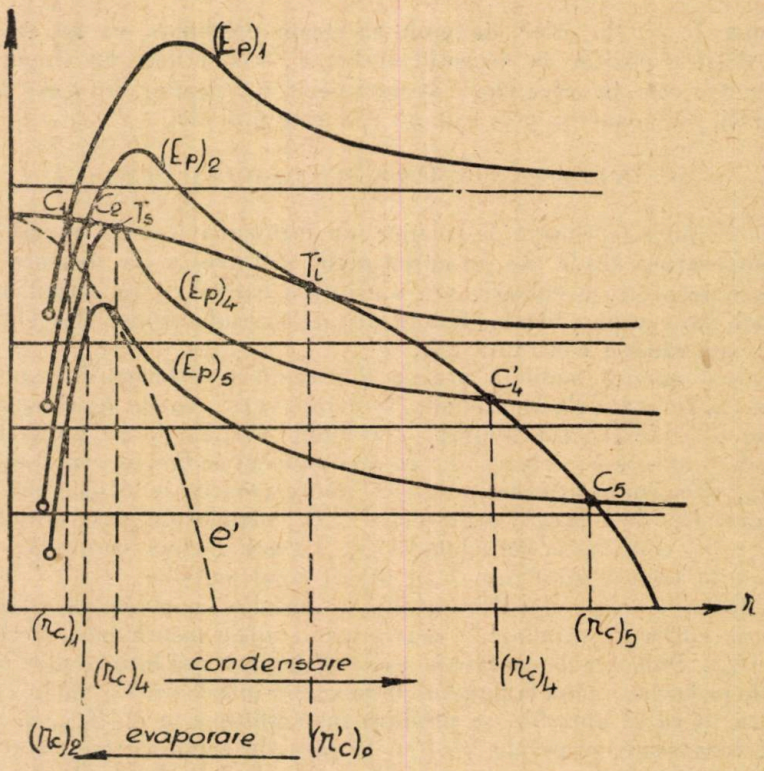

(Ep)1
(Ep)2
C1
C2
Ts
Ti
(Ep)4
(Ep)5
C'4
C5
e'
π
(πc)1
(πc)4
condensare
(πc)5
(π'c)4
(πc)2
evaporare
(π'c)0

Fig 5

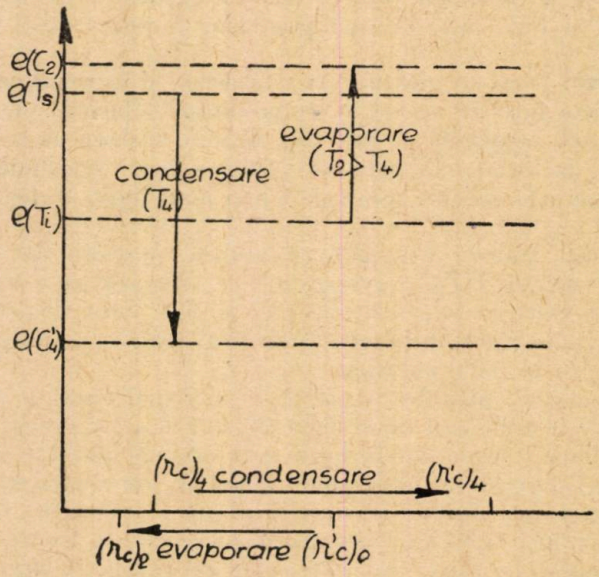

e(C2)
e(Ts)
evaporare
(T2 > T4)
condensare
(T4)
e(Ti)
e(C'4)
(πc)4 condensare
(π'c)4
(πc)2 evaporare (π'c)0

Fig. 6

așadar prin numărul mare de nuclee din aerul tropical frecvent în cursul verii.

Trebuie remarcat că ceața persistă și după ce temperatura T_4 de formare a fost depășită, și nu dispare decît la temperaturi superioare valorii $T_2 > T_4$.

ÎN CURSUL FORMĂRII SAU DISIPĂRII NORILOR

Cazul norilor este cel mai complicat deoarece nici presiunea, nici temperatura nu rămîn constante în cazul destinderii sau comprimării adiabatice care conduce

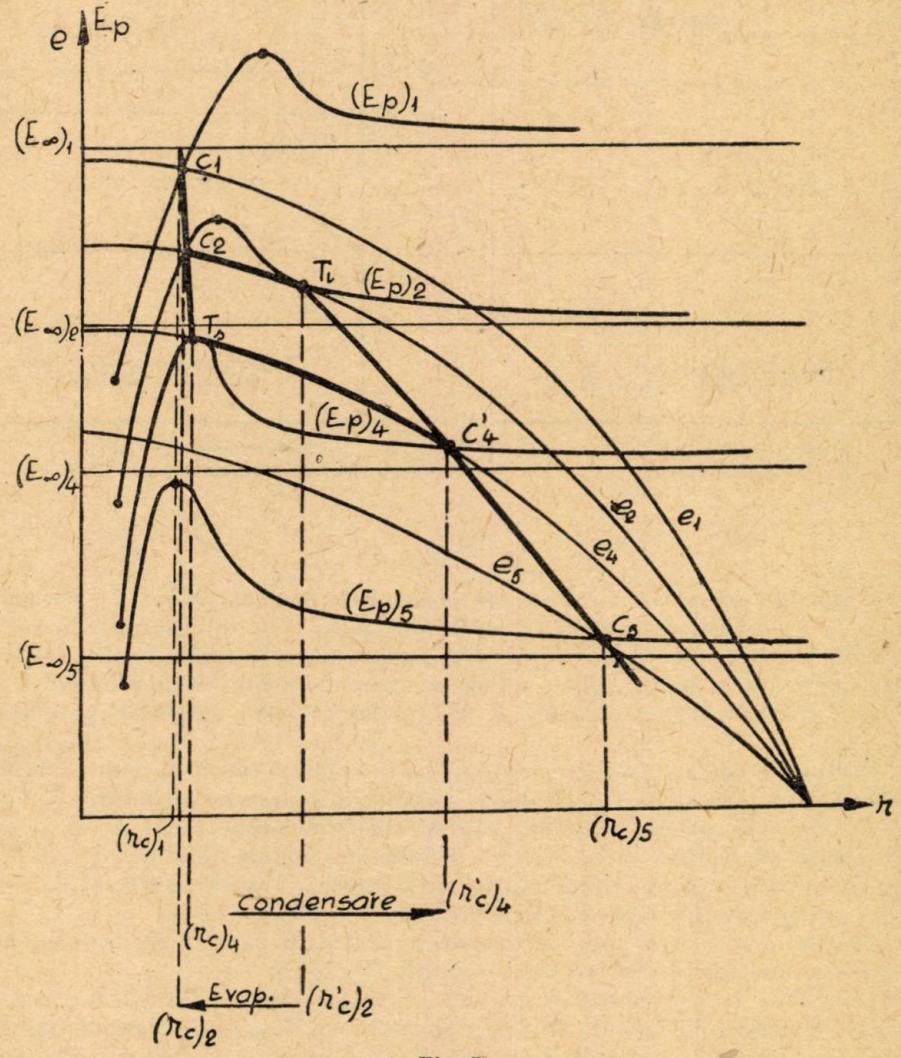


Fig. 7

la apariția sau disiparea norilor. În consecință, atît curba e cît și curba E_p vor migra în planul diagramei, ambele coborînd în timpul destinderii (răcirii) adiabatice ($\mathrm{d}\,T < 0$, $\mathrm{d}p < 0$) din cursul mișcării ascendente care generează

norul şi ambele urcîndu-se în timpul comprimării (încălzirii) adiabatice ($dT > 0$, $dp > 0$) în cursul mişcării descendente care conduce la disiparea norului.

În faza iniţială (fig. 7) contactul între cele două curbe se va realiza într-un punct C_1 din zona picăturilor-germen de raze $(r_c)_1$. În faza finală acest contact

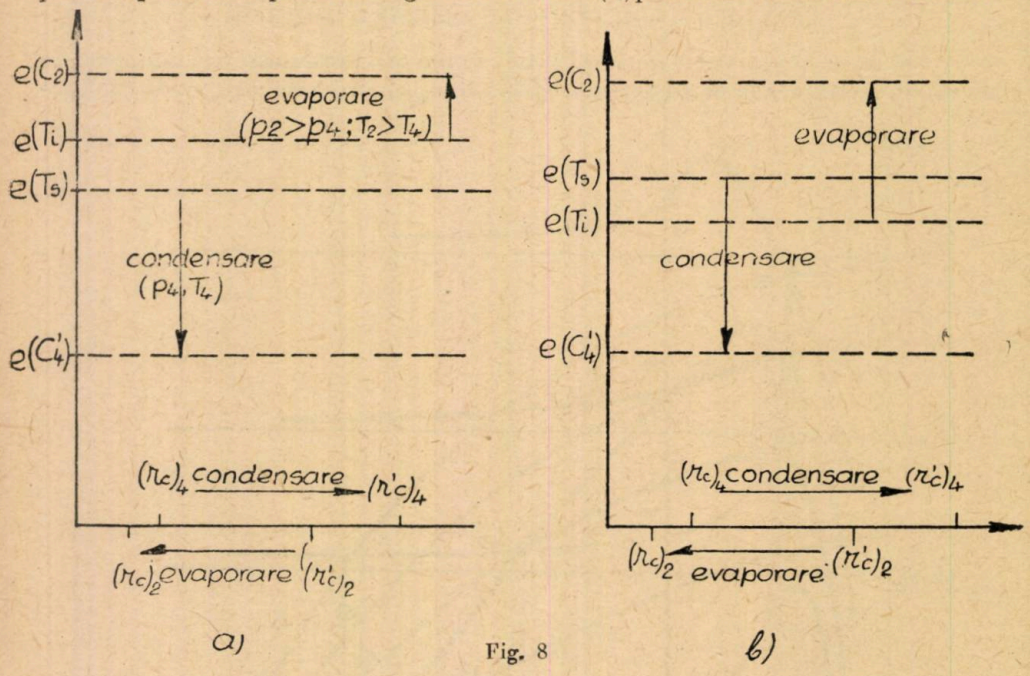


Fig. 8

se va afla într-un punct C_5 din zona picăturilor mari de raze $(r_c)_5$. Pentru a ajunge la tipul final de contact C_5, curbele e şi E_p sau interpătruns în cursul coborîrii lor, trecînd neapărat prin cele două poziţii reciproce critice, de tangenţă inferioară şi de tangenţă superioară, marcate prin salt de-a lungul tranziţiilor $T_sC'_4$ (la formarea norului) şi $T_i\ C_2$ (la disipare), respectiv pe curbele e_4 şi e_2.

Porţiunile corespunzătoare creşterii sau scăderii continue a razei la formarea norului (drumurile $C_1C_2T_s$ şi C'_4C_5) sau la disiparea lui (drumurile $C_5C'_4T_i$ şi C_2C_1) nu mai aparţin vreunuia din sistemele de curbe e sau E_p, ci se află pe o curbă particulară $F(r_c, e) = 0$, dedusă din eliminarea lui T şi $p(T)$ între ecuaţiile lui e şi E_p, ţinînd seama de adiabazia transformării şi de condiţia $e = E_p$ care defineşte contactele C.

Domeniul de salt al razei la disipare este decalat către valorile mici, faţă de acelaşi domeniu de la formarea norului (fig. 8*a* şi 8*b*).

Domeniile corespunzătoare de salt al tensiunilor e din mediu pot fi complet detaşate unul faţă de altul (fig. 8*a*), sau pot să se interpătrundă (fig. 8*b*), după valoarea parametrilor fizici ai gazului şi picăturii. Decalarea la evaporare se produce întotdeauna către valori ale tensiunii mai mari decît la condensare.

Nivelul de presiune p_2, la care se realizează saltul la evaporare, este inferior presiunii p_4 la care se realizează saltul la formarea norului. Aceasta ar putea explica prezenţa buclelor descendente ale norilor *mammatus*.

În orice caz nivelul p_4 de apariţie a norului este superior, sau mult superior nivelului p_0 la care $e_0 = (E_p)_0 = E_\infty(T_0)$, adică la care umezeala relativă a masei de aer a atins 100% în cursul ascensiunii.

Aceasta explică în parte dece plafonul norilor *cumulus*, calculat pe diagramele aerologice curente pentru nivelul la care umezeala relativă atinge 100%, este de obicei inferior nivelului real, măsurat direct după apariţia norului.

În sfîrşit, întocmai ca în cazurile anterioare, dacă numărul de nuclee este mare, curba e devine o curbă e', retractată la bază spre origine. În acest caz creşterea picăturilor este mult diminuată, iar saltul razei poate dispare sau poate rămîne neînsemnat, cu toate că saturaţia curentă este realizată. Rezultă în această situaţie, numai o uşoară mărire a turbidităţii optice a aerului, aşa cum se întîmplă în cursul invaziilor de aer tropical bogat în nuclee de condensare, cînd aspectul cerului debine albicios. Uneori este vizibilă chiar o pînză diafană de nori *cirostratus* sau *altostratus* datorită unui infim salt al razei picăturilor supratopite.

În lucrările care urmează ne vom preocupa de sisteme eterogene de picături-germen şi de aspectele analitice ale problemelor puse în lucrarea de faţă.

ОБРАЗОВАНИЕ И РАССЕИВАНИЕ ОБЛАКОВ И ТУМАНА ВСЛЕДСТВИЕ ВНЕЗАПНЫХ ИЗМЕНЕНИЙ РАДИУСА КАПЕЛЬ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей работе авторы изучают взаимную зависимость радиусов капель и упругости паров в однордных конденсированных системах.

На диаграмме взаимной зависимости радиус-упругость точка пересечения C кривых: $e\,(r, p)$ — упругости в среде (5) и $E_p\,(r, T)$ — максимальной упругости, необходимой равновесию капли (12) (13), однозначно определяет радиус равновесия r_c и соответствующую упругость e_c (31).

На диаграмме кривые e (или E_p) стационарны, когда p (или T) постоянны и поднимаются, при возростании этих последних (рис. 1 и 2).

a_1) При изотермическом сжатии $E_p\,(r, T_o)$ стационарна, а кривая $e\,(r, p)$ поднимается, проходя через $e_1 \ldots\ldots e_5$, когда p возрастает, принимая значения $p_1 \ldots\ldots p_5$ (рис. 3 и 4). Превращение совершается сперва непрерывно, следуя по пути $C_1C_2C_3T_s$ на кривой E_p (равновесие: $e = E_p$), а затем внезапно перескакивает на путь $T_s S_4 C_4'$ на кривой e_4 (перенасыщение $e_4 > E_p$), когда радиус внезапно увеличивается и появляется туман, а далее снова непрерывно следует по пути $C_4' C_5$ на кривой E_p (равновесие: $e = E_p$). Внезапный переход от зарожденной капли к туману совершается при известном значении p_4 давления и между известными пределами радиуса r_c и упругости e.

a_2) При изотермическом расширении испарение капли следует, обычно, по обратному пути, но пределы внезапного перехода и соответствующее давление $p_2 < p_4$ — иные чем при конденсации. Рассеивание тумана следует по пути $T_i S_2 C_2$ (ненасыщенность: $e_2 < E_p$).

Точки верхнего T_s или нижнего T_i касания являются точками прерывистости.

$б_1$) При изобарном охлаждении e стационарна, а E_p опускается (рис. 5 и 6). Внезапный переход (появление тумана) происходит при температуре T_4, следуя по пути $T_sT_iC_4$ на кривой e [перенасыщение: $e > (E_p)_4$]. Остальное развитие проходит в равновесии со средой ($e = E_p$), следуя по путям $C_1C_2T_s$ (зарожденная капля) и $C_4'C_5$ (туман), расположенных оба на кривой e.

$б_2$) Изобарное нагревание и, следовательно, испарение капель следует по обратному пути. Внезапный переход происходит на пути T_iC_2, расположенном на кривой e [ненасыщенность: $e < (E_p)_2$], при температуре $T_2 > T_4$ и в других пределах по сравнению с конденсацией.

$в_1$) При адиабатическом расширении (охлаждение) (рис. 7 и 8), p и T снижаются и следовательно кривые e и E_p спускаются. Исходный путь $C_1C_2T_s$ и конечный путь $C_4'C_5$ описываются местом пересечений C (при $e = E_p$). Внезапное повышение (появление облака) происходит при давлении p_4 и температуре T_4 на пути T_sC_4', расположенном на кривой e_4 [перенасыщение: $e_4 > (E_p)_4$].

$в_2$) При адиабатическом сжатии (согревание) совокупность кривых e и E_p поднимается и внезапное испарение происходит на пути T_iC_2, расположенном на кривой e_2 [ненасыщение: $e_2 < (E_p)_2$], при $p_2 > p_4$ и $T_2 > T_4$. Исходный путь $C_5C_4'T_i$ и конечный путь C_2C_1 описывается тем же геометрическим местом пересечний C (при $e = E_p$).

Следует упомянуть, что слишком большое число конденсирующих ядер может превратить кривые e в кривые e' (представленные пунктиром на рисунке 3, 5 и 7, стянутые у основания к началу координат), так что повышение их вследствие внезапного перехода станет очень незначительным или исчезнет совсем из-за неспособности конденсированной системы превзойти фазу зарожденной капли.

LA FORMATION ET LA DISSIPATION DES NUAGES ET DU BROUILLARD PAR VARIATION BRUSQUE DU RAYON DES GOUTTES

(RÉSUMÉ)

Les Auteurs étudient les rayons des gouttes et les tensions des vapeurs correspondantes pour les systèmes condensés homogènes.

Sur un diagramme rayon-tension, le point d'intersection C des courbes: $e(r, p)$ — tension du milieu (5) — et $E_p(r, T)$ — tension maximum nécessaire à l'équilibre de la goutte (12) (13), — détermine une valeur unique du rayon d'équilibre r_c et de la tension correspondante e_c (31).

Les courbes e (ou E_p) restent stationnaires sur le diagramme pour p (ou T) constantes et s'élèvent si p (ou T) croît (fig. 1 et 2).

a_1) Dans la compression isotherme, $E_p(r, T_0)$ reste stationnaire, tandis que $e(r, p)$, s'élève, en passant par les positions $e_1, \ldots, e_5$ lorsque p croît en prenant les valeurs $p_1, \ldots, p_5$ (fig. 3 et 4).

La transformation s'accomplit d'abord d'une manière continue le long du segment $C_1C_2C_3T_s$ de la courbe E_p (équilibre: $e = E_p$), puis, par transition brusque, le long du segment $T_sS_4C_4'$ de la courbe e_4 (sursaturation: $e_4 > E_p$) lorsque le rayon croît brusquement et le brouillard apparaît, puis de nouveau d'une manière continue, le long du segment $C_4'C_5$ de la courbe E_p (équilibre: $e = E_p$). La transition brusque de la goutte-germe au brouillard a lieu pour une

valeur déterminée p_4 de la pression et entre des limites déterminées du rayon r_c et de la tension e.

a_2) Dans la détente isotherme, l'évaporation de la goutte suit, en général, une voie inverse, mais les limites de la transition brusque et la pression respective $p_2 < p_4$ sont différentes de celles de la condensation. La disparition du brouillard suit la voie $T_i S_2 C_2$ (non saturation: $e_2 < E_p$).

Les points de tangence supérieure T_s ou inférieure T_i sont des points de discontinuité.

b_1) Dans la baisse isobare de la température e reste stationnaire, tandis que E_p descend (fig. 5 et 6). La transition brusque (l'apparition du brouillard) a lieu à la temperature T_4 le long du segment $T_s T_i C_4'$ de la courbe e [sursaturation: $e > (E_p)_4$]. Les autres phases de l'évolution ont lieu en équilibre avec le milieu ($e = E_p$) le long des segments $C_1 C_2 T_s$ (goutte-germe) et $C_4' C_5$ (brouillard), tous les deux sur la courbe e.

b_2) La hausse isobare de la température, et par conséquent l'évaporation des gouttes, suit une voie inverse. La transition brusque a lieu par la voie $T_i C_2$ [non saturation: $e < (E_p)_2$] à une température $T_2 > T_4$ et entre d'autres limites que pour la condensation.

c_1) Dans la détente (baisse de température) adiabatique (fig. 7 et 8), p et T diminuent et, par conséquent, les courbes e et E_p descendent. Les segments:—initial $C_1 C_2 T_s$ et final $C_4' C_5$, sont décrits par le lieu géométrique des intersections C (pour $e = E_p$). L'augmentation brusque du rayon (apparition du nuage) a lieu à la pression p_4 et à la température T_4, le long du segment $T_s C_4'$ de la courbe e_4 [sursaturation: $e_4 > (E_p)_4$].

c_2) Dans la compression (hausse de température) adiabatique, l'ensemble e et E_p monte et l'évaporation brusque a lieu le long du segment $T_i C_2$ de la courbe e_2 [non saturation: $e_2 < (E_p)_2$], pour $p_2 > p_4$ et $T_2 > T_4$. Les segments:— initial $C_5 C_4' T_i$ et final $C_2 C_1$—, sont décrits sur le même lieu géométrique des intersections C (pour $e = E_p$).

Il faut mentionner qu'un trop grand nombre de noyaux de condensation peut transformer les courbes e en courbes e' (indiquées par des pointillés sur les figures 3, 5 et 7 et rétractées à la base vers l'origine), de sorte que l'augmentation par transition brusque devient très petite ou disparaît complètement, le système condensé ne pouvant plus dépasser la phase de goutte-germe.

BIBLIOGRAFIE

1. P. I. Tverskoi și colab., *Kurs Meteorologhii*. Ghidrometeorologhiceskoe izdatelstvo, Leningrad, 1951.

STUDII ȘI CERCETĂRI DE FIZICĂ
Tomul VI, nr. 2, 1955

INFLUENȚA VAPORILOR DE MERCUR ASUPRA EMULSIILOR FOTOGRAFICE GROASE *)

DE

MARIETA NICOLAE

1. După cum se știe, emulsiile fotografice obișnuite sînt sensibilizate prin prezența vaporilor de mercur [1], [2]. Totuși, în literatură se găsesc date contradictorii [3].

Cu toată abundența lucrărilor cu privire la emulsiile fotografice groase, utilizate în fizica nucleară, influența vaporilor de mercur asupra acestor emulsii nu a fost studiată, după știrea noastră, decît de un singur autor [4], [5]. Afirmația că vaporii de mercur ar reduce sensibilitatea acestor emulsii într-un raport de 1: 20 [4], ni s-a părut dubioasă, întrucît în atmosfera oricărui laborator de fizică se găsesc 10^{-3} mm Hg.

2. Pentru studiul acestei probleme am făcut următoarea experiență.

Am întrebuințat două exsicatoare pentru vid identice, dintre care la unul am adaptat un manometru cu Hg, iar la celălalt un manometru cu ulei (ftalat de butil). Exsicatoarele au fost spălate și pregătite pentru a păstra vid în timpul experienței.

S-au luat apoi două plăci cu emulsii groase (fabricate în laborator în condiții identice și din aceeași emulsie) care au fost impresionate în condiții identice prin înmuiere într-o soluție de Th $(NO_3)_4$ timp de 3—4 minute. Plăcile fiind uscate repede cu alcool, au fost introduse, una în exsicatorul cu vapori de Hg și una în exsicatorul cu ulei, ca placă martor. Apoi în ambele exsicatoare s-a făcut vid ($\sim 10^{-2}$ mm Hg) cu o pompă rotativă cu ulei. Manometrele ne-au indicat dacă exsicatoarele au păstrat vid în timpul experienței.

Expunerea plăcilor din cele două exsicatoare a durat 10 zile, la temperatura laboratorului de circa 22°C la întuneric. În tot timpul experienței, în cele două exsicatoare a existat $CaCl_2$ pentru a îndepărta vapori de apă care ar fi putut să accelereze regresia fotografică.

După zece zile ambele plăci au fost scoase din exsicatoare, au fost developate și fixate în condiții identice și apoi studiate la microscop. Pe fiecare placă (vapori de Hg și martor) au fost măsurate la microscop, lucrînd cu imersie și cu ocular micrometric, la un grosisment total de 1350, cîte 1200 urme

*) Lucrare prezentată Institutului de fizică la data de 18 decembrie 1954.

de particule α. Traiectoriile măsurate au fost luate la rînd, indiferent de lungimea lor, măsurînd o suprafață ce a fost citită prin deplasarea mesei microscopului.

După ce s-au calculat lungimile reale în emulsie ale traiectoriilor măsurate, s-a făcut statistica lor. Pe baza acesteia s-au reprezentat în paralel pentru cele două plăci (martor și vapori de Hg) histogramele parcursurilor (fig. 1).

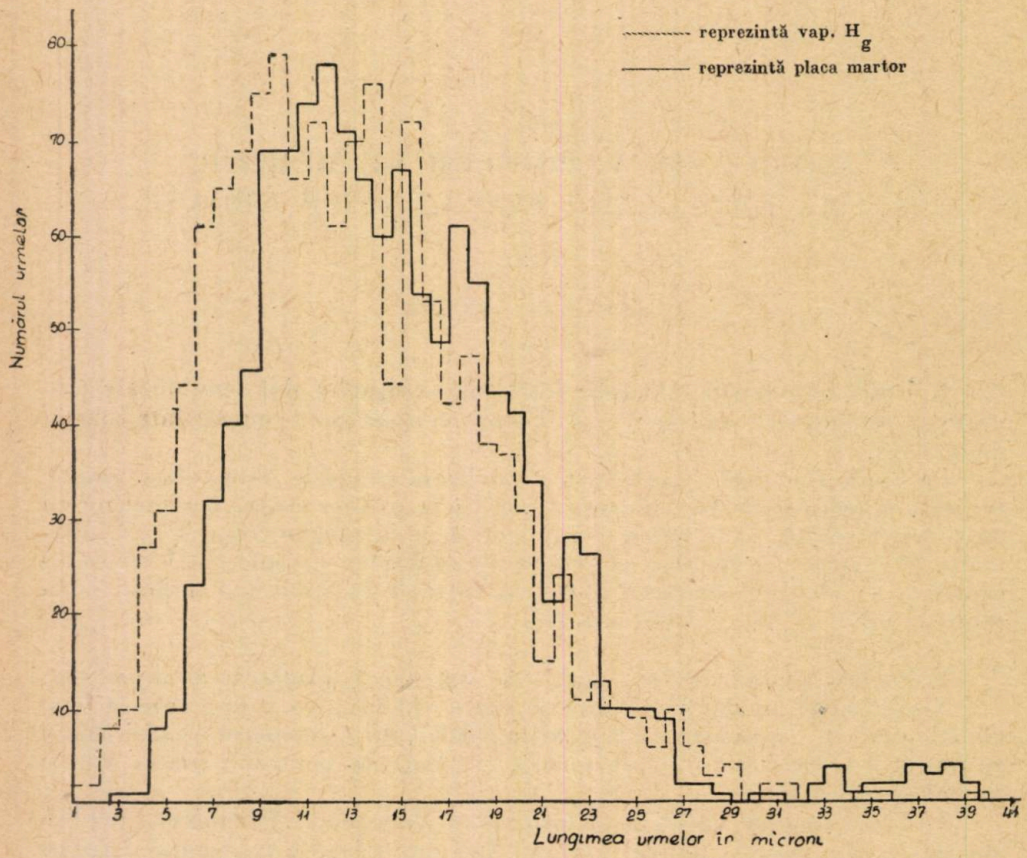


Fig. 1

Experiența descrisă s-a repetat de două ori și în ambele cazuri s-au obținut calitativ aceleași rezultate.

3. Din histograme se vede că pe placa ținută sub acțiunea vaporilor de Hg sînt mai frecvente parcursurile mai scurte, iar maximul se găsește deplasat cu circa 3 μ spre lungimi mai mici decît la placa martor. De asemenea pe placa cu vapori de Hg cele 1200 urme s-au citit de pe o suprafață de 0,82 mm², iar pe placa martor de pe 0,77 mm².

Aceste rezultate impun concluzia că vaporii de Hg acționează asupra emulsiilor nucleare, deși într-o măsură mult mai redusă decît se afirmă [4]. Întrucît însă urmele s-au format în condițiile experienței în tot intervalul expunerii, vaporii de Hg ar fi putut să acționeze fie asupra stratului sensibil, fie asupra imaginii latente.

Cauza scurtării urmelor sub influența vaporilor de Hg s-ar putea explica deci prin două fenomene diferite, care ar putea avea loc și împreună:

a) Existența unei acțiuni asupra centrelor de sensibilitate ai emulsiei, provocînd o desensibilizare a ei.

b) Existența unei acțiuni asupra centrelor de developare, provocînd o regresie a imaginii latente.

Existența acestui din urmă fenomen nu exclude nici posibilitatea unei acțiuni de sensibilizare.

Pe baza rezultatelor găsite s-au făcut experiențe în continuare pentru a discerna între cele două fenomene pe cel real.

S-au efectuat astfel experiențe pentru a studia influența vaporilor de Hg asupra regresiei, reducînd pe cît posibil prin condițiile experienței posibilitatea desensibilizării.

Datele acestor experiențe sînt în curs de prelucrare și vor fi comunicate într-o Notă viitoare.

Prin rezultatele preliminare comunicate aici, ținem să atragem atenția asupra posibilității ca și alte substanțe chimice să prezinte efecte similare (sau contrare), ceea ce impune eventual experiențe speciale de control în cazul dozării sau identificării radioactivității unor minereuri.

ВЛИЯНИЕ ПАРОВ РТУТИ НА ТОЛСТОСЛОЙНЫЕ ФОТОЭМУЛЬСИИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей работе излагаются количественные результаты исследований действия паров ртути на толстослойные фотоэмульсии.

Подвергая в течение 10 дней действию паров ртути пластинки, пропитанные радиоактивным раствором, автор констатировал уменьшение числа следов частиц α.

Это явление может быть объяснено действием паров ртути либо на центры чувствительности (десенсибилизирующее действие), либо на центры скрытого изображения (регрессивное действие).

L'INFLUENCE DES VAPEURS DE HG SUR LA SENSIBILITÉ DES ÉMULSIONS PHOTOGRAPHIQUES ÉPAISSES

(RÉSUMÉ)

L'Auteur expose dans ce travail certains résultats qualitatifs ayant trait à l'action des vapeurs de mercure sur les émulsions photographiques épaisses.

En exposant, pendant 10 jours, les plaques imbibées d'une solution radioactive à l'action des vapeurs de Hg, on a constaté une diminution des traces de particules α.

Ce résultat pourrait s'expliquer par l'action des vapeurs de Hg soit sur les centres de sensibilité (action de désensibilisation) soit sur les centres d'image latente (action de régression).

BIBLIOGRAFIE

1. F. Dersch a. H. Dürr, Journ. Soc. Mat. Pict. Eng., 1937, t. 28, p. 178.
2. S. E. Sheppard, W. Vanselow a. R. F. Quirk, Journ. Franklin Inst., 1945, t 240, p. 439.
3. A. Rondier et E. Vassy, C. R., 1944, t. 218, p. 45.
4. H. Vagoda, Am. Mineralogist, 1946, t. 31, p. 87.
5. — *Radioactive Measurements with Nuclear Emulsions.* New York, 1949.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE FIZICĂ
Tomul VI, nr. 2, 1955

CONTRIBUŢII LA PROBLEMA NATURII PARTICULELOR CARE GENEREAZĂ «STELE» ÎN EMULSII NUCLEARE *)

DE

C. BERCEA

I. *Introducere.* Pînă în 1949, generarea reacţiilor de mică energie în radiaţia cosmică (« stele » observate în emulsii nucleare) se atribuia nucleonilor de mică energie, existenţi în mare număr în atmosferă (în majoritate neutroni) [1].

Încercări de a pune în evidenţă particule instabile în componenta generatoare [2], [3], nu au dat rezultate.

În lucrarea [4], autorii, folosind binecunoscuta metodă de compensaţie [5], reuşesc să obţină primele indicaţii asupra existenţei unor particule instabile în componenta generatoare, fără a stabili natura acestor particule. Ei arată că efectul de dezintegrare observat poate fi interpretat în două moduri:

1. Particulele care generează « stelele » sînt instabile şi condiţionează direct efectul de dezintegrare.

2. Particulele care generează « stelele » sînt stabile, dar sînt generate în atmosferă de o componentă conţinînd, cel puţin parţial, particule instabile.

După părerea autorilor, varianta 1 este cea mai plauzibilă.

Problema naturii particulelor generatoare instabile a fost atacată ulterior [6]. Autorul, lucrînd în prima dintre cele două ipoteze de mai sus, face o analiză a rezultatelor lucrării [4], reuşind să arate că nici una dintre combinaţiile de particule stabile şi instabile cunoscute la acea dată ca existînd în atmosferă, nu poate fi considerată responsabilă de efectul observat.

După cum se ştie, calculul efectului de compensaţie implică cunoaşterea energiei particulelor instabile. În varianta 1 această mărime se poate evalua din energia « stelei » [7]. La data apariţiei lucrării [6], nu exista încă o metodă pentru a determina această mărime în varianta 2.

În lucrarea [8], se dă o metodă, care între altele, rezolvă această dificultate. Eficacitatea acestei metode a fost verificată în experienţe asupra jerbelor nucleare [9].

Scopul Notei de faţă este de a analiza rezultatele lucrării [4] folosind varianta 2 a efectului de dezintegrare.

---

*) Lucrare prezentată Institutului de fizică la data de 18 decembrie 1954.

II. *Metoda de lucru.* În cele ce urmează, vom presupune că aproape totalitatea «stelelor» observate în emulsiile nucleare sînt generate de neutroni, care la rîndul lor, sînt generați prin interacțiunea unor nucleoni și mezoni π de mare energie cu nucleele atmosferei [10], [11].

După cum s-a arătat în [8], energia medie $\bar{\epsilon}$ a mezonilor π poate fi evaluată studiind variația efectului de compensație Q cu distanța redusă ζ dintre punctele de observație

$$Q = \frac{1+\rho}{e^{-\frac{K\tau}{\bar{\epsilon}_0}} + \rho} \tag{1}$$

unde Q este efectul de compensație, ρ raportul nucleoni/mezoni, ϵ_0 energia minimă de generare a neutronilor nuclear activi și K ($\sim 0{,}4$), un coeficient numeric definit în [8]. Cunoscînd spectrul mezonilor π [12], se calculează $\bar{\epsilon}$ din ϵ_0 ($\bar{\epsilon} \sim 2 \ldots 3\epsilon_0$).

În [8] și [9] s-au indicat diferite căi pentru a determina pe ϵ_0 și ρ din relația (1). La analiza materialului lucrării [4], a trebuit să se țină în seamă faptul că autorii n-au făcut observații decît la trei altitudini diferite. Ca atare, nu se ia în considerare decît metoda analitică de calcul [9], și anume:

Din observațiile făcute la trei altitudini diferite se pot calcula două valori Q_1 și Q_2 ale efectului de compensație, corespunzătoare diferențelor de altitudini reduse ζ_1 și ζ_2. Aplicînd de două ori ecuația (1) și eliminînd pe ρ se obține după calcule elementare

$$x^{\alpha} = \frac{1-A_2}{1-A_1}\, x + \frac{A_2 - A_1}{1-A_1}, \tag{2}$$

unde

$$x = e^{-\frac{K\zeta_1}{\epsilon_0}} \tag{3}$$

și

$$A_i = \frac{1}{Q_i} \tag{4}$$

$$\alpha = \frac{\zeta_2}{\zeta_1}, \tag{5}$$

unde

$$\zeta = \frac{\mu\, \Delta z}{M\, c\, \tau_0}.$$

Rezolvarea, pe cale grafică, a acestei ecuații ne dă pe x și de aici se poate ușor calcula $\bar{\epsilon}$ și ρ.

III. *Prelucrarea materialului experimental.* În lucrarea [4] s-a măsurat efectul de compensație pentru «stele» cu două și trei ramuri, cu patru și mai

multe ramuri și pentru particule încărcate izolate («stele» cu o ramură). Efectul de compensație pentru aceste categorii de evenimente este dat în tabloul nr. 1 (s-a calculat efectul de compensație numai pentru grafit). Din acest tabloul se vede că numai coloanele 1 și 4 prezintă un efect de compensație marcat. Rezultatul prelucrării acestor coloane cu ajutorul ecuației (2) este dat în tabloul nr. 2.

Tabloul nr. 1

ζ	Q				
	1	2	3	4	5
21	1,68	1,11	1,36	1,232	1,00
41,5	1,79	1,00	1,33	1,60	~ 1

Legenda: 1. $N = 2-3$ 4. $N = 1$, plăci A
2. $N \geqslant 4$ 5. $N = 1$, „ B
3. Total

Tabloul nr. 2

Coloana nr.		1	4
ϵ_0	GeV	~ 3	~ 13
$\bar{\epsilon}$	GeV	~ 7	~ 26
ρ		$\sim 1,3$	< 0

IV. *Discuția rezultatelor.* Dacă se calculează energia «stelei» cu una, două, sau trei ramuri cu ajutorul [7] se obțin respectiv 45. .65 MeV.

Presupunînd că neutronii generatori provin din «evaporarea» nucleului cu care a interacționat mezonul π, ei nu pot avea, în nici un caz, energii de ordinul celor de mai sus.

În caz că atribuim generarea «stelelor» unor neutroni δ, se poate arăta cu ușurință că energia neutronilor, dedusă din datele tabloului nr. 2, este de asemenea în contradicție cu cifrele arătate mai sus. Într-adevăr, în lucrarea [13] s-a arătat că, la ciocnirea cu un nucleu, particula incidentă cedează mezonilor mai puțin de o treime din energia ei, restul energiei fiind transmis unuia sau cel mult la doi nucleoni. Reiese că energia minimă a neutronilor δ este de $\sim 2\,000$ MeV.

În plus, din tabloul nr. 2 rezultă o energie mai mare pentru generarea unor neutroni lenți decît pentru generarea unor neutroni rapizi, ceea ce este evident absurd.

Valoarea negativă pentru ρ ne arată și ea că nu efectul normal de dezintegrare al mezonilor π este cel observat.

V. *Concluzie.* Din lucrarea de față rezultă că ipoteza 2 nu poate explica efectul de dezintegrare observat. Prin urmare, problema naturii particulelor instabile care generează « stele » în emulsiile nucleare rămîne deschisă.

К ВОПРОСУ О ПРИРОДЕ ЧАСТИЦ, ГЕНЕРИРУЮЩИХ «ЗВЕЗДЫ» В ЯДЕРНЫХ ЭМУЛЬСИЯХ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящем сообщении автор рассматривает результаты работы [4] на основании предположения, что частицы, генерирующие «звезды» в ядерных эмульсиях, стабильны, но генерируются в атмосфере, по крайней мере, частично, π-мезонами.

Используя метод изменения компенсационного эффекта [8], автор показывает, что как энергия π-мезонов, получаемая обработкой компенсационного эффекта, наблюдавшегося в [4], так и относительное содержание этих мезонов в генерирующей компоненте противоречат имеющимся экспериментальным данным.

Таким образом, распад 2-го рода π-мезонов, а тем более всякой другой известной нестабильной частицы не может объяснить наблюдаемое явление.

CONTRIBUTION AU PROBLÈME DE LA NATURE DES PARTICULES QUI GÉNÈRENT DES « ÉTOILES » DANS DES ÉMULSIONS NUCLÉAIRES

(RÉSUMÉ)

Dans la Note présente, l'Auteur fait une analyse des résultats obtenus par [4] en supposant que les « étoiles » observées dans les émulsions nucléaires sont générées par des particules stables provenant, au moins partiellement, des collisions entre des mésons π et les noyaux de l'atmosphère.

En usant de la méthode de la variation de l'effet de compensation [8], l'Auteur démontre que l'énergie des mésons π, obtenue en partant de l'effet de compensation observé, ainsi que l'abondance relative de ces mésons contredisent l'ensemble des faits expérimentaux connus.

Par conséquent, la désintégration de seconde espèce des mésons π et — à plus forte raison — de toute autre particule instable connue est insuffisante pour expliquer l'effet observé.

BIBLIOGRAFIE

1. B. Rossi, Rev. Mod. Phys., 1948, t. 20, p. 3.
2. D. Perkins et al., Nature, 1949, t. 163, p. 319.
3. S. Lattimore, Phil. Mag., 1949, t. 40, p. 394.
4. G. Belovițky, N. Maslenikova, V. Smirnov i L. Suhov, DAN SSSR, 1949, t. 69, 321.
5. B. Rossi a. A. Hall, Phys. Rev., 1941, t. 59, p. 223.
6. E. Friedländer, Comunicările Acad. R.P.R., t. III, nr. 1—2, ianuarie-septembrie 1953, p. 32.
7. U. Camerini, W. Lock, D. Perkins, *Progress in Cosmic Ray Physics*. Amsterdam, 1952, p. 40.
8. E. Friedländer, Comunicările Acad. R.P.R., t. V, nr. 1, ianuarie 1955, p. 43.
9. E. Friedländer, C. Iussim și M. Mayer, Studii și Cercetări de Fizică. Acest volum, p. 229
10. G. Zaţepin, DAN SSSR, 1949, t. 67, p. 993.
11. V. Kamalian i A. Alihanian, DAN SSSR, 1954 t. 97, p. 425.
12. N. Grigorov i S. Murzin, Izvestia AN SSSR, 1953, t. 17, p. 21.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE FIZICĂ
Tomul VI, nr. 2, 1955

ASUPRA STĂRILOR DE SUPRAFAŢĂ ALE DIELECTRICILOR CRISTALINI*)

DE

V. SERGIESCU

Luarea în considerare a dimensiunilor finite ale unui cristal are, după cum se ştie, importante consecinţe în ceea ce priveşte spectrul de energii şi funcţiile de undă ale solidului. În acest caz, chiar în absenţa defectelor de structură generatoare de nivele locale, apar stări « de suprafaţă », în care funcţia de undă prezintă un maximum pronunţat în vecinătatea frontierei cristalului şi electronul este deci practic localizat în această regiune. În teoria zonelor şi anume, în cazul metalelor, stările de suprafaţă au fost studiate de mult timp [1], [2], [3], [4] şi [5], pentru ca relativ recent să-şi găsească o importantă aplicaţie în problema contactului metal-semiconductor [6].

Astfel de stări există, desigur, şi în dielectrici. În acest caz însă, teoria zonelor nu poate descrie *toate* stările solidului şi se pune întrebarea dacă nu cumva, printre stările neglijate de teoria zonelor şi incluse numai în anumite teorii, în principiu mai exacte (teoria excitonilor, teoria polaronilor), nu se află de asemenea stări localizate superficial. În cele ce urmează se caută a se da un prim răspuns la această întrebare.

I. STĂRILE DE SUPRAFAŢĂ ALE POLARONILOR

§ 1. Nu există o metodă unică de tratare a stărilor polaronice şi în această lucrare vom folosi *metoda adiabatică* în forma datorită lui P e k a r [7] şi [8].

Vom considera un cristal (ionic) extins la infinit în direcţiile y, z şi limitat prin două feţe paralele cu planul $O\,y\,z$ în direcţia x (fig. 1). Fie L grosimea cristalului. După P e k a r, expresia hamiltonianului întregului solid este

$$\left(\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2\,m}\,\Delta + W\,(\bar{r})\right) + V\,(\bar{r},\,t) + V'\,(\bar{r},\,t) + H_{\text{opt, long}} + H_{\text{opt, tr}} + H_{\text{ac}}\,, \qquad (1)$$

unde $-\frac{\hbar^2}{2\,m}\,\Delta$ este operatorul energiei cinetice a electronului suplimentar (electronul « de conductibilitate »), $W\,(\bar{r})$ energia potenţială a acestui electron în cîmpul periodic al cristalului cînd se neglijează efectul de polarizare, $V\,(\bar{r},\,t)$

*) Lucrare prezentată Institutului de fizică la data de 3 ianuarie 1955.

intersecțiunea de polarizare a electronului cu cristalul, $V'(\bar{r}, t)$ termenul corectiv care ține seama de greșeala făcută atunci cînd calculăm $V(\bar{r}, t)$ macroscopic, $H_{\text{opt, long}}$ și $H_{\text{opt, tr}}$ hamiltonienii mișcării ionilor corespunzători modurilor optice longitudinale și transversale, H_{ac} hamiltonianul aceleiași mișcări dar corespunzător modurilor acustice.

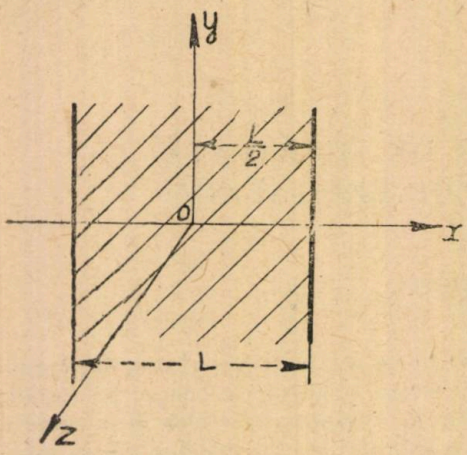


Fig. 1

$W(\bar{r})$ este o funcție perfect periodică în interiorul cristalului și riguros nulă în afara lui (neglijăm, prin urmare, deformarea potențialului cristalin în apropierea suprafeței corpului). În primă aproximație vom neglija de asemenea, împreună cu P e k a r, termenul corectiv $V'(\bar{r}, t)$. În ceea ce privește termenul esențial de polarizare $V(\bar{r}, t)$, el are forma

$$V(\bar{r}, t) = e \int \frac{\overline{P}(\bar{r}_1, t)\,(\bar{r} - \bar{r}_1)}{|\bar{r} - \bar{r}_1|^3}\, d\tau_1 , \quad (2)$$

unde $\overline{P}(\bar{r}_1, t)$ reprezintă polarizarea mediului în punctul $\bar{r}_1$ și integrala se extinde asupra întregului spațiu. În teoria polaronilor, starea de polarizare a mediului face ea însăși parte din necunoscutele problemei, așa încît în principiu n-am avea dreptul să presupunem *a priori* că polarizarea este nulă în afara cristalului. În realitate însă, polarizarea nu poate fi diferită de zero acolo unde cristalul nu există, deci în afara celor două plane $x = \frac{L}{2}$ și $x = -\frac{L}{2}$, și nu rămîne ca variabilă necunoscută decît polarizarea interioară. Nu vom face însă uz de această observație și vom lăsa deschisă problema valorii lui $\overline{P}(\bar{r}, t)$ în afara cristalului, fără să ne facem de altfel nici o iluzie asupra plusului de exactitate obținut în acest fel și conduși numai de considerente de comoditate a scrierii (este mai avantajos să lucrăm tot timpul cu integrale extinse efectiv la tot spațiul). Pe de altă parte, în interiorul cristalului, vom dezvolta polarizarea în serie Fourier, ceea ce presupune că am folosit artificiul prelungirii periodice formale a funcției $\overline{P}(\bar{r}, t)$ în afara cristalului

$$\overline{P}(\bar{r}, t) = \sum_{\overline{K}} \overline{P}_{\overline{K}}(t) \cdot \chi_{\overline{K}}(\bar{r}) \qquad \text{(la interior !)} \quad (3)$$

$$\chi_{\overline{K}}(\bar{r}) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L^3}} \cos(\bar{k}\,\bar{r}) \ldots . k_x \leqslant 0 \\ \sqrt{\frac{2}{L^3}} \sin(\bar{k}\,r) \ldots . k_x > 0 \end{cases} \quad (3')$$

$$\overline{P}_K(t) = \int_{L^3} \overline{P}(\bar{r}, t)\ \chi_{\overline{K}}(\bar{r})\, d\tau$$

Riguros vorbind, modul de scriere (3′) presupune că inițial cristalul este limitat și în direcțiile y, z, avînd forma unui cub de volum L^3, dar că, după procedeul folosit în teoria spectrului continuu, în formulele finale vom face ca muchiile perpendiculare pe axa x să crească nelimitat (în timp ce muchiile paralele cu această axă își păstrează lungimea neschimbată pentru ca specificul problemei — caracterul finit al cristalului — să nu dispară).

Se arată ușor [7] că numai partea irotațională din $\overline{P}$ dă o contribuție care nu este nulă la integrala (2), ceea ce înseamnă că interacțiunea de polarizare nu este efectivă decît între electron și undele longitudinale ale mișcării ionilor. De aici înainte vom înțelege prin $\overline{P}$, în (2), (3), (3′) ca și în formulele ulterioare, numai această parte irotațională și, din ea, numai termenul corespunzător modurilor optice de vibrație (pentru modurile acustice, polarizarea este în medie nulă chiar pe regiuni de ordinul de mărime al unei celule cristaline). În aceste condiții, problema interacțiunii electron-cristal se reduce [7] la problema hamiltonianului

$$H = \mathcal{H} - H_{\text{opt, tr}} - H_{\text{ac}} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + W(\bar{r}) + V(\bar{r}) + H_{\text{opt, long}} \tag{4}$$

§ 2. Vom aplica, după cum am spus, metoda adiabatică, iar celulele care urmează sînt reproducerea fidelă a calculelor lui P e k a r [7], cu modificările impuse de caracterul finit al cristalului. În primă aproximație ionii sînt presupuși în repaus (în pozițiile deplasate corespunzătoare cristalului polarizat) și mișcarea electronului suplimentar rezultă din rezolvarea următoarei ecuații a lui Schrödinger:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + W(\bar{r}) + V(\bar{r})\right]\cdot \psi(\bar{r}) = E.\psi(\bar{r}). \tag{5}$$

În a doua aproximație se determină mișcarea ionilor prin rezolvarea ecuației Schrödinger corespunzătoare hamiltonianului global

$$H = E(\ldots, \overline{P}_{\overline{K}}, \ldots) + H_{\text{opt, long}} \tag{5′}$$

în care energia E a mișcării electronului, obținută din (5), ca funcție de coordonatele $\overline{P}_{\overline{K}}$ ale mișcării ionilor, apare deci ca energie potențială pentru ioni. Valorile proprii ale operatorului (5′) dau energiile posibile ale sistemului «electron + cristal», produsul funcțiilor sale proprii prin soluțiile proprii ale ecuației (5) reprezintă funcțiile de undă posibile pentru acest sistem.

Rezolvarea directă a ecuației (5) se ocolește prin metoda variațională. Dacă dispunem de o soluție aproximativă $\psi(\bar{r})$, avem

$$E(\ldots, \overline{P}_{\overline{K}}, \ldots) \approx -\frac{\hbar^2}{2m}\int \psi^* \Delta\psi \, d\tau + \int \psi^* W \psi \, d\tau + \int \psi^* V \psi \, d\tau =$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\int [\operatorname{div}(\psi^* \cdot \operatorname{grad}\psi) - \operatorname{grad}\psi^* \cdot \operatorname{grad}\psi] d\tau + \int \psi^*(\bar{r}) W(\bar{r}) \psi(\bar{r}) \, d\tau +$$

$$+ e\int \psi^*(\bar{r}) \psi(\bar{r}) \, d\tau \int \frac{\overline{P}(\bar{r}_1, t)(\bar{r} - \bar{r}_1)}{|\bar{r} - \bar{r}_1|^3} d\tau_1 =$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m}\int |\operatorname{grad}\psi|^2 \cdot d\tau - \int \overline{P}(\bar{r}_1, t)\, \overline{D}[\psi, \bar{r}_1] \, d\tau_1 + \int \psi^*(\bar{r}) \psi(\bar{r}), W(\bar{r}) \, d\tau, \tag{6}$$

unde am pus

$$\overline{D}[\psi, \bar{r}_1] \equiv e\int |\psi(\bar{r})|^2 \frac{\bar{r}_1 - \bar{r}}{|\bar{r}_1 - \bar{r}|^3} \mathrm{d}\tau. \tag{7}$$

prin urmare,

$$H \approx \frac{\hbar^2}{2m}\int |\operatorname{grad}\psi(\bar{r})|^2 \mathrm{d}\tau + \int |\psi(\bar{r})|^2 \cdot W(\bar{r}) \cdot \mathrm{d}\tau -$$

$$-\int \overline{P}(\bar{r}_1, t)\, \overline{D}(\psi_1 \bar{r}_1] \mathrm{d}\tau + H_{\text{opt,long}}$$

$$\approx \frac{\hbar^2}{2m}\int |\operatorname{grad}\psi(\bar{r})|^2 \mathrm{d}\tau + \int |\psi(\bar{r})|^2 W(\bar{r})\, \mathrm{d}\tau -$$

$$-\int \overline{P}(\bar{r}_1, t)\, \overline{D}[\psi, \bar{r}_1] \mathrm{d}\tau_1 + \frac{2\pi}{c}\int \overline{P}^2(\bar{r}, t) + \frac{1}{\omega^2}\dot{\overline{P}}^2(\bar{r}, t)\, \mathrm{d}\tau, \tag{8}$$

unde

$$c \equiv \frac{1}{n^2} - \frac{1}{\varepsilon}$$

n = indicele de refracție corespunzător modurilor optice

ε = constanta dielectrică statică.

§ 3. Urmîndu-l pe P e k a r [7], vom considera întîi cazul *temperaturilor joase*, la care sistemul se află de preferință în starea fundamentală sau în stări apropiate de ea. În astfel de stări, mișcarea ionilor poate fi neglijată și sistemul este descris prin funcțiile $\psi(\bar{r})$ și $\overline{P}(\bar{r})$ care fac minimă partea din H independentă de $\overline{P}(\bar{r})$; într-adevăr, această parte joacă rolul de energie potențială pentru mișcarea ionilor și în stările inferioare ionii se află în poziții care îi dau o valoare cît mai mică. Minimalizarea expresiei menționate

$$F_{\text{pot}}[\psi, \overline{P}] \equiv \frac{\hbar^2}{2m}\int |\operatorname{grad}\psi(\bar{r})|^2 \cdot \mathrm{d}\tau + \int |\psi(\bar{r})|^2 \cdot W(\bar{r})\, \mathrm{d}\tau - \int$$

$$\int \overline{P}(\bar{r}_1)\, \overline{D}[\psi, \bar{r}]\, \mathrm{d}\tau_1 + \frac{2\pi}{c}\int \overline{P}^2(\bar{r})\, \mathrm{d}\tau, \tag{9}$$

este făcută de P e k a r în două etape: mai întîi față de $\overline{P}$ și apoi față de ψ. Prima etapă decurge în același mod și cu același rezultat și în cazul nostru

$$0 = -\int \delta\overline{P}(\bar{r}_1)\, \overline{D}[\psi, \bar{r}_1] \mathrm{d}\tau, + \frac{2\pi}{c}\int 2\overline{P}(\bar{r})\, \delta\overline{P}(\bar{r}) \mathrm{d}\tau,$$

$$\overline{P}(r) = \frac{c}{4\pi}\overline{D}[\psi, \bar{r}], \tag{10}$$

ceea ce conduce la

$$F_{\text{pot}}[\psi, \frac{c}{4\pi}\bar{D}] = \frac{\hbar^2}{2m}\int |\operatorname{grad}\psi(\bar{r})|^2 \cdot d\tau + \int |\psi(\bar{r})|^2 \cdot W(\bar{r}) \cdot d\tau - \\ - \frac{c}{8\pi}\int \bar{D}^2[\psi, \bar{r}]\, d\tau. \tag{9'}$$

În schimb a doua etapă, care constă în minimalizarea funcționalei (9') față de ψ, întîmpină mari dificultăți, provenite din faptul că *metoda masei efective*, care ușurează în mod esențial calculele în cazul cristalului infinit, nu pare aplicabilă în cazul nostru; de exemplu, în justificarea acestei metode, în ecuația (4,12) din lucrarea [7], se folosește soluția (4,8) din [7], valabilă numai pentru o rețea infinită.

De aceea procedăm altfel. Considerațiile care urmează sînt desigur calitative dar suficiente, credem, pentru scopul nostru, adică pentru a ne da seama dacă există sau nu stări polaronice de suprafață (expresia matematică precisă a acestor stări, dacă ele există efectiv, ne interesează mai puțin). Ne vom baza, anume, pe faptul că etapa a doua de minimalizare a expresiei (9') duce în cazul cristalului infinit la soluția $\psi_0(\bar{r} - \bar{\xi})$, unde $\bar{\xi}$ reprezintă vectorul de poziție al centrului polaronului*). Existența unei astfel de soluții înseamnă că acțiunea perturbătoare (polarizatoare) a electronului suplimentar se întinde practic numai pe o rază finită R. În anexa 1) se va arăta că raza «de polarizare» R este mai mare decît așa-numita rază r_p a polaronului introdusă de P e k a r. Or, nu există nici un motiv pentru ca, în cazul cristalului finit, groapa de polarizare să nu aibă aceleași dimensiuni. Funcția ψ căutată descrie comportarea electronului în această groapă și are prin urmare forma

$$\psi(\bar{r}) \approx \psi_0(\bar{r} - \bar{\xi}) \qquad \text{pentru} \quad -\frac{L}{2} + R < \xi_x < \frac{1}{2} - R. \tag{11}$$

Pentru valori ale parametrului ξ_x din afara intervalului menționat, *nu* există soluții de tip (11). Ele ar corespunde unui polaron al cărui centru a pătruns într-o fîșie periferică de grosime R (sau a ieșit chiar cu totul din cristal, ceea ce este evident necorespunzător cu realitatea) (fig. 2 *a*). Este aici cazul să ne amintim că polarizarea nu poate fi diferită de zero în afara cristalului (§ 1), de unde rezultă că polaronul din figura 2, *a*, dacă există, trebuie de fapt să fie «amputat» de o calotă sferică, așa cum se vede în figura 2, *b*. Însă un astfel de polaron este lipsit de stabilitate, deoarece polarizarea mediului este distribuită nesimetric în jurul electronului și prin urmare îl va «aspira» în interiorul cristalului.

De altfel putem controla și direct valabilitatea soluției (11) ca și unicitatea ei. În acest scop să revenim la ecuația (5), care determină funcția $\psi(\bar{r})$ cînd polarizarea este dată prin formula (10). În cazul cristalului finit, ecuația (5) are deci forma

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\bar{r}) + W(\bar{r})\,\psi(\bar{r}) + \\ + \left[e^2\frac{c}{4\pi}\int \frac{\bar{r} - \bar{r}_1}{|\bar{r} - \bar{r}_1|^3}\, d\tau_1 \int |\psi(\bar{r}_2)|^2 \frac{\bar{r}_1 - \bar{r}_2}{|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|^3}\, d\tau_2\right]\psi(\bar{r}) = E\,\psi(\bar{r}), \tag{12}$$

*) $\psi_0(\bar{r} - \bar{\xi})$ este soluția corespunzătoare stării fundamentale a electronului în groapa de polarizare. Raționamentele care urmează sînt însă valabile și pentru stările sale excitate.

în timp ce în cazul cristalului infinit ea se deosebește numai prin termenul cu energia potențială

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\bar{r})+W^{(0)}(\bar{r})\psi(\bar{r})+$$
$$+\left[e^2\frac{c}{4\pi}\int\frac{\bar{r}-\bar{r}_1}{|\bar{r}-\bar{r}_1|^3}\,d\tau_1\int|\psi(\bar{r}_2)|^2\frac{\bar{r}_1-\bar{r}_2}{|\bar{r}-\bar{r}_2|^3}\,d\tau_2\right]\psi(\bar{r})=E\psi(\bar{r}). \tag{12'}$$

Prin $W^{(0)}(\bar{r})$, adică energia potențială a cristalului infinit, înțelegem o funcție egală cu $W(\bar{r})$ în interiorul lui, dar diferită de zero și egală cu pre-

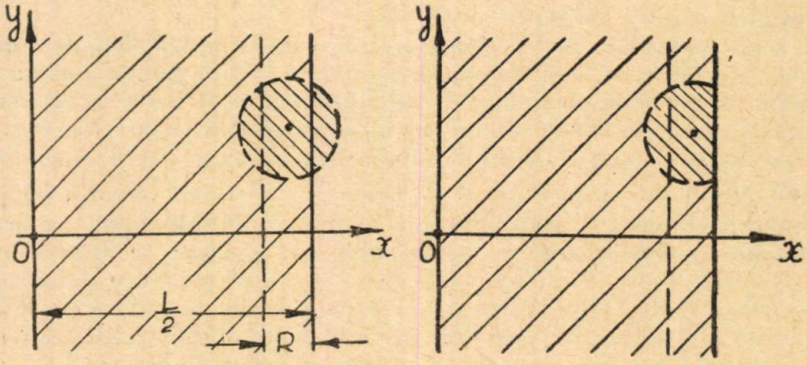


Fig. 2

lungirea periodică a lui $W(\bar{r})$ la exterior. Este atunci clar că o funcție (11), soluție prin definiție a ecuației (12'), este soluție și a ecuației (12), corespunzătoare unei aceleiași valori proprii E. Într-adevăr, cele două ecuații se deosebesc numai prin termenul al doilea; în interiorul cristalului $W(\bar{r})=W^{(0)}(\bar{r})$ și deosebirea dispare; în afara cristalului $W(\bar{r})=0$, dar $\psi=\psi_0(\bar{r}-\bar{\xi})$ este practic nulă (deoarece electronul este reținut în groapa de polarizare, situată, după cum am văzut, *în* cristal) și deci $W(\bar{r})\psi(\bar{r})=W^{(0)}(\bar{r})\psi(\bar{r})\approx 0$. Pe de altă parte, o funcție $\psi=\psi_0(\bar{r}-\bar{\xi})$ nesupusă restricției $-\frac{L}{2}+R<\bar{\xi}_x<\frac{L}{2}-R$ satisface (12') fără să satisfacă și (12), tocmai pentru motivul că în afara cristalului nu mai avem acum $\psi=\psi_0(\bar{r}-\xi)\approx 0$ și deci nici $W(\bar{r})\psi(\bar{r})=W^{(0)}(\bar{r})\psi(\bar{r})\approx 0$. O discuție mai amănunțită a acestui ultim punct este dată în anexa 2.

Se mai pune desigur întrebarea dacă nu cumva ecuația (12) nu admite și alte soluții, care să nu satisfacă (12') și prin urmare să nu aibă forma (11). Din motive fizice însă, existența unor astfel de soluții pare exclusă, deoarece stările de energie joasă trebuie căutate printre stările *locale*. Într-adevăr, aceste stări trebuie să minimalizeze funcționala (9') ceea ce nu se poate realiza, după cum a arătat P e k a r în cartea sa [7]*), decît prin autolocalizarea electronului. Argumentele sale pot fi trnsportate în forma lor calitativă (evaluarea

*) § 6.

ordinului de mărime al diferiților termeni din (9') în cazul stărilor libere și locale) și la cristalul finit, dacă dimensiunile acestuia sînt macroscopice. Or, stările locale pot fi totdeauna descrise aproximativ prin funcții de tipul (11), care sînt deci singurele soluții posibile pentru ecuația (12).

În rezumat, pentru orice stare a electronului suplimentar într-o groapă de polarizare statică (energii globale mici), limitarea cristalului se manifestă numai prin introducerea unei restricții asupra parametrului $\bar{\xi}$, care apare în funcția de undă a stării (de exemplu (11)). Sau, mai intuitiv, caracterul finit al cristalului menține polaronul în interiorul solidului, la o distanță de fețe mai mare decît R, fără să-i altereze sensibil stabilitatea, forma sau dimensiunile.

§ 4. *La temperaturi mai ridicate*, la care sistemul electron + cristal se află cu o probabilitate care nu este neglijabilă și în stări mai depărtate de starea fundamentală, trebuie găsite soluții care să descrie corect și aceste stări. Metoda a fost de asemenea indicată de P e k a r și vom arăta acum că ea rămîne valabilă, împreună cu rezultatele ei, și în cazul cristalului finit.

Metoda constă în a admite că, în stările superioare, polarizarea nu este prea diferită de polarizarea $\bar{P}_0(\bar{r}-\bar{\xi})$ corespunzătoare, prin intermediu relațiilor (10), (11), soluțiilor ψ determinate în § 3 *).

$$\bar{P}(\bar{r}, t) = \bar{P}_0(\bar{r}-\bar{\xi}) + \bar{P}'(\bar{r}, t) \qquad (|\bar{P}'(\bar{r}, t)| < |\bar{P}_0(\bar{r}-\bar{\xi},|)\,. \tag{13}$$

$\bar{\xi}$ se determină prin condiția ca valoarea energiei E din (5) în ordinul întîi să fie minimă. Notînd cu E_0 această aproximație, avem

$$E \approx E_0 \equiv \frac{\hbar^2}{2m}\int |\operatorname{grad}\psi_0(\bar{r}-\bar{\xi})|^2\,.\,\mathrm{d}\tau - \int \bar{P}(\bar{r},t)\,\bar{D}[\psi_0(\bar{r}-\bar{\xi}), \bar{r}]\,\mathrm{d}\tau + \\ + \int |\psi_0(\bar{r}-\bar{\xi})|^2, W(\bar{r})\,\mathrm{d}\tau\,; \tag{14}$$

E_0 este funcție de $\bar{\xi}$ și de P, deci de $\bar{\xi}$ și de coordonatele $\bar{P}_{\bar{K}}$ ale mișcării ionilor. Trebuie prin urmare să calculăm $\bar{\xi}$ ca funcție implicită de $\bar{P}_{\bar{K}}$ prin condițiile

$$\frac{\partial E_0(\ldots, \bar{P}_{\bar{K}}, \ldots, \bar{\xi})}{\partial \xi_i} = 0 \qquad (i = 1,2,3) \tag{15}$$

Aceste condiții se traduc și în cazul cristalului finit prin relațiile

$$\int \bar{P}(\bar{r}, t)\,.\,\frac{\partial \bar{D}_0(\bar{r}-\bar{\xi})}{\partial \xi_i}\,\mathrm{d}\tau = 0\,, \tag{15'}$$

unde $\bar{D}_0$ preprezintă expresia (7) în care am pus $\psi = \psi_0(\bar{r}-\bar{\xi})$. Într-adevăr, termenul $\frac{\hbar^2}{2m}\int |\operatorname{grad}\psi_0(\bar{r}-\bar{\xi})|^2\,\mathrm{d}\tau$ din expresia lui E_0 nu depinde de $\bar{\xi}$, ca

*) Continuăm să ne referim numai la starea fundamentală $\psi_0(\bar{r}-\bar{\xi})$ a electronului în groapa de polarizare și la polarizarea corespunzătoare $\bar{P}_0(\bar{r}-\bar{\xi})$, deși considerațiile următoare sînt valabile și pentru stările excitate.

și la cristalul infinit, dacă ținem seama că atît $\psi_0(\bar{r}-\bar{\xi})$, cît și grad $\psi_0(\bar{r}-\bar{\xi})$ sînt funcții practic nule în afara cristalului, atunci cînd $\bar{\xi}$ este supus restricției din (11). În ceea ce privește termenul $\int |\psi_0(\bar{r}-\bar{\xi})|^2 W(\bar{r})\,d\tau$ el necesită o discuție mai amănunțită.

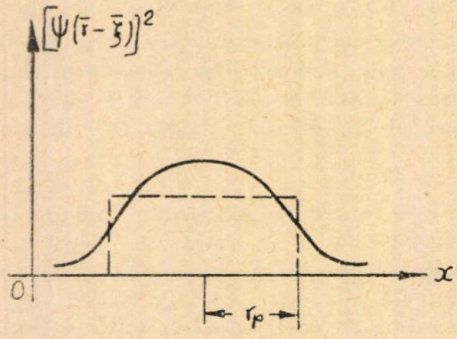


Fig. 3

La un cristal infinit s-ar părea că integrala $\int |\psi_0(\bar{r}-\bar{\xi})|^2 W(\bar{r})\,d\tau$ nu depinde de $\bar{\xi}$ deoarece lărgimea curbei $|\psi(\bar{r}-\bar{\xi})|^2$, măsurată prin r_p, este mult mai mare decît perioada energiei potențiale $W(\bar{r})$ (fig. 3), disproporția este chiar mult mai accentuată decît în figură). Argumentul ar fi valabil la un cristal molecular sau la un metal, dar nu este suficient la un cristal ionic, la care $W(\bar{r})$, ia valori atît pozitive, cît și negative, ceea ce face ca la integrala $\int |\psi_0(\bar{r}-\bar{\xi})^2|^2 W(\bar{r})\,d\tau$ să contribuie efectiv numai « cozile » curbei $|\psi_0(\bar{r}-\bar{\xi})|^2$, această contribuție fiind foarte sensibilă la poziția centrului polaronului. Este însă posibil să ajungem la concluzia dorită pe o altă cale, măcar în măsura în care aproximația masei efective este satisfăcătoare pentru motivul că, în cadrul acestei aproximații, se poate face abstracție de termenul în care apare $W(r)$ cu condiția de a înlocui masa reală m prin masa efectivă μ. Aplicînd această observație expresiei (14), obținem

$$\frac{\hbar^2}{2m}\int |\operatorname{grad}\psi_0(r-\bar{\xi})|^2\,d\tau + \int |\psi_0(\bar{r}-\bar{\xi})|^2 W(\bar{r})\,d\tau = \frac{\hbar^2}{2\mu}\int |\operatorname{grad}\psi_0(\bar{r}-\bar{\xi})|^2\,d\tau.$$

Am arătat însă că $\int |\psi_0(\bar{r}-\bar{\xi})|^2\,d\tau$ nu depinde de $\bar{\xi}$; din relația precedentă rezultă atunci că nici $\int |\psi_0(\bar{r}-\bar{\xi})|^2 W(\bar{r})\,d\tau$ nu depinde practic de $\bar{\xi}$. Ținînd seama de extrema sensibilitate a ultimei integrale față de variațiile lui $\bar{\xi}$, această proprietate trebuie înțeleasă în sensul că $|\psi_0(\bar{r}-\bar{\xi})|^2$ nu are o lărgime riguros constantă, ci este, de exemplu, mai largă cînd centrul polaronului se află în dreptul unui nod negativ al relației (care atrage mai slab electronul), decît atunci cînd el se află în dreptul unui nod pozitiv (care localizează mai puternic electronul).

Trecînd acum la cristalul finit, proprietatea se menține în mod evident cît timp polaronul este la o distanță de fețe mai mare decît R, așa cum trebuie conform restricției din (11).

Odată demonstrată valabilitatea relațiilor (15′) și în cazul care ne interesează, putem reveni la hamiltonianul mișcării ionilor din a doua etapă a metodei adiabatice, pe care îl cunoaștem acum integral

$$H = E(\ldots, \bar{P}_{\bar{K}}, \ldots, \bar{\xi}) + H_{\text{opt, long}} \approx E_0(\ldots, \bar{P}_{\bar{K}}, \ldots, \bar{\xi}) + H_{\text{opt, long}}, \quad (16)$$

în care $\bar{\xi}$ se presupune explicitat cu ajutorul relațiilor (15') în funcție de $\bar{P}_{\bar{K}}$. Obținem în acest fel, întocmai ca P e k a r

$$H = \frac{\hbar^2}{2m}\int |\operatorname{grad}\ \psi_0(\bar{r}-\bar{\xi})|^2\,d\tau - \frac{c}{8\pi}\int \bar{D}_0^2(\bar{r}-\bar{\xi})\,d\tau +$$

$$+\int |\psi_0(\bar{r}-\bar{\xi})|^2 W(\bar{r})\,d\tau + \frac{2\pi}{c}\int \bar{P}'^2(\bar{r},t)\,d\tau + \frac{2\pi}{c\omega^2}\int \dot{\bar{P}}^2(\bar{r},t)\,d\tau =$$

$$= \mathcal{J}[\psi_0] + \frac{2\pi}{c}\int \bar{P}'^2(\bar{r},t)\,d\tau + \frac{2\pi}{c\omega^2}\int \dot{\bar{P}}^2(\bar{r},t)\,d\tau; \qquad (16')$$

am introdus notația

$$\mathcal{J}[\psi_0] \equiv \frac{\hbar^2}{2m}\int |\operatorname{grad}\ \psi_0(\bar{r}-\bar{\xi})|^2 . d\tau - \frac{c}{8\pi}\int \bar{D}_0^2(\bar{r}-\bar{\xi})\,d\tau +$$

$$+\int |\psi_0(\bar{r}-\bar{\xi})|^2 W(\bar{r})\,d\tau. \qquad (17)$$

Funcționala $\mathcal{J}[\psi_0]$ este identică cu cea din [7], deosebirea fiind numai de scriere (m este înlocuit prin μ, dar în schimb dispare ultimul termen) și datorindu-se faptului că am evita metoda masei efective. Cuantificarea hamiltonianului (16') impune mai întîi introducerea unor coordonate normale $\bar{P}_{\bar{K}}$ pentru descrierea mișcării ionilor. În acest caz

$$\frac{2\pi}{\omega^2 c}\int \dot{\bar{P}}^2(\bar{r},t)\,d\tau \approx \frac{2\pi}{\omega^2 c}\int_{L^3} \dot{\bar{P}}^2(\bar{r},t)\,d\tau = \frac{2\pi}{\omega^2 c}\sum_{\bar{K}} \dot{\bar{P}}^2_{\bar{K}}(t),$$

$$\frac{2\pi}{c}\int \bar{P}'^2(\bar{r},t)\,d\tau \approx \frac{2\pi}{c}\int_{L^3} \bar{P}'^2(\bar{r},t)\,d\tau = \frac{2\pi}{c}\sum_{\bar{K}}\left[\bar{P}_{\bar{K}}(t) - \bar{P}_{\bar{K}\bar{\xi}}\right]^2$$

unde

$$\bar{P}_{\bar{K}\bar{\xi}} \equiv \int_{L^3} \bar{P}_0(\bar{r}-\bar{\xi})\cdot\chi_{\bar{K}}(\bar{r})\cdot d\tau$$

(am putut neglija contribuția la integrale a exteriorului cristalului în baza anulării polarizării în această regiune; anularea rezultă și din localizarea funcțiilor $\psi_0(\bar{r}-\bar{\xi})$ și $\bar{P}_0(\bar{r}-\bar{\xi})$ la interiorul cristalului). Cuantificarea conduce nemijlocit la

$$H = \mathcal{J}[\psi_0] + \frac{\hbar\omega}{2}\sum_{\bar{K}}\left\{(q_{\bar{K}} - q_{\bar{K}\,\bar{\xi}})^2 - \frac{\partial^2}{\partial q^2_{\bar{K}}}\right\}, \qquad (18)$$

unde $q_{\bar{K}} \equiv \sqrt{\frac{4\pi}{\hbar\omega c}}\,\bar{P}_{\bar{K}}$, $q_{\bar{K}\,\bar{\xi}} \equiv \sqrt{\frac{4\pi}{\hbar\omega c}}\,\bar{P}_{\bar{K}\,\bar{\xi}}$; am ținut seama că vectorii $\bar{P}_{\bar{K}}$, $\bar{P}_{\bar{K}\bar{\xi}}$ sînt longitudinali, prin urmare, fiind dată direcția de propagare a undei respective, îi putem caracteriza numai prin mărimea lor algebrică.

Rezolvarea problemei de valori proprii a acestui hamiltonian se face exact ca în [7] *), calculele fiind valabile și în cazul cristalului finit, din același motiv

*) § 16.

al anulării funcțiilor $\psi_0(\bar{r}-\bar{\xi})$, $\bar{P}_0(\bar{r}-\xi)$ și $\bar{P}(\bar{r}, t)$ la exterior. Rezultatul, transcris din aceeași carte, este în primă aproximație

$$\begin{cases} \text{valorile proprii ale operatorului (18): } H_{\bar{k},\ldots,n_{\bar{K}}\ldots} = \mathcal{J}[\psi_0] + \\ \qquad + \hbar\omega \sum_{\bar{K}}{}' \left(n_{\bar{K}} + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar^2}{2M}\bar{k}^2 \\ \text{funcțiile sale proprii: } \psi_{\bar{k},\ldots,n_{\bar{K}}\ldots} = L^{-3/2} e^{i\bar{k}\bar{\xi}} \prod_{\bar{K}}{}' \Phi_{n_{\bar{k}}}(q'_{\bar{k}}), \end{cases}$$

unde $\bar{k}$ este un nou număr cuantic asociat cu variabila $\bar{\xi}$ și $n_{\bar{K}}$ sînt numerele cuantice corespunzătoare variabilelor $q'_{\bar{K}}$, a căror definiție este dată prin formulele (16, 21) din [7]. Funcția $\Phi_{n_{\bar{k}}}$ sînt de tipul funcțiilor de undă ale oscilatorului armonic liniar. Funcția de undă globală a întregului sistem «electron-suplimentar+cristal», în aproximația utilizată *) este

$$\psi_{\text{global}} = \psi_0(\bar{r}-\bar{\xi}) \cdot \Psi_{k,\ldots,n_{\bar{K}},\ldots} = L^{-3/2}\psi_0(\bar{r}-\bar{\xi})\, e^{i\bar{k}\bar{\xi}} \prod_{\bar{K}}{}' \Phi_{n_{\bar{K}}}(q'_{\bar{K}}). \qquad (19)$$

§ 5. Am obținut astfel rezultatul lui P e k a r, stabilit de el în cazul cristalului infinit. Într-un cristal *finit* stările polaronice staționare sînt prin urmare tot unde progresive, precum rezultă din factorul $e^{i\bar{k}\bar{\xi}}$. Ele *nu* reprezintă stări de localizare ale polaronilor (în bloc) și cu atît mai puțin stări de localizare superficială ale lor (deși putem încă vorbi de o localizare a electronului în interiorul unui polaron nelocalizat). *Nu există deci stări polaronice de suprafață, în afară de cazul banal al polaronului static* ($\bar{k}=0$), *care se poate afla evident în orice punct al cristalului, deci și în vecinătatea suprafeței lui (dar nu și în fîșia de grosime R).*

Nu credem că acest rezultat s-ar putea datori numai aproximațiilor specifice pentru metoda folosită. S-ar putea desigur obiecta că, deoarece factorul $e^{i\bar{k}\bar{\xi}}$ provine dintr-un termen $-\frac{\hbar^2}{2M}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi_x^2}+\frac{\partial^2}{\partial\xi_y^2}+\frac{\partial^2}{\partial\xi_z^2}\right)$ conținut în hamiltonianul (18) (formula (16,24) din [7]), motivul pentru care nu am obținut stări de suprafață rezidă în faptul că am tratat polaronul în bloc ca o particulă liberă. Se știe, într-adevăr, că electronii liberi (dar închiși într-o cutie) *nu* posedă stări de suprafață. Dacă prin urmare am perfecționa metoda folosită printr-un pas analog trecerii de la modelul electronilor liberi la modelul electronilor situați într-un cîmp periodic (acest pas ar însemna în cazul nostru, tratarea polarizării mediului cu luarea în considerație a structurii sale atomice, nu prin formula macroscopică (2), nu ar fi exclus să regăsim stările polaronice de suprafață. Fără să negăm interesul pe care l-ar prezenta reluarea problemei din acest punct de vedere, credem că există puternice motive fizice directe, care fac puțin probabilă existența unor astfel de stări. Polaronul este o configurație delicată din punctul de vedere al stabilității și prin localizarea sa super-

*) $\bar{\xi}$ continuă însă a fi supus restricției $-\frac{L}{2}+R<\xi_x<\frac{L}{2}-R$, care joacă rolul unei condiții la limită.

ficială trebue să înțelegem localizarea simultană a electronului și a polarizării. Localizarea superficială a polarizării este însă greu de conceput, deoarece (a se vedea fig. 2, *b* și discuția ei) ea ar atrage după sine o asimetrie a distribuției polarizării incompatibilă cu stabilitatea internă a polaronului.

De altfel, posibilitatea existenței unor stări de suprafață statice (polaronul imobilizat pe suprafață) nu este lipsită de importanță, aceste stări putînd constitui capcane pentru electroni, cu rol efectiv în fenomenele de contact.

Menționăm o consecință curioasă a inexistenței stărilor de suprafață polaronice în cristalele polare unidimensionale: în astfel de cristale nu pot exista stări de suprafață nici măcar în teoria zonelor. Căci la un cristal unidimensional, o astfel de stare ar însemna o stare de localizare a electronului, în care el ar avea timp să polarizeze dielectricul și prin urmare problema ar fi de resortul teoriei polaronilor și ar avea ca atare un răspuns negativ. Acest raționament nu este posibil și pentru un cristal tridimensional, deoarece în acest caz o stare e suprafață a electronului nu înseamnă imobilitatea lui, ci numai restrîngerea mișcării sale la două dimensiuni (paralel cu fața cristalului), ceea ce este însă suficient pentru ca, la energiile mari considerate în teoria zonelor, efectul de polarizare să fie neglijabil.

II. STĂRILE DE SUPRAFAȚĂ ALE EXCITONILOR

§ 6. Excitonii, adică stările de excitație atomică dintr-un cristal care se pot propaga sub formă de unde, au fost introduși de J. Frenkel [9] și R. Peierls [10]. Ne vom referi la expunerea succintă din monografia lui F. Seitz [11] și vom considera cazul ipotetic al unei rețele moleculare sau de valență, în ale cărei noduri se află molecule sau atomi neutri identici formați dintr-un «rest atomic» și un electron optic, adică un singur electron susceptibil de a fi excitat. O astfel de rețea este ipotetică deoarece existența unui singur electron optic implică apartenența lui la o pătură exterioară neocupată (cazul metalelor alcaline), ceea ce înseamnă că metoda lui Heitler-London, pe care o vom aplica în cele ce urmează, nu este prea indicată și ar trebui înlocuită prin metoda colectivizării a lui Bloch. În realitate, cristalele în care pot apărea excitoni sînt formate din atomi (sau ioni) cu mai mult decît un singur electron optic, însă tot ceea ce este esențial în problema existenței stărilor de suprafață rămîne și în această schematizare.

Pentru început ne vom ocupa de un cristal unidimensional și vom scrie hamiltonianul lui sub forma următoare

$$H = \sum_1^N{}_i \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_i + \sum_1^N{}_\alpha U_{i\alpha} \right) + \frac{1}{2}\sum_1^N{}'_{i,j} \frac{e^2}{r_{ij}} + \\ + \sum_1^N{}_\alpha C_\alpha + \frac{1}{2}\sum_1^N{}'_{\alpha,\beta} D_{\alpha\beta} . \tag{20}$$

Există N atomi formați fiecare din cîte un electron exterior (optic) și un rest atomic. Prin $-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_i$ înțelegem operatorul energiei cinetice a electronului i, prin $U_{i\alpha}$ energia potențială a acestui electron în cîmpul restului atomic α ($i, \alpha = 1, 2, \ldots, N$). Sumele prevăzute cu accent reprezintă interacțiunea coulombiană a electronilor (optici), respectiv a resturilor atomice; accentul

înseamnă absența termenilor cu $i = j$, respectiv $\alpha = \beta$. C_α este energia totală internă a restului atomic α. În problema noastră C_α și $D_{\alpha\beta}$ sînt mărimi constante. Notînd cu ε_α hamiltonianul întregului atom α (electronul optic + restul atomic) și ținînd seama că în stările excitonice electronii sînt practic legați ($U_{i\alpha} \approx 0$ cînd $i \neq \alpha$), hamiltonianul (20) ia forma mai simplă

$$H = \sum_{1}^{N}{}_{\alpha} \varepsilon_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{1}^{N}{}'_{i,j} \frac{e^2}{r_{ij}} + \text{Const.} \tag{20'}$$

$$\varepsilon_\alpha \equiv -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_i + U_{i\alpha} + C_\alpha \quad (i = \alpha)$$

$$\text{const} \equiv \frac{1}{2} \sum_{1}^{N}{}'_{\alpha,\beta} D_{\alpha\beta}.$$

Vom presupune că funcțiile de undă atomice ale electronilor optici, atît cele corespunzătoare stării fundamentale (notate cu $\varphi_\alpha(i)$), cît și cele corespunzătoare primei stări excitate (notate cu $\varphi'_\alpha(i)$, se acoperă neglijabil, cînd se referă la atomi diferiți. De aceea $\varphi_\alpha(i)$, $\varphi'_\alpha(i)$ sînt ortogonale și $\varphi_\alpha(i)$, $\varphi_\beta(i)$ sînt cvasi-ortogonale, cînd $\alpha \neq \beta$. Nu vom ține seama decît de prima stare excitată și numai în stările în care un singur atom este excitat. Dacă acest atom are indicele n, funcția de undă antisimetrizată a celor N electroni optici este în aproximația de ordinul zero.

$$\Psi'_n = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{P} (-1)^P \hat{P} [\varphi_1(1) \ldots \varphi_{n-1}(n-1)\, \varphi'_n(n)\, \varphi_{n+1}(n+1) \ldots \varphi_N(N)] \tag{21}$$

În aceste condiții, elementele de matrice ale hamiltonianului (20') față de funcțiile (21) sînt

$$H_{n,n} = \sum_{1}^{N}{}_{\alpha} w_\alpha^{(0)} + \frac{e^2}{2} \sum_{1}^{N}{}'_{i,j} \int \frac{|\psi_i(1)|^2 |\psi_j(2)|^2}{r_{12}} d\tau_1 d\tau_2 -$$
$$- \frac{e^2}{2} \sum_{1}^{N}{}'_{i,j} \int \frac{\psi_i^*(1) \psi_i(2) \psi_j^*(2) \psi_j(1)}{r_{12}} d\tau_1 d\tau_2 + \text{const} \tag{22}$$

$$H_{n,m} = e^2 \int \frac{\varphi'^*_n(1) \varphi_n(1) \varphi^*_m(2) \varphi'_m(2)}{r_{12}} d\tau_1 d\tau_2 -$$
$$- e^2 \int \frac{\varphi'^*_n(1) \varphi_n(2) \varphi^*_m(2) \varphi'_m(1)}{r_{12}} d\tau_1 d\tau_2 \quad n \neq m \tag{22'}$$

Calculul elementelor diagonale este făcut, de exemplu, în [11]; calculul elementelor nediagonale decurge în mod analog. Prin $\psi_\alpha(i)$ înțelegem o funcție atomică corespunzătoare stării fundamentale cînd $\alpha \neq n$, corespunzătoare primei stări excitate cînd $\alpha = n$

$$\psi_\alpha(i) \equiv \begin{cases} \varphi_\alpha(i) & (\alpha \neq n); \\ \varphi'_\alpha(i) & (\alpha = n) \end{cases}$$

$w_\alpha^{(0)}$ reprezintă energia atomului α considerat izolat, cu electronul optic în starea fundamentală sau în prima stare excitată după cum $\alpha \neq n$ sau $\alpha = n$.

Funcțiile de undă adaptate interacțiunii perturbatoare existente între atomi au, în ordinul zero, forma

$$\Phi = \sum_1^N{}_n a_n \cdot \Psi_n . \tag{23}$$

Coeficienții a_n rezultă din următoarea problemă de valori proprii:

$$\sum_1^N{}_n H_{n,m} a_m = E a_n \qquad (n = 1, 2, \ldots, N) \tag{24}$$

E reprezentînd valoarea energiei sistemului în primul ordin.

§ 7. În lucrările citate [9], [10] și [11], se rezolvă problema (24) pentru o rețea infinită ($N \to \infty$) în ipoteza că, datorită acoperirii neglijabile a funcțiilor de undă atomice, avem

$$H_{n,m} \approx 0 \text{ cînd } |n - m| > 1 \tag{25}$$

Nu este greu de văzut că acoperirea neglijabilă a funcțiilor atomice influnțează însă, în special*), termenul al doilea din (22′), așa încît neglijarea întregii expresii (22′), inclusiv primul termen, este într-o anumită măsură discutabilă. Vom face totuși și noi această ipoteză, cu toate că luarea în considerare a erorii menționate (și care nu pare să fi fost remarcată în literatură) ar putea modifica rezultatele calculului.

În cazul cristalului finit sîntem obligați să ținem seama că elementele de matrice diagonale corespunzătoare unor atomi excitați periferici sînt diferite de elementele corespunzătoare unor atomi excitați interiori. Schematizînd situația, vom admite că efectul suprafeței nu se face simțit dincolo de primul atom periferic. În sfîrșit, vom observa că $H_{n,m} = H_{m,n}$ deoarece funcțiile atomice, deci și funcțiile globale (21), pot fi alese ca reale.

Toate aceste ipoteze sînt condensate în următorul tablou:

$$H_{n,m} = \begin{cases} \alpha \ldots n = m \neq 1 \text{ sau } N \\ \alpha' \ldots n = m = 1 \text{ sau } N \\ \gamma \ldots n = m \pm 1 \\ 0 \ldots |n - m| > 1 \end{cases} \tag{26}$$

Ecuațiile (24) iau atunci forma mult simplificată

$$\left.\begin{aligned} &\gamma a_{n-1} + \alpha a_n + \gamma a_{n+1} = E a_n \qquad (n = 2, 3, \ldots, N-1) \\ &\alpha' a_1 + \gamma a_2 = E a_1 \\ &\gamma a_{N-1} + \alpha' a_N = E a_N \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

*) Produsul $\varphi_n'^*$ (1) $\varphi_m(1)$ este practic neglijabil în cazul unei acoperiri slabe, pe cîtă vreme produsul $\varphi_n'^*$ (1) $\varphi_n(1)$ nu este nul și nu este influențat de această acoperire. De aceea primul termen din (22′) este mic numai în măsura în care la integrare contribuie în special perechile de poziții 1, 2 situate în imediata vecinătate a nucleelor n, m; pentru astfel de perechi, numitorul este mare. În orice caz, însă, primul termen din (22′) (integrala « coulombiană ») predomină sensibil asupra termenului al doilea (integrala « de schimb »).

sau

$$\left.\begin{aligned} &\gamma\, a_{n-1} + (\alpha - E)a_n + \gamma\, a_{n+1} = 0 \\ &(\alpha' - E)\, a_1 + \gamma\, a_2 = 0 \\ &\gamma\, a_{N-1} + (\alpha' - E)\, a_N = 0 \end{aligned}\right\} \tag{27'}$$

Acest sistem de ecuații cu diferențe finite (dintre care ultimele două joacă rolul unor condiții la limită) a mai fost obținut și în lucrarea [12], dar nu a fost folosit în problema stărilor de suprafață. Pentru noi este esențial faptul că sistemul (27′) este formal identic cu cel obținut în teoria monoelectronică a zonelor în aproximația electronilor legați (de exemplu [3]*), sau [5]**), semnificația constantelor α, α', γ fiind desigur cu totul alta. Putem deci folosi rezultatul obținut acolo care, tradus în limbajul excitonilor, spune: *există stări excitonice de suprafață dacă parametrii de material* α, α', γ *satisfac inegalitatea*

$$\left|\frac{\gamma}{\alpha' - \alpha}\right| < 1. \tag{28}$$

În cazul în care acest criteriu este îndeplinit, stările de suprafață sînt în număr de două (ceea ce corespunde celor două fețe ale cristalului) și au energia unică

$$\left.\begin{aligned} &E = \alpha + 2\gamma \cdot \operatorname{ch}\theta \\ &\theta = i \log \frac{\alpha - \alpha'}{\gamma} \end{aligned}\right| \tag{29}$$

și funcțiile de undă localizate fie pe una, fie pe cealaltă față

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathrm{I}} &= \sum_1^N{}_n\, a_n \Psi_n \sim \Psi_1 - \left|\frac{\gamma}{\alpha' - \alpha}\right| \Psi_2 + \left|\frac{\gamma}{\alpha' - \alpha}\right|^2 \Psi_3 \mp \dots \\ \Phi_{\mathrm{II}} &= \sum_1^N{}_n\, a_n \Psi_n \sim \Psi_N - \left|\frac{\gamma}{\alpha' - \alpha}\right| \Psi_{N-1} + \left|\frac{\gamma}{\alpha' - \alpha}\right|^2 \Psi_{N-2} \mp \dots \end{aligned} \tag{30}$$

Nivelele de energie (29) sînt situate în bandele excitonice interzise, cîte unul în fiecare și provin din banda permisă imediat inferioară.

§ 8. În ceea ce privește criteriul (28) este greu de spus în ce măsură este el satisfăcut. În cazul stărilor zonale ale electronilor el este cu certitudine îndeplinit (în [5] se admite chiar condiția mai severă $\left|\frac{\gamma}{\alpha' - a}\right| \ll 1$). În cazul excitonilor, discuția lui întîmpină dificultăți și, precum se va arăta calitativ în anexa 3, dispunem numai de indicații vagi asupra valorii raportului $\frac{\gamma}{\alpha' - \alpha}$.

În rezumat, existența stărilor excitonice de suprafață este în principiu posibilă. Existența lor efectivă depinde însă de realizarea unei anumite condiții (28), care pare satisfăcută în substanțele reale deși nu lipsește mult pentru ca ea

*) p. 223, ec. (9).
**) p. 137, ec. (1,10).

să fie infirmată. Prin urmare stările excitonice de suprafață, dacă există, sînt în orice caz mai puțin localizate decît stările corespunzătoare ale electronilor din teoria zonelor.

Cazul cristalului tridimensional și, în special, cazul real al mai multor electroni optici (de exemplu, cazul halogenurilor alcaline sau al gazelor nobile) va constitui, sperăm, subiectul unei lucrări viitoare.

ANEXA 1

În monografia lui P e k a r [7], raza r_p a polaronului este definită ca raza sferei, care contribuie la integrala

$$\widetilde{V} = \int V(\bar{r}) \mid \psi_0(\bar{r}-\bar{\xi}) \mid^2 d\tau$$

cu jumătate din valoarea ei totală. Se pune întrebarea dacă $r_p \approx 10 \dfrac{\hbar^2}{c\mu e^2}$ (μ reprezintă masa efectivă a electronului) măsoară regiunea în care este localizat electronul suplimentar sau regiunea pînă la care se întinde efectul lui de polarizare. Din [7] (fig. 6.1) rezultă însă că $\psi_0(\bar{r}-\bar{\xi})$ se reduce la $\sim 10\%$ din valoarea sa maximă cînd $x = 2\alpha_4 r \approx 10$, $r \approx \dfrac{5}{\alpha_4} \approx 10 \dfrac{\hbar^2}{\mu e^2 c} = r_p$. Prin urmare r_p este, în primul rînd, o măsură a regiunii în care se află electronul. Dimpotrivă, r_p este mult mai mic decît mărimea R din text (raza de polarizare). Într-adevăr, din definiția precedentă a lui r_p rezultă că $V(\bar{r})$ trebuie să aibă o valoare apreciabilă încă mult timp după ce r a depășit r_p, pentru că numai astfel integrala $V(r) \mid \psi_0(\bar{r}-\bar{\xi}) \mid^2 d\tau$, luată între limitele $r = r_p$ și $r = \infty$, poate fi egală cu jumătate din valoarea sa între limitele $r = 0$ și $r = \infty$, deși $\psi_0(\bar{r}-\bar{\xi}) \approx 0$ pentru $r > r_p$. Deci raza gropii de potențial $V_0(\bar{r}-\bar{\xi})$, în care se află electronul (în măsura în care ea poate fi definită, funcția $V_0(\bar{r}-\bar{\xi})$ descrescînd ca $\dfrac{1}{r}$ la infinit și nu exponențial ca $\psi_0(\bar{r}-\bar{\xi})$, este mai mare decît r_p. Același lucru se poate spune și despre raza de polarizare R, deoarece și funcția $\overline{P}_0(\bar{r}-\bar{\xi})$ descrește ca $\dfrac{1}{r^2}$ la infinit.

ANEXĂ 2

În § 3 se arată că funcția «localizată» $\psi\,\bar{r} \approx \varphi_0(r-\bar{\xi})$ este o soluție aproximativă a ecuației (12), dacă și *numai dacă* parametrul $\bar{\xi}$ este supus restricției din (11). Pentru un polaron static (cazul polaronului mobil este studiat în § 4) fîșiile periferice de grosime R reprezintă deci regiuni interzise. Cum pe această concluzie se sprijină toate dezvoltările ulterioare, este poate indicat să rezumăm argumentele, care pledează în favoarea ei.

1° Argumentul din text arată că, indiferent de distribuția polarizării $\overline{P}(\bar{r})$, o funcție de undă electronică de tipul din figura 4 *a* nu descrie în chip satisfăcător mișcarea electronului sub influența polarizării cristalului deoarece nu satisface ecuația (12).

2° În cazul cristalelor cu masa efectivă a electronului mai mare decît masa lui reală ($\mu > m$), adică în cazul important al cristalelor ionice, o concluzie analogă rezultă și din tratarea variațională a problemei. Într-adevăr, în etapa a doua, această tratare consistă în minimalizarea funcționalei (9′). În cazul cristalului *infinit* valabilitatea metodei masei efective ne spune că suprimarea

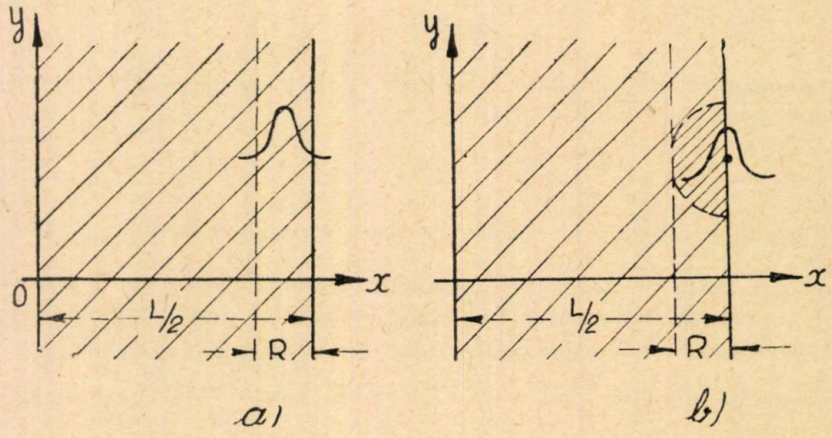


Fig. 4

termenului $\int |\psi(\bar{r})|^2 W(\bar{r})\, d\tau$ din F_{pot} este echivalentă cu înlocuirea lui m prin μ în termenul $\frac{\hbar^2}{2m}\int |\text{grad}\,\psi(\bar{r})|^2\, d\tau$, ceea ce micșorează valoarea funcționalei ($\mu > m$). Prin urmare valoarea integralei $\int |\Psi(\bar{r})|^2 W(\bar{r}) d\tau$ este negativă la cristalul infinit. Această integrală este însă înjumătățită (în valoare absolută) la cristalul *finit* pentru un electron situat chiar pe frontieră și, în orice caz, micșorată pentru un electron care a pătruns în fîșia interzisă din figura 4, *a*; căci porțiunea din $\psi(\bar{r})$, situată în afara cristalului, nu contribuie la integrală din cauza anulării lui $W(\bar{r})$ în această regiune. Prin urmare o funcție electronică $\psi(\bar{r}) = \Psi_0(\bar{r}-\xi)$ cu ξ_x în fîșia interzisă conduce la o valoare mai mare a expresiei F_{pot} din (9′), decît o funcție analogă dar cu ξ_x în regiunea permisă. Adică figura 4, *a* reprezintă o situație dezavantajoasă din punct de vedere al minimalizării acestei expresii și deci nu se realizează.

3° O situație de tipul celei din figura 4, *b* este exclusă și din alt motiv. Oricare ar fi cristalul, relația (10) ne arată că prima etapă a metodei variaționale stabilește între polarizare și funcția de undă electronică o relație de așa natură, încît o distribuție cu simetrie sferică a « norului » electronului atrage după sine o distribuție cu aceeași simetrie a polarizării. Prin urmare un polaron de tipul din figura 4, *b* nu are stabilitate internă și același lucru se poate spune, în măsură mai mică, și despre polaronul « amputat » din figura 2, *b*. Argumentul clasic expus în text în legătură cu această figură capătă astfel și o confirmare cuantică.

ANEXA 3

Criteriul (28) se scrie astfel, dacă ținem seama de (26)

$$\left|\frac{H_{n,n+1}}{H_{1,1}-H_{n,n}}\right| = \frac{|H_{n,n+1}|}{|H_{1,1}-H_{n,n}|} = \frac{|H_{1,2}|}{|H_{1,1}-H_{2,2}|} < 1. \tag{31}$$

Or, din aceleași motive pentru care am considerat nule elementele $H_{n,m}$ ($|n-m|>1$), putem neglija integralele relative la atomi neînvecinați. Atunci:

$$H_{1,1} \approx \sum_1^N{}_i w_i^{(0)} + \frac{e^2}{2} 2 \left\{ \int \frac{|\varphi_1'(1)|^2 |\varphi_2(2)|^2}{r_{12}} d\tau_1 d\tau_2 + \right.$$

$$+ \int \frac{|\varphi_2(1)|^2 |\varphi_3(2)|^2}{r_{12}} d\tau_1 d\tau_2 + \int \frac{|\varphi_3|(1)|^2 |\varphi_4(2)|^2}{r_{12}} d\tau_1 d\tau_2 +$$

$$\left. + \ldots + \int \frac{|\varphi_{N-1}(1)|^2 |\varphi_N(2)|^2}{r_{12}} d\tau_1 d\tau_2 \right\} -$$

$$- \frac{e^2}{2} 2 \left\{ \int \frac{\varphi_1'^*(1)\, \varphi_1'(2)\, \varphi_2^*(2)\, \varphi_2(1)}{r_{12}} d\tau_1 d\tau_2 + \right.$$

$$+ \int \frac{\varphi_2^*(1)\, \varphi_2(2)\, \varphi_3^*(2)\, \varphi_3(1)}{r_{12}} d\tau_1 d\tau_2 + \ldots +$$

$$\left. + \int \frac{\varphi_{N-1}^*(1)\, \varphi_{N-1}(2)\, \varphi_N^*(2)\, \varphi_N(1)}{r_{12}} d\tau\, d\tau \right\} + \text{Const.},$$

$$H_{2,2} \approx \sum_1^N{}_i w_i^{(0)} + \frac{e^2}{2} 2 \left\{ \int \frac{|\psi_1(1)|^2 |\varphi_2'(2)|^2}{r_{12}} d\tau_1 d\tau_2 + \right.$$

$$+ \int \frac{|\varphi_2'(1)|^2 |\varphi_3(2)|^2}{r_{12}} d\tau_1 d\tau_2 + \int \frac{|\varphi_3(1)|^2 |\varphi_4(2)|^2}{r_{12}} d\tau_1 d\tau_2 + \ldots +$$

$$\left. + \int \frac{|\varphi_{N-1}(1)|^2 |\varphi_N(2)|^2}{r_{12}} d\tau_1 d\tau_2 \right\} - \frac{e^2}{2} \left\{ \int \frac{\varphi_1^*(1)\, \varphi_1(2)\, \varphi_2'^*(2)\, \varphi_2'(1)}{r_{12}} d\tau_1 d\tau_2 + \right.$$

$$\left. + \int \frac{\varphi_2'^*(1)\, \varphi_2'(2)\, \varphi_3^*(2)\, \varphi_3(1)}{r_{12}} d\tau_1 d\tau_2 + \right.$$

$$+\int\frac{\varphi_3^*(1)\varphi_3(2)\,\varphi_4^*(2)\,\varphi_4(1)}{r_{12}}\,d\tau_1\,d\tau_2+\ldots+$$

$$+\int\frac{\varphi_{N-1}^*(1)\,\varphi_{N-1}(2)\,\varphi_N^*(2)\,\varphi_N(1)}{r_{12}}\,d\tau_1\,d\tau_2\Big\}+\text{Const.},$$

$$H_{1,1}-H_{2,2}=e^2\Big\{\int\frac{|\varphi_2(1)|^2-|\varphi_2'(1)|^2}{r_{12}}\,|\varphi_3(2)|^2\,d\tau_1 d\tau_2\Big\}-$$

$$-e^2\Big\{\int\frac{\varphi_1'^*(1)\,\varphi_1'(2)\,\varphi_2^*(2)\,\varphi_2(1)}{r_{12}}\,d\tau_1\,d\tau_2-$$

$$-\int\frac{\varphi_1^*(1)\,\varphi_1(2)\,\varphi_2'^*(2)\,\varphi_2'(1)}{r_{12}}\,d\tau_1\,d\tau_2+$$

$$+\int\frac{\varphi_2^*(1)\,\varphi_2(2)-\varphi_2'^*(1)\,\varphi_2'(2)}{r_{12}}\,\varphi_3^*(2)\,\varphi_3(1)\,d\tau_1\,d\tau_2\Big\}\qquad(32)$$

Pe de altă parte

$$H_{1,2}=e^2\int\frac{\varphi_1'^*(1)\,\varphi_1(1)\,\varphi_2^*(2)\,\varphi_2'(2)}{r_{12}}\,d\tau_1\,d\tau_2-$$

$$-e^2\int\frac{\varphi_1'^*(1)\,\varphi_1(2)\,\varphi_2^*(2)\,\varphi_2'(1)\,d\tau_1\,d\tau_2}{r_{12}}\qquad(32')$$

Pentru a evalua ordinul de mărime al raportului (31), putem presupune acoperirea funcțiilor atomice atît de slabă, încît orice integrală în care apare un produs de forma $\varphi_1(1)\,\varphi_2(1)$ sau $\varphi_1'(1)\,\varphi_2(1)$ să fie neglijabilă. Rămîne

$$H_{1,1}-H_{2,2}\approx e^2\int\frac{|\varphi_2(1)|^2-\varphi_2'(1)|^2}{r_{12}}\,\varphi_3(2)|^2\,d\tau_1\,d\tau_2$$

$$H_{1,2}\approx e^2\int\frac{\varphi_1'^*(1)\,\varphi_1(1)\,\varphi_2^*(2)\,\varphi_2^1(2)}{r_{12}}\,d\tau_1\,d\tau_2.$$

Dacă am putea pune $\varphi_1\approx\varphi_1'$, $\varphi_2\approx\varphi_2'$, am obține $H_{1,1}-H_{2,2}\approx 0$ și criteriul (31) nu ar fi satisfăcut. În realitate funcțiile stărilor excitate diferă de cele ale stărilor fundamentale, fiind mai extinse în spațiu ,dar avînd o amplitudine mai mică. Schematizînd la maximum situația, obținem curbele din figura 5 reprezentînd variația funcțiilor care ne interesează în lungul lanțului de atomi (mărimile φ_1 , φ_2, φ_1', φ_2', φ_3 pot fi considerate reale).

Din această figură rezultă că, deoarece funcțiile $|\varphi_2(1)|^2 - |\varphi_2'(1)|^2$ și $|\varphi_3(2)|^2$ se acoperă ceva mai mult decît funcțiile $\varphi_1(1)\,\varphi_1'^*(1)$ și, $\varphi_2^*(2)\,\varphi_2'(2)$

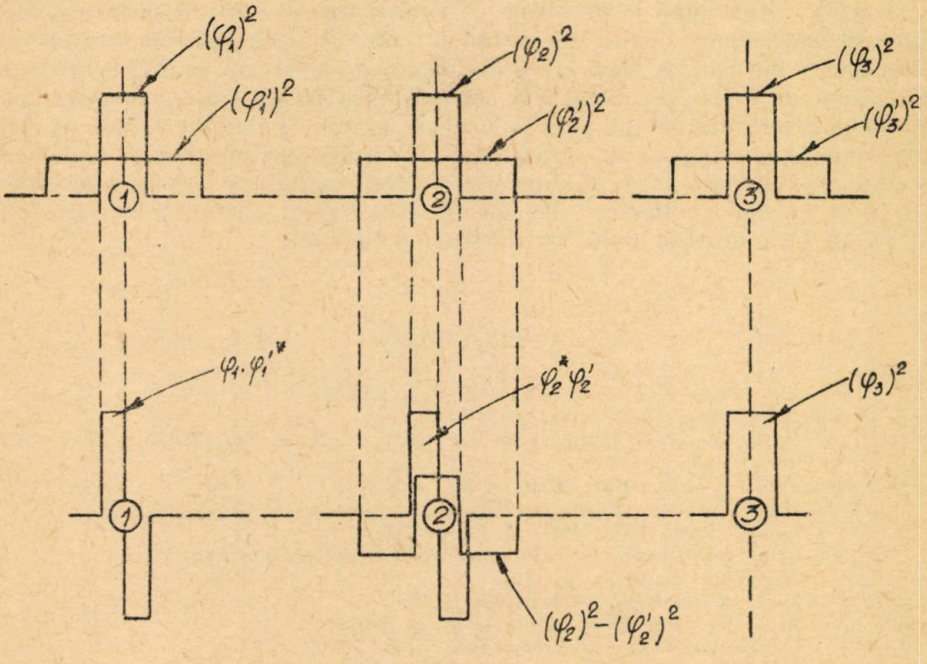


Fig. 5

este posibil ca $|H_{1,1} - H_{2,2}|$ să fie mai mare decît $H_{1,2}$ și, prin urmare, criteriul de existență (28) să fie satisfăcut.

О ПОВЕРХНОСТНЫХ СОСТОЯНИЯХ КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ДИЭЛЕКТРИКОВ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Автор рассматривает вопрос о существовании поларонных и эксцитонных поверхностных состояний конечного кристалла. В случае поларонов применяется адиабатический метод Пекара и результат получается отрицательный: не существует поверхностных состояний, кроме обычного случая статического поларона. В случае эксцитонов рассматривается гипотетический случай одномерной решетки, атомы которой состоят из атомного остатка и оптического электрона, причем результат получается следующий: поверхностные состояния могут существовать если удовлетворен известный, очень чувствительный критерий (28). Есть указания, что этот критерий удовлетворяется в случае реальных веществ.

SUR LES ÉTATS DE SURFACE DES DIÉLECTRIQUES CRISTALLINS

(RÉSUMÉ)

L'Auteur s'est posé le problème de l'existence des états de surface polaroniques et excitoniques dans un cristal fini, états qui ne peuvent être décrits par la théorie des bandes. Dans le cas des polarons, en suivant de près la méthode adiabatique de Pekar, il conclut à la non existence de tels états, exception faite pour le polaron statique, qui peut se localiser en tout point du cristal et, par suite, dans le voisinage de sa surface. Dans le cas des excitons, étudié seulement sur un modèle hypothétique unidimensionnel, les états de surface sont possibles, mais leur existence effective dépend d'un criterium extrêmement sensible, qui paraît être satisfait dans les substances réelles.

BIBLIOGRAFIE

1. Ig. Tamm, Phys. Z. d. Sow. Un. 1932, t. 1, p. 733.
2. A. Maue, Z. Phys., 1935, t. 94, p. 717.
3. E. T. Goodwin, Pros. Camb. Phil. Soc. 1939, t. 35, p. 204; 1939, t. 35, p. 221; 1939, t. 35, p. 232.
4. W. Shockley, Phys Rev., 1939, t. 56, p. 317.
5. F. F. Wolkenstein, *Elektroprovodnosti poluprovodnikov*. Moscova, 1947.
6. J. Bordeen, Phys. Rev., 1947, t. 71, p. 717.
7. S. I. Pekar, *Issledovania po elektronnoi teorii kristalov*. Moscova, 1951.
8. — U.F.N., 1953,t. 50, p. 197.
9. J. Frenkel, Phys. Rev., 1931, t. 37, p. 17.
10. R. Peierls, Ann. der Phys., 1932, t. 13, p. 905.
11. F. Seitz, *Modern Theory of Solids*. New York, 1940.
12. J. Slater a. W. Shockley, Phys. Rev., 1936. t. 50, p. 705.

INSTALAȚIE SEMIAUTOMATĂ PENTRU EXTRAGEREA ȘI PURIFICAREA RADONULUI *)

DE

AL. SANIELEVICI

Instalația se bazează pe metoda degazării în vid a unei soluții de halogenură de radiu, închisă într-un spațiu limitat. Faza gazoasă este un amestec de radon, gaz tonant, azot, bioxid de carbon și urme de halogen.

Radonul fiind solubil în apă, raportul concentrațiilor acestui gaz în faza lichidă și în faza gazoasă respectă legea lui Henry

$$\alpha' = \frac{Rn_l \cdot V_g}{Rn_g \cdot V_l} \qquad (1)$$

unde Rn_l este cantitatea de radon dizolvat în volumul V_l al fazei lichide și Rn_g este cantitatea de radon prezentă în faza gazoasă de volum Vg. Coeficientul α' depinde și de temperatură, conform legii lui Meyer,

$$\alpha' = 0{,}105 + 0{,}405\, e^{-0.502.t.}$$

Procedeele de purificare a radonului prin îndepărtarea impurităților gazoase au fost elaborate de W. Ramsay și F. Soddy, E. Rutherford, A. Debierne, W. Duane, V. F. Hess etc.

Eliminarea gazului tonant se face prin explozie eudiometrică, iar uscarea, cu Cl_2Ca sau P_2O_5. Îndepărtarea gazului carbonic se face prin absorbție cu var sodat. Eliminarea urmelor de O_2 și H_2 se face prin reducerea oxidului negru de cupru, respectiv oxidarea cuprului redus. Azotul se absoarbe pe Li metalic încălzit ușor.

După aceste operații, radonul se condensează pe aer lichid îndepărtîndu-se totodată, prin pompare, urmele de gaze nelichefiate. Radonul readus în stare gazoasă se comprimă în capilarul terminal în care este înfiolat.

★

Instalațiile descrise de diverși autori în literatura dinainte de 1937 reprezintă variante mai mult sau mai puțin complicate ale aparatului manual schematizat în figura 1. Aceste instalații prezintă două inconveniente principale:

1° toate operațiile se execută manual;

2° datorită acestui fapt personalul este expus acțiunii prelungite a radiației gamma penetrante.

*) Notă de laborator prezentată Institutului de fizică la data de 15 mai 1954.

În 1937, T. H. Oddie [1] a descris o aparatură semiautomată, care înlătură într-o măsură apreciabilă neajunsurile de mai sus. Instalațiile de extragere și purificare a radonului, actualmente în funcțiune în laboratoarele de radioactivitate sau în instituțiile medicale unde se practică curieterapia, sînt construite, în general, după modelul Oddie.

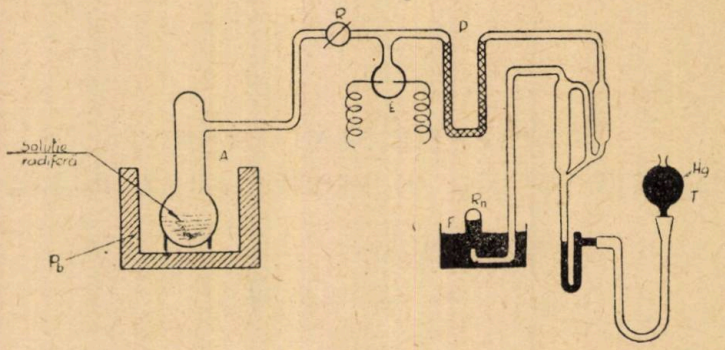


Fig. 1

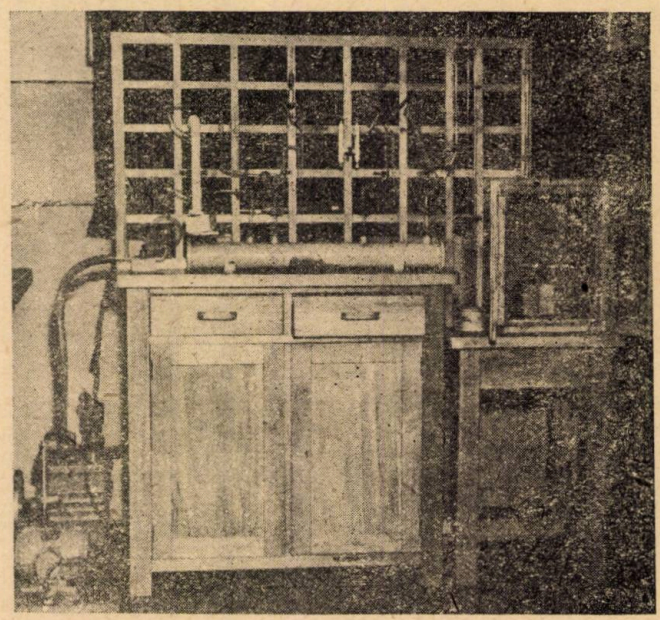


Fig. 2

Instalația realizată la Institutul de fizică al Academiei R.P.R., în cadrul planului de înzestrare generală a laboratoarelor, este de același tip, dar comportă o serie de modificări de amănunt, destinate să asigure o funcționare cît mai simplă și rapidă, cu un randament de extracție cît mai mare.

Protecția personalului este asigurată de un blindaj clădit din cărămizi de plumb (10—10×5 cm), în care sînt practicate deschiderile necesare pentru manevrarea robinetelor.

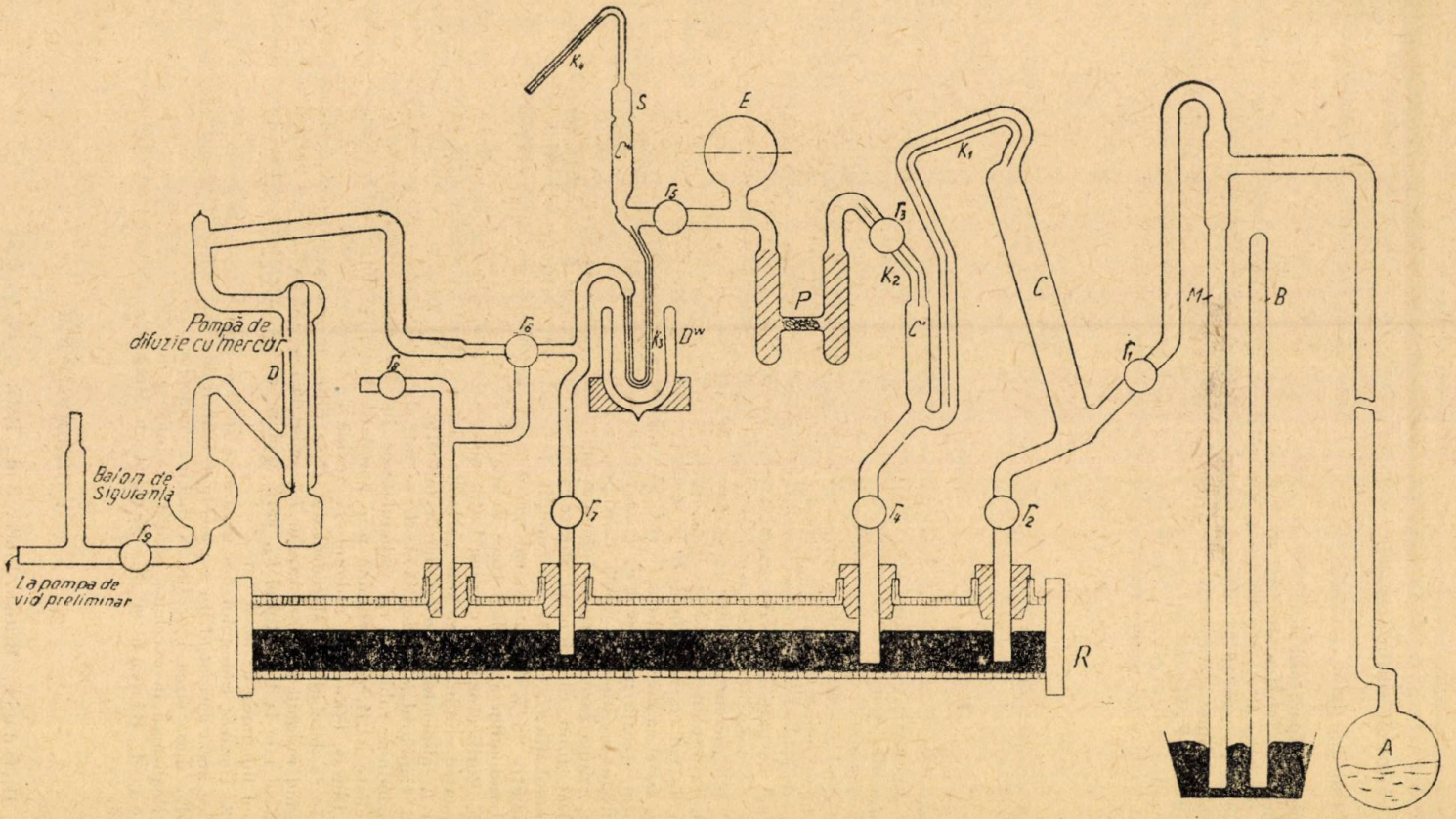

K4
S
E
K1
K2
P
C
C'
M
B
A
R
D
Dw
Pompă de
difuzie cu mercur
Balon de
siguranță
la pompa de
vid preliminar

Fig. 3

Aceasta constituie singura operație efectuată manual, în afară de închiderea « acelor » cu Rn.

Clișeul din figura 2 înfățișează vederea generală a instalației, blindajul fiind îndepărtat.

Schema aparaturii este dată în figura 3.

Modul de funcționare este următorul:

1. În balonul A (sticlă Duran, 300 cm^3) se introduce soluția radiferă (100 cm^3). Manometrul cu mercur M măsoară presiunea fazei gazoase deasupra soluției. Barometrul B indică presiunea exterioară.

Volumul V_g al fazei gazoase este limitat de robinetul r_1, care este închis în timpul acumulării radonului (în general, 30 de zile). V_g fiind aproximativ de trei ori mai mare decît volumul V_l al fazei lichide, vom avea conform cu relația (1),

$$\frac{\mathrm{Rn}_l}{\mathrm{Rn}_g} = \alpha' \cdot \frac{V_l}{V_g} = \frac{\alpha'}{3}. \qquad (2)$$

La temperatura camerei (20°C), $\alpha' = 0{,}254$ și deci $\mathrm{Rn}_l = 0{,}084\ \mathrm{Rn}_g$. Punînd $\mathrm{Rn}_l + \mathrm{Rn}_g = 100$, avem

$$\mathrm{Rn}_g = 92{,}3\%.$$

Deci, peste 92 % din radonul acumulat se află în faza gazoasă.

2. Instalația aflîndu-se sub vid pînă la robinetul r_1 și toate robinetele fiind închise, r_1 se deschide. Amestecul de gaze din A se destinde în spațiul limitat de r_2, r_3 și r_4.

Se închide r_1 și se deschide r_2. Mercurul din rezervorul etanș R se ridică și umple vasul C, împingînd gazele din C în C' prin capilarul k_1. Cînd coloana de mercur care coboară prin acest capilar apare la partea inferioară a vasului C', se deschide și r_4. Mercurul care urcă prin acest robinet se unește cu cel din capilar și, ridicîndu-se mai departe, comprimă amestecul de gaze în partea superioară a vasului C'.

3. Se deschide robinetul r_3. Mercurul împinge gazele, prin capilarul k_2, în spațiul P, E. Cînd mercurul ajunge la r_3, acesta se închide.

4. Prin robinetul cu trei căi r_8, așezat în poziția corespunzătoare, se pune în comunicație pompa de vid cu rezervorul R și se face vidul deasupra mercurului. Se deschid apoi r_3 și r_4 astfel ca mercurul din C' și C să coboare pînă la nivelul nn'. Se redeschide atunci r_1 și prin aceasta amestecul de gaze rămas în spațiul A se destinde în spațiul C, C'. Se restabilește presiunea normală deasupra mercurului din R prin manevrarea robinetelor r_6 și r_8, după care se repetă întocmai operațiile descrise la punctele 2, 3 și 4.

Dat fiind că raportul dintre volumul din A (de la suprafața soluției pînă la r_1) și volumul din C, C' este aproximativ 1 : 3, prin repetarea de trei ori a acestor operații, aproximativ 98 % din amestecul gazos aflat inițial în A (adică aproximativ 90 % din totalul radonului acumulat) trece în spațiul P, E.

5. Purificatorul P conține $CaCl_2$ anh. pentru eliminarea vaporilor de H_2O și KOH anh. pentru eliminarea gazului carbonic. Gazul tonant se elimină prin explozie în eudiometrul E, alimentat de o bobină de inducție. Vaporii de apă rezultați se elimină cu P_2O_5.

6. Capilarul k_3 în formă de U se introduce într-un vas Dewar (DW) cu aer lichid. Deschizîndu-se robinetul r_5, radonul trece în k_3, unde se condensează; urmele de gaze nelichefiate (O,H,N) se elimină prin pompare. Apoi, r_5 și r_6 fiind închise, se îndepărtează vasul Dewar, lăsîndu-se radonul să revină la starea gazoasă.

7. Se deschide r_7. Mercurul din R se ridică în capilarul k_3 și de acolo în vasul C'', împingînd radonul în tubul capilar k_4, sudat la capătul superior al șlifului S. Cu o microflacără se taie la bază tubul k_4, care apoi se subîmparte, prin același procedeu, în fiole (ace) cu lungimea de 3—5 cm.

8. Dozarea radonului din fiecare ac se face prin măsurarea radiației γ a Ra (C, C'), după ce acest derivat al Rn s-a pus în echilibru de regim cu elementul generator. Echilibrul intervine după circa 4 ore de la închiderea acelor.

Realizarea în excelente condiții tehnice a instalației descrise se datorește și tov. Gh. Goagă, I. Bîrsan și N. Brodman. Mulțumim acestor colaboratori pentru munca depusă.

BIBLIOGRAFIE

1. T. H. Oddie, British Journ. Rad., 1937, t. 10, p. 348.

MICROCALORIMETRU ADIABATIC AUTOMAT PENTRU MĂSURĂTORI DE RADIOACTIVITATE *)

DE

A. HILF și AL. SANIELEVICI

Energia liberată într-un proces radioactiv poate fi măsurată direct cu ajutorul unui microcalorimetru. Fiind vorba de măsurători în care timpul de observație este în general lung, microcalorimetrul adiabatic este indicat în mod special.

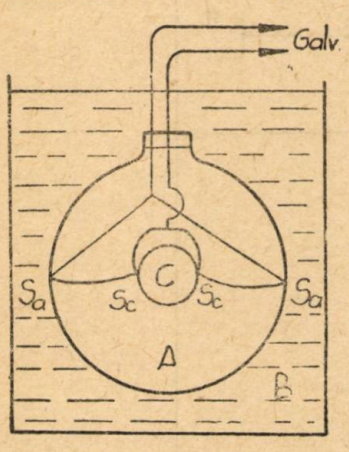


Fig. 1

Figura 1 reprezintă schema de principiu a unui microcalorimetru adiabatic [1]. Corpul C, sediu al fenomenului termic care se măsoară, este așezat în incinta A, plasată la rîndul ei într-un mediu B (de exemplu, apă). Sudurile S_c a două sau mai multe termocuple iau temperatura T_c a corpului, iar sudurile S_a iau temperatura T_a a incintei. Sudurile sînt conectate în paralel la bornele unui galvanometru ,care nu indică nici o deviație atîta vreme cît $T_a = T_c$ și dacă nici o f.e.m. nu apare în circuit.

Tehnica măsurătorilor cu un asemenea microcalorimetru se caracterizează prin aceea că experiența este condusă astfel încît temperatura T_c a corpului calorimetric și temperatura T_a a incintei înconjurătoare să rămînă egale în tot timpul experienței [2]. Procesul adiabatic se traduce deci printr-o deviație nulă a galvanometrului.

Temperatura incintei poate fi măsurată cu ajutorul unui termometru. Dacă T_1 și T_2 sînt temperaturile inițială și finală, iar K este capacitatea calorică a corpului C, debitul de căldură în timpul t ale experienței este dat de

$$q = K\,(T_2 - T_1)\ \text{cal. g.}$$

Pentru păstrarea egalității $T_a = T_c$ trebuie să încălzim treptat incinta A prin mijlocirea mediului B. Mai precis, curba temperatură-timp care caracterizează procesul termic studiat trebuie să fie reprodusă identic de curba temperatură-timp a incintei. Orice deviere de la identitatea în timp a celor două curbe înseamnă o abatere în plus sau în minus de la condiția de adiabaticitate.

Practic, se urmăresc deviațiile galvanometrului. Dacă mediul B este apă, se adaugă apă caldă pînă cînd deviația galvanometrului arată că T_c a crescut față de T_a .Operația este laborioasă și incomodă, cu atît mai mult cu cît durata experienței este mare. În plus, reglarea manuală nu se poate face niciodată suficient de precis și de prompt, astfel încît se produc abateri destul de mari și de frecvente față de condiția de adiabaticitate [3].

Ne-am propus să eliminăm aceste inconveniente prin automatizarea îndeplinirii condiției de adiabaticitate. Totodată am modificat și construcția instalației calorimetrice, folosind ca incintă A un bloc masiv de cupru electrolitic (cilindru cu înălțimea de 190 mm și diametrul exterior de 180 mm). Acest bloc este adus și menținut la temperatura corpului calorimetric C cu ajutorul unui generator de înaltă frecvență.

Controlul curbei-temperatură-timp a incintei se face automat, fiind comandat de curba temperatură-timp a corpului C.

Două relee de tip telefonic Re_1 și Re_2 sînt montate în circuitele anodice a două tuburi electronice T_1 și T_2, ale căror grile sînt controlate de două fotocelule F_1 și F_2 (fig. 2). Fotocelula F_1 este montată astfel ca releul Re_1 să acționeze la apariția luminii (spotului galvanometric). Dimpotrivă, fotocelula F_2 este montată astfel ca releul Re_2 să acționeze la dispariția luminii.

Spotul galvanometrului (care este conectat cu cele două termocuple) se depărtează de poziția de zero cînd echilibrul $T_a = T_c$ este rupt. El se poate plimba în fața celor două celule fotoelectrice (fig. 3).

*) Notă de laborator prezentată Institutului de fizică la data de 15 mai 1954.

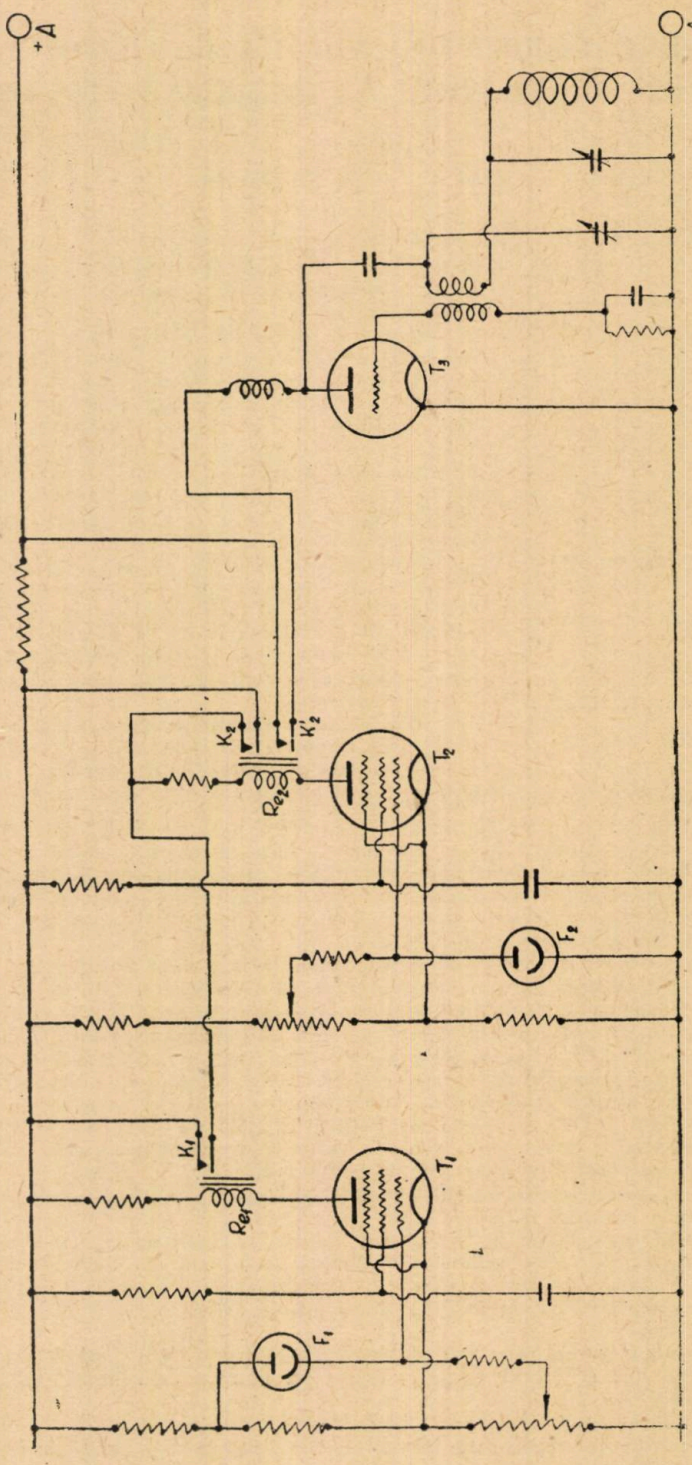


Fig. 2

Să presupunem că temperatura corpului calorimetric crescînd produce dezechilibrul $T_a < T_c$. Spotul se deplasează spre poziția 2. Înainte ca spotul să fi ajuns în această poziție, contactul K'_2, al releului Re_2 este deschis, iar contactul K_2 al aceluiași releu este închis. În momentul cînd spotul ajunge în poziția 2 și fotocelula F_2 este luminată, releul Re_2 este desensibilizat. Contactul K_2 se deschide, iar contactul K'_2, montat în circuitul generatorului de înaltă frecvență, se închide. Incinta A începe să fie încălzită, T_a crește mai repede ca T_c și temperaturile se egalizează. În acest timp, contactul K_1 fiind și el deschis, circuitul anodic al tubului 2 este întrerupt, astfel că spotul poate trece dincolo de poziția 2 fără ca circuitul de încălzire să se întrerupă. Din același motiv, spotul poate trece prin poziția 2 la întoarcere, fără a provoca nici o schimbare.

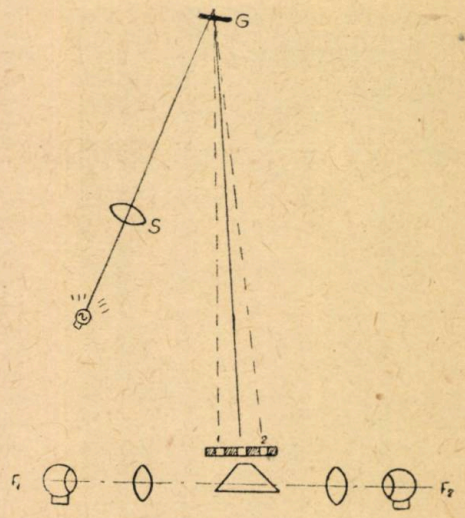


Fig. 3

Dacă, dimpotrivă, se produce dezechilibrul $T_a > T_c$, spotul se deplasează spre poziția 1. Ajungînd în această poziție, fotocelula F_1 este luminată, releul Re_1 este sensibilizat și se închide contactul K_1, în timp ce K'_2 se deschide. Funcționarea generatorului de încălzire este oprită. Temperatura T_c crescînd mai departe, echilibrul $T_a = T_c$ se restabilește după un timp scurt.

Procesul descris reîncepe, astfel că în tot timpul experienței, spotul oscilează între pozițiile 1 și 2. Folosind un galvanometru sensibil la diferențe de potențial, care dă deviații relativ mari pentru diferențe foarte mici de temperatură, menținerea automată a condiției de adiabaticitate mijlocie se face în bune condiții.

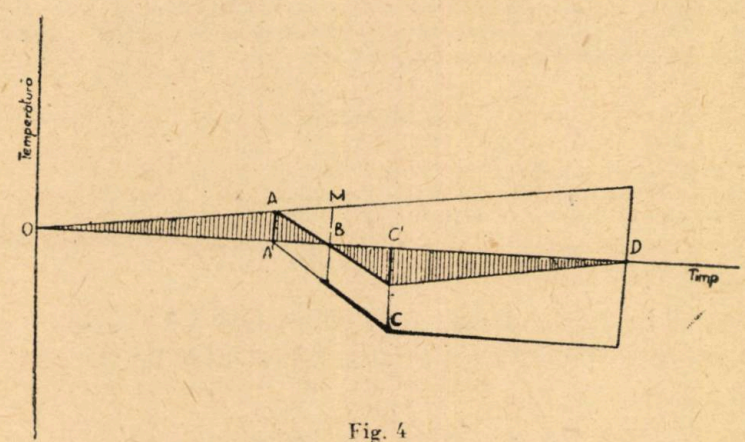


Fig. 4

Oscilațiile spotului, de o parte și alta a poziției zero, se fac în timpuri sensibil egale, ceea ce este una din condițiile necesare pentru ca măsurătorile să poată fi considerate corecte sub raportul menținerii adiabaticității.

Generatorul de încălzire de înaltă frecvență este de putere mică. Pentru calcularea acestei puteri, s-a ținut seama de următoarele considerente:

Folosind termocuple cupru-constantan și un galvanometru care dă o deviație de 1 mm la 1 m pentru o diferență de potențial la borne egală cu $3{,}6 \cdot 10^{-8}$ V, diferența de temperatură necesară spre a produce o asemenea deviație este $2 \cdot 10^{-3}$ °C. Dacă debitul de căldură

în C produce o creștere a temperaturii T_c de ordinul 4.10^{-5} °C/s, valoare care corespunde efectului termic al unei cantități de 2,17 mg Ra, rezultă că o deplasare cu 1 mm a spotului se efectuează în 50 de secunde. În acest interval de timp, creșterea temperaturii T_c este egală cu 2.10^{-3} °C și se poate admite fără eroare apreciabilă că procesul este liniar (segmentul $A'A$, fig. 4). În următoarele 10 secunde creșterea temperaturii T_c devine $2,4.10^{-3}$ °C, (punctul M, fig. 4). Dar în punctul de funcționare A' al diagramei se declanșează generatorul de încălzire, care este reglat astfel ca să ridice temperatura T_c a incintei cu $2,4.10^{-3}$ °C în 10 secunde, restabilindu-se echilibrul de temperatură (punctul B al diagramei,fig. 4). Generatorul de încălzire continuînd să funcționeze, T_a crește cu $2,4.10^{-3}$ °C față de T_c în 10 secunde, după care generatorul se întrerupe (punctul C al diagramei, fig. 4). Echilibrul $T_a = T_c$ se restabilește, apoi T_c crește peste T_a și ciclul se repetă identic. În definitiv, se obțin abateri egale cu circa 1 mm în timpuri egale (60 s) de o parte și de alta a poziției zero, realizîndu-se în acest mod, prin compensarea fluctuațiilor de temperatură, adiabaticitatea medie a experienței.

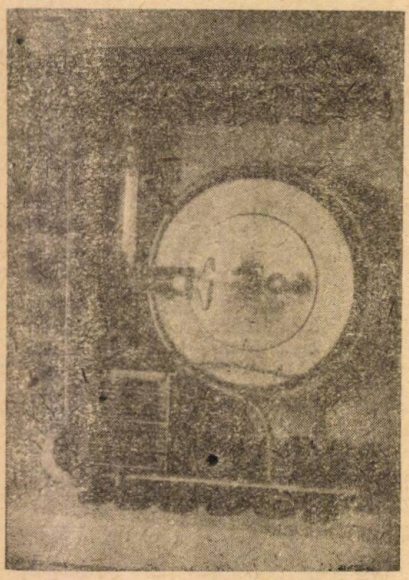


Fig. 5

În exemplul folosit, care corespunde unui efect termic mijlociu, generatorul trebuie să ridice temperatura masei de cupru cu $2,4.10^{-3}$ °C în 10 secunde. Ținînd seama de capacitatea calorică a blocului de cupru, se calculează că el trebuie să fie așezat într-un cîmp de 2 Oe care să-i cedeze o putere de circa 3 W. Astfel, un generator de 10 W este suficient pentru a asigura corecta funcționare a dispozitivului, puterea generatorului putînd fi reglată după voie.

Instalația microcalorimetrică descrisă sumar în această lucrare este actualmente realizată (fig. 5). Vom da într-o lucrare ulterioară descrierea sa completă, precum și rezultatele primelor determinări efectuate cu ajutorul ei.

BIBLIOGRAFIE

1. Al. Sanielevici, Journ. Chim. Phys., 1933, nr. 30, p. 513.
2. W. Swietoslawski, Microcalorimetry. Reinhold, New York, 1946.
3. M. J. Marteret, Science et industrie, 1932, nr. 217, p. 1.

EVAPORAREA METALELOR ÎN VID LA TEMPERATURĂ CUNOSCUTĂ*)

DE

M. NACHMAN și M. ONCESCU

Pentru obținerea păturilor subțiri metalice prin evaporarea metalelor în vid se găsesc descrise în literatură o serie de metode. Fie că se urmărește o problemă teoretică (studiul structurii păturilor metalice subțiri), fie că se urmărește o problemă practică (depunerea peliculelor metalice pentru celule fotoelectrice, pile termoelectrice, bolometre sau pentru alți receptori de radiații calorice, sau depunerea acestora ca suprafețe reflectoare în aparatura

*) Lucrare prezentată Institutului de fizică la data de 31 octombrie 1954.

de interferenţă etc.), este important să se cunoască grosimea păturii subţiri. În unele cazuri, în special în cele practice, interesează numai grosimea finală a peliculei metalice, dar în alte cazuri, şi anume în cele de interes teoretic, este necesar să se poată urmări creşterea grosimii peliculei în timpul depunerii ei.

De aceea pentru determinarea grosimii unei pături subţiri se folosesc două procedee: primul procedeu conduce la determinarea grosimii finale, iar al doilea permite, cu anumite rezeve, cunoaşterea grosimii în orice moment.

Procedeul nr. 1. Se determină masa metalului depus prin evaporare pe o suprafaţă bine cunoscută, prin microcîntărire sau prin metode fizico-chimice de analiză cantitativă. Dacă se presupune că densitatea metalului în peliculă este egală cu aceea a metalului în bloc (metalul masiv) se poate deduce imediat grosimea păturii metalice. Pentru aceasta, suportul pe care se face depunerea trebuie să aibă o anumită formă sau este necesar să se ataşeze de suport o plăcuţă de sticlă sau cuarţ, foarte uşoară, pe care să se depună pelicula metalică. Ultima soluţie, care este singura indicată pentru microcîntărire, se realizează greu în practică, mai ales dacă depunerea vaporilor metalici trebuie să se facă la temperaturi scăzute (temperatura de sublimare a zăpezii carbonice, sau temperatura de fierbere a azotului lichid).

Procedeul nr. 2. Din datele teoriei cinetice se poate cunoaşte numărul de atomi care părăsesc suprafaţa metalului topit, la temperatura T, într-un anumit unghi solid. Se poate calcula astfel numărul de atomi Q care ciocnesc în unitate de timp unitatea de arie a suprafeţei suportului pe care are loc depunerea vaporilor metalici. Pentru sursele practic punctuale*) expresia mărimii Q (numită şi *intensitatea fasciculului de atomi*), va fi [1[

$$Q = \frac{\mathfrak{N}}{\pi\sqrt{2\pi R}} \frac{p \cdot a}{d^2\sqrt{M\,T}},$$

unde $\mathfrak{N}$ este numărul lui Avogadro, R — constanta gazelor perfecte, p — presiunea vaporilor metalici la temperatura T (T este temperatura sursei care emite vaporii metalici), M — masa moleculară a metalului care se evaporă, a — aria care emite vaporii metalici (adică suprafaţa topită), d — distanţa de la sursă la suprafaţa de depunere (fig. 1).

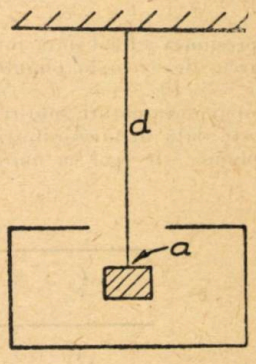


Fig. 1

Nu toţi atomii care lovesc suprafaţa suportului sînt reţinuţi de acesta; o parte din atomii de metal, după ce rămîn un timp destul de mic pe suprafaţa de depunere, părăsesc această suprafaţă [2]; numărul de atomi q care rămîn în unitatea de timp pe unitatea de arie a suportului va fi

$$a = \eta Q = \eta \frac{\mathfrak{N}}{\pi\sqrt{2\pi R}} \frac{p \cdot a}{d^2\sqrt{MT}},$$

unde η este *coeficientul de reţinere* al suportului pentru o anumită specie de atomi; în unele lucrări η este denumit *coeficient de condensare* sau *de captare* [3].

Coeficientul de reţinere al suportului faţă de o anumită specie de atomi, definit ca raportul între numărul de atomi care ciocnesc suportul şi numărul de atomi care rămîn pe acesta, depinde, în primul rînd, de temperatura suportului Θ [4]. Există o anumită temperatură Θ^* a acestuia, deasupra căreia coeficientul η rămîne nul, oricît timp ar fi expus suportul fasciculului de atomi. Temperatura Θ^* este cu atît mai mare, cu cît metalul este mai greu evaporabil (adică cu cît tensiunea proprie de vapori este mai mică), în lanţul:

Hg, K, Cd, Ca, Pb, Sn, Ag, Al, Fe, Ni, Pt, Mo, W

temperatura Θ^* creşte de la stînga spre dreapta [5].

Coeficientul de reţinere al suportului creşte, cu cît temperatura acestuia este mai mică. Sub o anumită temperatură care caracterizează un anumit suport şi o anumită specie de atomi, coeficientul de reţinere este egal cu unitatea, adică toţi atomii care ciocnesc suportul sînt reţinuţi de acesta.

Coeficientul de reţinere η depinde, în al doilea rînd, de intensitatea Q a fascicolului de atomi, adică de numărul de atomi care ciocnesc suportul în unitatea de timp. Există o

*) Sursele practic punctuale sînt acelea ale căror dimensiuni sînt mici faţă de distanţa pînă la suprafaţa de depunere. Pentru astfel de surse a se vedea [1].

intensitate Q^* dedesubtul căreia coeficientul de reținere este zero, oricît timp suportul ar fi expus fasciculului format din atomii metalului respectiv*). În sfîrșit, intensitatea Q^* depinde de lărgimea fasciculului, și anume această intensitate crește pentru fasciculele înguste [4].

Se observă că într-o instalație cu puncte la temperaturi diferite, vaporii metalici se depun mai ușor pe porțiunile mai reci și mai greu pe porțiunile mai calde, coeficientul η este mai mare pentru primele, decît pentru ultimele. Pe porțiunile aflate peste o anumită temperatură vaporii metalici nu se depun de loc, deoarece coeficientul de reținere al acestora este egal cu zero. Coeficientul de reținere al acestor porțiuni va diferi de zero numai prin mărirea temperaturii sursei care emite vaporii metalici, adică prin mărirea intensității Q a fasciculului de atomi.

Dacă se folosesc valorile $\mathfrak{N} = 6{,}02.10^{23}$ mol^{-1}, $R = 8{,}3.10^7$ erg grd^{-1} mol^{-1} și se dă presiunea vaporilor metalici în torri (1 Torr = 1 333 barye), aria a în centimetri pătrați, distanța d în centimetri, masa moleculară M în grame pe mol și temperatura T în grade Kelvin, se obține

$$q = 1{,}1 \cdot 10^{22}\, \eta \frac{p \cdot a}{d^2 \sqrt{MT}} \text{ atomi/s.cm}^2.$$

Din expresia lui q, se poate calcula expresia vitezei de creștere a grosimii păturii subțiri

$$\xi = \frac{qM}{\mathfrak{N}\rho} = \frac{\eta}{\pi \sqrt{2\pi R}} \frac{p \cdot a}{d^2 \rho} \sqrt{\frac{M}{T}},$$

unde ρ este densitatea metalului care se depune, sau

$$\xi = 1{,}8.10^{-2}\, \eta \frac{p \cdot a}{d^2 \rho} \sqrt{\frac{M}{T}}$$

presiunea p fiind dată tot în torri, iar restul mărimilor în unități CGS**). Pentru un metal greu, de exemplu plumbul, $M = 207$ g/mol, $\rho = 11{,}3$ g/cm^3 și pentru cazul $A = 1$ cm^2, $a = 2 \cdot 10^{-2}$ cm^2, $d = 5$ cm, tabloul nr. 1 dă cîteva valori ale vitezei de creștere ξ a grosimii unei pături subțiri de plumb, în milimicroni pe minut (presiunea vaporilor metalici este dată în microrotorri), dacă coeficientul de reținere η al suportului pentru atomii de plumb este egal cu unitatea.

Tabloul nr. 1

T °C	T °K	p μ Toor	q atomi/s cm^2	ξ mμ/min.
427	700	0,52	$1{,}2.10^{10}$	$0{,}22.10^{-4}$
527	800	20	$4{,}3.10^{11}$	0,079
627	900	600	$1{,}2.10^{13}$	0,22
727	1 000	9 400	$1{,}8.10^{14}$	3,3

Prin urmare, pentru cunoașterea grosimii unei pelicule metalice este necesar să se cunoască temperatura T la care are loc evaporarea metalului.

De asemenea, este necesar să se cunoască temperatura suportului pentru un anumit metal, sub care coeficientul de reținere respectiv este egal cu unitatea. Se poate presupune $\eta = 1$, dacă temperatura suportului este egală cu temperatura de fierbere a hidrogenului lichid în cazul metalelor ușor evaporabile (metalele alcaline) sau dacă temperatura suportului este egală cu temperatura de fierbere a azotului lichid în cazul metalelor mai greu

*) Din determinări mai recente [3], făcute cu ajutorul izotopilor radioactivi, se pare că $\eta \neq 0$ chiar la fascicule de atomi de intensitate foarte mică.

**) Aceste relații sînt valabile, dacă presiunea gazului din instalația de evaporare este astfel încît drumul liber mijlociu al moleculelor acelui gaz este mai mare decît distanța d.

evaporabile (de exemplu: Pb, Sn, Ag, Al, Ni). În cazul în care temperatura suportului este mai ridicată (de exemplu la studiul structurii peliculelor metalice, cînd temperatura suportului trebuie să varieze în limite destul de largi), se impune să se facă determinarea coeficientului de reținere al suportului pentru vaporii metalici respectivi, la toate temperaturile suportului la care se face depunerea peliculelor metalice. Numai în aceste condiții se poate aplica procedeul nr. 2 pentru determinarea grosimii peliculelor metalice.

★

Din examinarea celor două procedee de determinare a grosimii peliculei metalice se vede că al doilea procedeu are avantajul de a permite cunoașterea grosimii păturii în tot timpul depunerii acesteia. Evident, așa cum s-a spus, de la anumite temperaturi ale suportului pe care se face depunerea, trebuie determinat coeficientul de reținere al acestuia, ar această mărime nu poate fi determinată decît prin primul procedeu descris mai sus*).

Chiar în cazurile în care nu este necesar să se cunoască variația grosimii unei pelicule metalice în timpul depunerii, este mai ușor să se deducă grosimea finală, cunoscînd temperatura la care se face evaporarea, decît executînd o microcîntărire. Dacă se recurge la dozarea fizico-chimică, aceasta distruge pătura depusă, ceea ce nu este totdeauna de dorit.

Determinarea corectă a grosimii prin cunoașterea temperaturii (presupunînd coeficientul de reținere determinat) se face numai dacă evaporarea a avut loc tot timpul la aceeași temperatură. Constanța în timp a temperaturii T a sursei de vapori condiționează constanța intensității Q a fasciculului de atomi și deci constanța coeficientului η, ceea ce conduce la determinarea exactă a mărimii. Pentru aceasta, sursa de vapori metalici trebuie separată de suportul pe care se face depunerea, printr-un perete în care se practică o deschidere circulară. Acestei diafragme i se atașează un ecran mobil. Ecranul se deschide numai după ce evaporarea metalului a intrat în regim staționar (Q = constant).

Măsurarea temperaturii s-ar putea face fie introducînd un termocuplu în instalația de evaporare, astfel încît el să măsoare chiar temperatura metalului care se evaporă, fie cu ajutorul unui pirometru optic. Ultimul procedeu nu este indicat, deoarece în multe cazuri se folosesc temperaturi de evaporare sub 770°K (~500°C), iar în celelalte cazuri depunerea vaporilor metalici și pe pereții laterali face imposibilă observația sursei de vapori metalici, dacă tubul de experiență nu este adaptat special pentru aceasta.

Determinarea temperaturii metalului topit prezintă inconveniente în cazul metalelor greu evaporabile, unde evaporarea trebuie făcută dintr-un evaporator (cuptoraș, sobă moleculară etc.) situat undeva în interiorul instalației. În cazul metalelor ușor evaporabile, topirea lor se poate face direct pe fundul unei mici eprubete, care face parte din instalația de evaporare.

Din datele tabloului nr 1 se vede că grosimea unei pelicule metalice, depusă prin evaporare în vid, crește foarte repede cu temperatura. Pentru obținerea peliculelor metalice de grosimi reduse (0,1...1 mμ), este deci necesar să se folosească viteze de evaporare foarte mici, adică temperatura la care are loc evaporarea trebuie să fie coborîtă. În cercetarea variației structurii filmelor metalice, studiate, de exemplu, prin intermediul proprietăților electrice, este esențial ca grosimea să crească încet în timp, adică este necesară o viteză mică de evaporare.

O altă condiție care se pune surselor de vapori metalici este ca ele să aibă o capacitate relativă destul de mare. Dacă volumul util al unei asemenea surse este mare în comparație cu volumul total al sursei, în primul rînd radiația termică este mai redusă, iar în al doilea rînd inerția termică a sobei este mai mică. Pe de altă parte, o capacitate mare a sobei este de dorit în cazul evaporărilor intense (prelungite); în celelalte cazuri capacitatea mare a sobei permite ca ea să fie cît mai rar încărcată și predegazată, ceea ce oferă avantaje foarte mari în cazul instalațiilor închise.

★

În cele ce urmează vor fi arătate sursele de vapori metalici, indicate în literatură, examinîndu-se în ce măsură ele satisfac cele trei condiții de mai jos:

1. Viteza de evaporare mică.
2. Capacitatea mare.
3. Posibilitatea introducerii unui termocuplu.

---

*) În ultimii ani coeficientul de reținere a fost determinat și cu ajutorul izotopilor radioactivi [3].

Evaporarea metalelor de pe filament. Acest procedeu este mai răspîndit, deoarece satisface în general condițiile obișnuite, cerute pentru metalizările necesare în tehnică și în laborator. Ținînd seama de condițiile de mai sus, dezavantajele acestui procedeu sînt:

1. Nu se poate obține o viteză de evaporare mică, deoarece în timpul evaporărilor prelungite, picăturile de metal topit cad din cauza trepidațiilor instalației.

2. Nu se pot depune cantități mari de metal.

3. Nu se poate atașa un termocuplu. De altfel este greu de măsurat temperatura la filamente, deoarece există o distribuție a temperaturii de-a lungul acestuia; picăturile de metal de la extremitățile sale se găsesc la o temperatură mai mică decît aceea a picăturilor

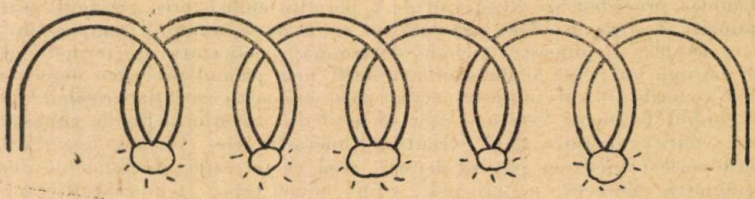


Fig. 2

din centru (fig. 2)*). Pentru determinarea vitezei de evaporare, nici etalonarea filamentului**) nu duce la un rezultat pozitiv, deoarece la diferitele evaporări picăturile ocupă altè locuri și se găsesc deci, la alte temperaturi. Însăși mărimea picăturilor modifică distribuția temperaturii de-a lungul filamentului. Totuși, există lucrări în care s-a folosit etalonarea filamentului [6].

4. Evaporarea metalului nu este dirijată, ceea ce duce la un consum mare de metal.

5. Nu se pot evapora metale care se aliază cu materialul din care se confecționează de obicei filamente (wolfram, molibden, tantal, cromnichel).

Evaporarea metalelor din jgheab. Acest procedeu (fig. 3) prezintă două avantaje importante. În primul rînd permite o viteză mică de evaporare și în al doilea rînd se pot depune cantități mari de metal.

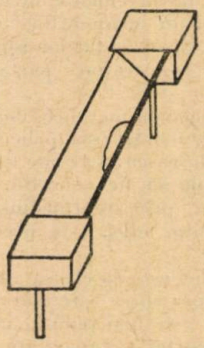


Fig. 3

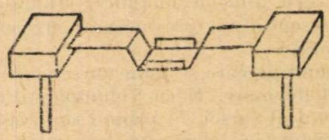


Fig. 4

Principalul dezavantaj al acestui tip de evaporare, pe de o parte, este că necesită un curent electric prea mare, ceea ce impune treceri metalice foarte groase prin sticlă. Pe de altă parte, radiația termică intensă a acestui evaporator îl face să fie inaplicabil pentru instalațiile de evaporare din sticlă, de dimensiuni reduse.

Din cauza formei acestei surse de vapori metalici, apare o dirijare a evaporării, ceea ce o face de preferat în anumite cazuri.

---

*) În caz că se evaporă cantități mici, se pot întrebuința filamente în V unde picătura de metal topit se adună în centrul filamentului.

**) Etalonarea filamentului se face determinînd viteza de depunere a peliculei metalice în funcție de intensitatea curentului care încălzește filamentul. Evident, pentru determinarea cantității de metal depuse, se folosește inițial procedeul nr. 1, descris mai înainte.

La acest tip de evaporator, mai ales sub forma din figura 4, încălzirea poate fi făcută prin curenți de înaltă frecvență. Bobina circuitului de înaltă frecvență se așează astfel încît axa ei să fie perpendiculară pe placa care conține metalul de evaporat. Trebuie menționat că reglarea vitezei de evaporare se face mai greu prin curenții de înaltă frecvență.

Evaporarea metalelor din soba Goetz. A. Goetz [7] descrie o sobă executată dintr-un material ceramic special, în care se introduce un filament de wolfram pentru încălzire. Materialele ceramice pot fi prelucrate la strung; ele constituie însă rețete de fabrică. Soba Goetz se bucură de o serie de avantaje:

1. Permite viteze de evaporare foarte mici.
2. Se pot evapora cantități mari de metal.
3. Se poate introduce în interior un termocuplu.
4. Evaporarea este dirijată.
5. Se pare că masa refractară nu se aliază cu o serie de metale care se evaporează de obicei.

Pe lîngă faptul că realizarea sobei Goetz este foarte grea, această sursă de vapori metalici prezintă dezavantajul că are dimensiuni mari, ceea ce necesită o putere electrică mare. Suprafața radiantă a acestei sobe este foarte mare, ceea ce face ca instalația să se încălzească puternic. Cantitatea mare de materiale ceramice folosite la construcția ei face ca soba Goetz să gazeze mult în vid; este indicată deci o predegazare îndelungată.

Evaporatorul Smith, Olsen, Crittenden. Acest evaporator [8] constă dintr-un fir de wolfram înfășurat strîns în forma unui coșuleț conic, ce se umple cu pastă de Al_2O_3 sau BeO și care prin coacere (cimentare) formează o masă destul de dură. Avantajele acestei surse de vapori metalici sînt:

1. Viteza de evaporare a metalelor dintr-un astfel de cuptoraș se poate regla mai ușor decît în cazul evaporării de pe filamente, deoarece încălzirea metalului se face mai uniform.
2. Evaporarea este destul de bine dirijată.
3. Se pretează a fi întrebuințată la evaporarea metalelor care se aliază cu metalele din care se fac de obicei filamentele și jghiaburile.
4. Se confecționează ușor.

Acest tip de evaporator prezintă însă o serie de dezavantaje:

1. La prepararea cuptorașului masa de Al_2O_3 sau BeO umedă umple, datorită tensiunii sale superficiale, tot coșulețul metalic, ceea ce conduce la un volum util mic.
2. Nu se cunoaște temperatura la care are loc evaporarea. Prin urmare nu se poate determina viteza de evaporare și deci grosimea peliculei metalice depuse. Introducerea unui termocuplu este imposibilă, deoarece nu se pot practica orificii în masa cimentată, căci aceasta se fărîmițează atît înainte, cît și după cimentare.

Evaporatorul din alumină cu termocuplu. Pentru înlăturarea deficiențelor evaporatoarelor cu care se lucrează pînă în prezent, am pus la punct o tehnică pentru prepararea unui cuptoraș cu volum util mare, cu pereții subțiri, în care să se poată introduce ușor un termocuplu pentru determinarea temperaturii metalului topit.

După ce se realizează coșuleț din fir de wolfram, se umple cu pastă Al_2O_3 (alumină) sau BeO. Pentru a preveni umplerea întregului coșuleț cu pastă, trebuie introdusă în coșuleț o formă conică oarecare. Un tubușor din sticlă de cuarț sau din alt material care se topește greu nu poate fi folosit în acest scop, deoarece pasta de Al_2O_3 aderă la acest material și încercările de a îndepărta tubușorul (fie înainte, fie după cimentare), duc la distrugerea coșulețului. De aceea am folosit metoda următoare: în pasta umedă se introduce un con (fig. 5) din foiță de staniu. Conul trebuie introdus în așa fel ca să nu se sprijine pe firele de wolfram, iar vîrful său, suficient de subțire, trebuie să iasă în exteriorul coșulețului.

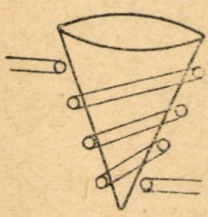


Fig. 5

După ce pasta s-a uscat, se face coacerea (în vid) între 500 și 1 500°C.

În acest timp staniul se topește și curge afară din cuptoraș, dacă acesta este înclinat, sau se evaporă în timpul cimentării. În partea de jos a evaporatorului rămîne o deschidere foarte mică. Prin această deschidere se poate introduce un termocuplu subțire, cu precauție, astfel ca cele două fire să nu facă contact. Dacă deschiderea nu este etanș închisă, se poate adăuga puțină pastă de alumină și se încălzește din nou cuptorașul pînă la aproximativ 1 000°C.

Pe lîngă avantajele evaporatorului Smith, Olsen, Crittenden, acest evaporator prezintă încă două avantaje importante.

1. Capacitatea cuptorașului este mare, fără ca volumul lui să fie prea mare, pereții cuptorașului fiind destul de subțiri. Astfel, cantitatea metalului topit poate ajunge egală cu masa evaporatorului. Această situație atrage după sine un consum electric redus, o radiație mică și deci o inerție termică destul de mică.

2. Cu ajutorul termocuplului introdus în evaporator poate fi măsurată temperatura metalului topit, ceea ce permite determinarea vitezei de evaporare a metalului.

Trebuie să avem grijă ca materialul care este evaporat să nu reacționeze cu masa refractară sau cu metalele din care este format termocuplul. Este recomandabil ca termocuplul să fie Pt, Pt—Rh, chiar dacă metalul se evaporă la temperaturi mai mici de 1 000°C. Aproape toate metalele se pot evapora din evaporatorul de alumină; cele care reacționează cu masa refractară de alumină sînt: aluminiul, bariul, fosforul, siliciul, stronțiul, toriul, vanadiul. Siliciul se poate evapora dintr-un evaporator confecționat din BeO.

BIBLIOGRAFIE

1. S. Methfessel, *Dünne Schichten*. W. Knapp, Halle, 1953.
2. I. Esterman, *Molecular Beam Technique*. Review of Modern Physics, 1946, t. 18, p. 300.
3. R. Fraser, *Molecular Rays* University Press, Cambridge, 1931.
4. F. M. Devienne, *L'étude de la condensation des jets moléculaires au moyen de radioéléments artificiels*. Journal de physique, 1952, t. 13, p. 53.
5. W. Espe u. M. Knoll, *Werkstoffkunde der Hochvakuumtechnik*. J. Springer, Berlin, 1936.
6. A. Wass, *Optical Properties and Structure of Thin Gold Film*. **Physica**, 1939, t. 4, p. 695.
7. A. Goetz, *Untersuchungen über die Gluhelektrischemission von Metallen*. Zeitschrift für Physik, 1927, t. 42, p. 329.
8. C. S. Smith, L. O. Olsen a E. C. Crittenden, *The Evaporation of Metals From Crucibles; Equipment and Techniques for Evaporation of Metals*. Physical Review, 1944, t. 66, p. 357.

RELAȚIA DE NEDETERMINARE ENERGIE-TIMP ÎN MECANICA CUANTICĂ NERELATIVISTĂ*)

DE

RICHARD WEINER

INTRODUCERE

Relațiile de nedeterminare din mecanica cuantică**) au constituit și constituie și astăzi un subiect viu discutat. Pînă în ultimul timp majoritatea acestor discuții era legată de interpretarea relației de nedeterminare impuls (p) coordonată (q) pe care o vom nota pe scurt cu relația $p - q$, care era considerată ca prototipul relațiilor de nedeterminare din mecanica cuantică, considerîndu-se că cele spuse despre relația $p - q$ sînt valabile și pentru relația de nedeterminare energie-timp (pe care o notăm relația $E-T$).

În problema relației $p-q$, atîta timp cît rămînem în cadrul mecanicii cuantice statistice sub forma ei actuală, situația este în momentul de față destul de clară [1] (încercările de a construi o mecanică cuantică nestatistică nu au ajuns deocamdată la rezultate concludente și de aceea nu ne vom ocupa în cele ce urmează de repercusiunile pe care le-ar putea avea aceste încercări, în cazul cînd ar fi încununate de succes, asupra relațiilor de nedeterminare). Cu totul alta este însă, după cum vom vedea, situația relației de nedeterminare $E-T$. Această relație are o istorie mult mai zbuciumată decît relația $p-q$. Însăși demonstrația ei a suferit o metamorfoză îndelungată, care se pare că nu a ajuns la sfîrșit nici astăzi, o serie de demonstrații și interpretări arătîndu-se a fi greșite, iar ceea ce este mai important, fazele principale ale acestei evoluții au dus la evidențierea unor semnificații diferite ale acestei relații, astăzi cunoscîndu-se două relații de nedeterminare $E-T$ cu conținut fizic diferit, numele lor comun explicîndu-se în mare măsură prin forma lor comună. Din cele spuse pînă acum rezultă că discuțiile purtate asupra relațiilor de nedeterminare în general, atîta timp cît era considerată ca prototip relația $p - q$, nu pot fi considerate ca valabile și pentru relația $E-T$ (aici înțelegem prin relația $E-T$ ansamblul tuturor relațiilor de nedeterminare în care intervin energia și timpul). Acest punct de vedere nu s-a impus de la început și un timp îndelungat relația $E-T$ era considerată ca fiind complet analogă cu relația $p-q$, atît prin demonstrația ei matematică, cît și prin conținutul ei fizic. Vom arăta în cele ce urmează că această analogie este falsă. În ceea ce privește legătura dintre aceste relații, situația nu este clarificată definitiv nici astăzi. Lucrarea de față își propune, ca pe baza studiului evoluției relației $E-T$, să precizeze specificul acestei relații în cadrul mecanicii cuantice nerelativiste, să evidențieze semnificațiile diferite pe care le are această relație, în funcție de fenomenele la care se aplică și să semnaleze problemele încă nerezolvate, legate de relația $E-T$, conturînd astfel stadiul actual al problemei.

CAP. I. RELAȚIA $p - q$ ȘI RELAȚIA $E - T$ ÎN MECANICA CUANTICĂ

1. *Faza inițială (Heisenberg)*

În 1927 W. Heisenberg a demonstrat pentru prima dată relația $p-q$ în mecanica cuantică.

*) Lucrare prezentată Institutului de fizică la data de 3 ianuarie 1955.

**) În cele ce urmează, afară de cazul unor mențiuni speciale, înțelegem prin mecanica cuantică, mecanica cuantică nerelativistă.

Redăm mai jos ideile principale ale acestei demonstrații clasice, dat fiind că ele ne vor servi la analizarea situației relației $E-T$.

Fie $\hat{R}$ și $\hat{S}$ doi operatori oarecare și fie $\hat{C}$ comutatorul lor

$$\hat{R}\hat{S} - \hat{S}\hat{R} = \hat{C}.$$

Fie

$$\overline{R} = \rho, \ \overline{S} = \sigma \text{ și } \hat{R} - \rho\,\hat{1} = \hat{r}; \ \hat{S} - \sigma\,\hat{1} = \hat{s},$$

unde bara reprezintă media și $\hat{1}$ este operatorul unitate.

Să considerăm un număr real u și să formăm produsul

$$\overline{(\hat{r} + i u \hat{s})(\hat{r} - i u \hat{s})} = \overline{r^2} + i u \overline{(sr - rs)} + u^2 s^2 \geqslant 0.$$

Însă, deoarece

$$\hat{s}\hat{r} - \hat{r}\hat{s} = \hat{S}\hat{R} - \hat{R}\hat{S} = -\hat{C},$$

avem

$$\overline{r^2} - i u \overline{C} + u^2 \overline{s^2} \geqslant 0.$$

Membrul stîng al inegalității de mai sus este un trinom de gradul doi în u. Pentru ca inegalitatea să fie valabilă pentru orice u trebuie ca realizantul trinomului să fie negativ sau nul. Deci,

$$-\overline{C}^2 - 4\,\overline{r^2}\,\overline{s^2} \leqslant 0,$$

sau

$$\frac{1}{2}|\overline{C}| \leqslant \sqrt{\overline{r^2}}\,\sqrt{\overline{s^2}}.$$

Or, $\sqrt{\overline{r^2}}$, respectiv $\sqrt{\overline{s^2}}$, reprezintă abaterile pătratice medii ale mărimilor $\hat{R}$ și $\hat{S}$ pe care le vom nota cu ΔR și ΔS. Obținem astfel formula lui Schwartz-Buniakovski.

$$\Delta R \Delta S \geqslant \frac{1}{2}\left|\hat{R}\hat{S} - \hat{S}\hat{R}\right|. \tag{1}$$

Se știe, pe de altă parte, că unul din postulatele mecanicii cuantice cere ca

$$\hat{p}\hat{q} - \hat{q}\hat{p} = \frac{h}{i}, \tag{2}$$

unde $2\pi h$ este cuantumul de acțiune. Relația (2) este o consecință a principiului de corespondență care cere ca la limita clasică ($h \to 0$), paranteza Poisson cuantică, care pînă la o constantă multiplicativă este egală cu comutatorul $\hat{C}$ al mărimilor rspective, să se reducă la paranteza Poisson clasică. Mărimile pentru care $\hat{C}$ este egal cu $\frac{h}{i}$ se numesc mărimi canonic conjugate în mecanica cuantică, în analogie cu cazul clasic, unde paranteza lui Poisson este 1.

Fie $\hat{R} = \hat{p}$, $\hat{S} = \hat{q}$, unde $\hat{p}$, este impulsul canonic conjugat coordonatei $\hat{q}$.

Din (1) și (2) rezultă atunci imediat

$$\Delta p \Delta q \geqslant \frac{h}{2}. \tag{3}$$

Aceasta este relația de nedeterminare $p-q$ sub forma sa cea mai precisă.

Este interesant de subliniat că relația (3) se bazează pe două elemente distincte: formula (1) care este de natură pur statistică, independentă de vreo teorie fizică și valabilă deci pentru orice pereche de mărimi, și formula (2) care este caracteristică mecanicii cuantice și care este valabilă numai pentru mărimi fizice canonic conjugate. De aici rezultă că și relația (3) are o semnificație statistică, ea exprimînd faptul că pentru un obiect cuantic

dat, nedeterminarea lui p și nedeterminarea lui q măsurate prin abaterile pătratice medii Δp și Δq, nu pot fi simultan nule, sau că «în natură această pereche de mărimi nu există simultan pentru microparticule» [1]*).

În ceea ce privește energia și timpul, se știe că un sistem cu o energie determinată (și deci constantă în timp) se află într-o stare zisă staționară, deoarece statistica oricărei mărimi (și nu numai a energiei), adică probabilitatea ca o mărime oarecare ce caracterizează sistemul să ia o anumită valoare, nu depinde de timp. Pentru un sistem care se află într-o astfel de stare, nici un moment al timpului nu este privilegiat.

W. Heisenberg a încercat [2] să exprime constatarea de mai sus într-o formă analogă cu relația (3), conducîndu-se și după faptul că în teoria relativității impulsul și energia formează un cvadrivector, impulsul fiind componenta spațială a acestuia și energia componenta sa temporală.

Pentru aceasta el a început prin a postula o relație analogă cu relația (2)

$$\hat{E}\,\hat{T} - \hat{T}\,\hat{E} = \frac{h}{i}, \tag{2'}$$

unde $\hat{E}$ este energia sistemului la momentul T, $-\hat{T}$ fiind un operator asociat timpului despre a cărui formă nu se spune nimic în lucrarea citată.

Din (2') și (1) rezultă imediat

$$\Delta E\,\Delta T \geqslant \frac{h}{2}. \tag{3'}$$

Această relație a fost interpretată analog cu relația $p-q$; nu are sens de a se vorbi de energia microparticulelor la un moment dat.

Relația (2') este însă în contrazicere flagrantă cu una din concluziile fundamentale ale mecanicii cuantice, verificată în mod strălucit de experiență și anume cu faptul că energia unui sistem cuantic, are, în general, pe lîngă spectrul continuu și un spectru discret.

Într-adevăr, doi operatori $\hat{A}$ și $\hat{B}$ care satisfac relația

$$\hat{A}\,\hat{B} - \hat{B}\,\hat{A} = \frac{h}{i}, \tag{2''}$$

au un spectru continuu și numai continuu.

Această teoremă a fost enunțată și demonstrată pentru prima dată de P. A. M. Dirac [3].

În demonstrația lui Dirac intervin însă funcțiile proprii ale lui $\hat{A}$ respectiv $\hat{B}$. Se știe însă că funcțiile proprii corespunzătoare unui spectru continuu nu pot constitui o bază de vectori normabili. în spațiul Hilbert.

Este interesant de menționat în legătură cu aceasta că există o demonstrație a teoremei de mai sus, care nu face apel la funcțiile proprii ale lui $\hat{A}$ respectiv $\hat{B}$. Demonstrația aceasta a fost dată în două etape de J. von Neumann și de acad. Ș. Țițeica. Fără a intra în amănunte, care ne-ar duce prea departe de subiectul lucrării de față, vom menționa numai ideile esențiale ale acestei demonstrații.

J. von Neumann a demonstrat în 1931 [4] că ecuația (2'') admite pînă la transformări unitare o singură soluție ireductibilă. Or, o soluție a acestei ecuații se cunoaște din reprezentarea Schrödinger a operatorilor și anume

$$\hat{A} \longleftrightarrow \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial B}, \quad \hat{B} \longleftrightarrow B.$$

Această soluție corespunde evident la un spectru continuu și numai continuu pentru $\hat{A}$ și $\hat{B}$. Teorema lui Dirac ar fi astfel demonstrată dacă soluțiile reprezentării Schrödinger ar constitui o reprezentare ireductibilă. Acest lucru trebuia demonstrat și demonstrația aceasta a fost dată efectiv în 1953 de acad.. Ș. Țițeica**).

*) p. 503.

**) Comunicare ținută la sesiunea științifică a Universității «C. I. Parhon», 1953.

Din teorema enunțată mai sus rezultă în mod categoric că relația (2′) este falsă!

Această concluzie are ca primă consecință faptul că relația $E-T$, dacă există, nu se poate reduce la relația (3′), care s-a dovedit falsă și că deci și interpretarea, care a fost dată inițial relației $E-T$, este eronată.

În al doilea rînd, rezultă că analogia dintre relația $p-q$ și $E-T$, în măsura în care se baza pe analogia dintre relația (3) și (3′), respectiv (2) și (2′) este și ea falsă.

2. *Caracterul specific al timpului*

Dacă analizăm ceva mai amănunțit ipotezele care stau la baza relației (2′) acest rezultat nu este surprinzător. În primul rînd, dat fiind că $\hat{E} = \hat{H}$, unde $\hat{H}$ este hamiltonianul sistemului care depinde de p și q, rezultă că energia sistemului poate avea la un moment dat o valoare perfect determinată, în opoziție cu concluzia care ar rezulta din (3′).

În al doilea rînd, relația (2′) presupune existența unui operator $\hat{T}$ al timpului, ca o mărime caracteristică a sistemului. Însă un astfel de operator nu există pînă în prezent în mecanica cuantică nerelativistă și în cadrul ei actual, nici nu ar putea exista deoarece aceasta, ca și mecanica clasică, consideră timpul ca o mărime absolută, independentă de sistem, avînd o semnificație deosebită de cea a coordonatelor spațiale în special, și de cea a tuturor celorlalte mărimi fizice în general.

Rolul specific al timpului se manifestă și în fenomenele ireversibile, care se întîlnesc și în mecanica cuantică, unde procesul de măsură este ireversibil din punct de vedere termodinamic. [5]. Matematic această ireversibilitate se exprimă prin faptul că legile respective nu sînt invariante față de reflexiile temporale — spre deosebire de reflexiile spațiale (« stînga » și « dreapta » sînt echivalente). Neechivalența dintre timp și coordonatele spațiale în mecanica cuantică se manifestă și în faptul că operatorii sînt definiți într-un domeniu spațial, valorile medii ale oricărei mărimi sînt date printr-o integrală spațială etc.

3. *Sînt energia și timpul mărimi canonic conjugate?*

O altă problemă legată de nevalabilitatea relației (2′) este problema conjugării canonice a lui E și T. Într-adevăr, dacă (2′) este falsă, rezultă că energia și timpul nu sînt mărimi canonic conjugate în mecanica cuantică. Sîntem puși astfel în fața alternativei:

a) Energia și timpul sînt totuși mărimi canonic conjugate în mecanica clasică și atunci este pus sub semnul de întrebare însuși principiul de corespondență al mecanicii cuantice.

b) Ele nu sînt mărimi canonic conjugate nici în mecanica clasică.

Trebuie spus de la bun început, că prima alternativă pare extrem de improbabilă, deoarece de valabilitatea principiului de corespondență este legată însăși valabilitatea mecanicii cuantice, care constituie în anumite limite o teorie verificată în mod strălucit de experiență.

În plus, există un argument direct în favoarea celei de a doua alternative, deoarece atîta timp cît nu facem o ipoteză suplimentară atribuind timpului semnificația unei coordonate spațiale oarecare a sistemului, energia și timpul nu sînt mărimi canonic conjugate] nici în mecanica clasică. Într-adevăr, paranteza Poisson clasică a două mărimi A și B se scrie

$$[A, B] = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial A}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial A}{\partial p_i},$$

unde N reprezintă numărul de grade de libertate al sistemului, iar q_i și p_i reprezintă coordonatele, respectiv impulsurile generalizate ale gradului de libertate i. Atîta timp cît q_i sînt coordonate pur spațiale și t are o semnificație absolută, independent de sistem

$$[E, t] = 0.$$

Doar dacă punem $t = q_{N+1}$, $\xi = E + p_{N+1}$ unde p_{N+1} este impulsul canonic conjugat cu q_{N+1} și unde $E = E\ (q_1 \ldots q_N, q_{N+1}\ ;\ p_1 \ldots p_N)$ obținem

$$[\xi, q_{N+1}] = [\xi, t] = 1.$$

Însă din cele spuse pînă acum se vede că acest procedeu matematic nu este prin nimic justificat.

De aici rezultă însă că energia și timpul nu sînt mărimi canonic conjugate nici în mecanica clasică [6].

Așadar chiar dacă există o demonstrație a lui (3′) sau a unei formule similare independentă de (2′), toate aceste fapte arată că nu poate fi vorba de o analogie strînsă între această relație de nedeterminare și relația (3), timpul care intervine în (3′) dînd acestei relații o notă cu totul specifică.

4. *Relația $p-q$ și $E-T$ și electrodinamica cuantică*

Faptele menționate mai sus exclud în mod clar posibilitatea unei demonstrații și interpretări unitare a relațiilor $p-q$ și $E-T$ în cadrul mecanicii cuantice nerelativiste, cel puțin sub forma (3) și (3′), care este forma cea mai precisă din punct de vedere matematic.

Într-o serie de tratate (de exemplu [7]), apare însă o demonstrație unitară a acestor relații, pornind de la interacțiunea dintre substanță (electroni, protoni etc.) și cîmpul electromagnetic (fotoni). Această demonstrație, care se datorește lui B o h r, depășește însă cadrul mecanicii cuantice nerelativiste și nu poate fi deci considerată ca satisfăcătoare, din punctul de vedere pe care ne situăm în această lucrare.

Pentru un foton relația $p-q$ și $E-T$ poate fi dedusă din expresiile cuantice ale energiei și impulsului și din dezvoltarea Fourier pentru o mărime oarecare, care caracterizează procesul ondulatoriu.

Dat fiind că în natură orice proces ondulatoriu este finit în timp (și spațiu), el nu poate duce la emisia unei radiații strict monocromatice, ci cel mult cvasimonocromatice. Într-adevăr, avînd o durată finită, procesul nu mai este periodic. Fie Δt durata sa și $\Delta \vec{x}$ domeniul său spațial. Fie $f(\vec{x}, t)$ o funcție care descrie acest proces. Avem

$$f(\vec{x}, t) = \int_{\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(\vec{k}, \omega)\, e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}\, d\vec{k},\, d\omega.,$$

unde $\frac{\omega}{2\pi}$ este frecvența unei unde monocromatice componente a procesului considerat, iar $\vec{k}$ numărul de undă respectiv. Se știe că la t constant, $f(\vec{x}, t)$ este diferit de zero într-o regiune a spațiului $\vec{k}$ dată de relația

$$\Delta k_i\, \Delta u_i \geqslant \frac{1}{2}, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

iar la $\vec{x}$ constant pentru frecvențele care satisfac inegalitatea

$$\Delta \omega\, \Delta t \geqslant \frac{1}{2}.$$

Dacă ținem seama, pe de altă parte, de faptul că pentru o cuantă

$$E = h\omega; \quad \vec{p} = h\vec{k},$$

obținem

$$\Delta p\, \Delta q \geqslant \frac{h}{2}, \qquad (3) \qquad\qquad \Delta E\, \Delta t = \frac{h}{2}. \qquad (3')$$

Aceste relații deduse pentru un foton, deci pentru o formă de cîmp a materiei, sînt generalizate apoi pentru forma de substanță pornind de la faptul că în interacțiunea dintre cîmp și substanță trebuie să se conserve atît impulsul, cît și energia și deci nedeterminările impulsului, respectiv energiei cuantei se transmit impulsului, respectiv energiei microparticulei cu care interacționează. Într-adevăr, dacă lucrurile n-ar sta astfel, deci dacă impulsul, respectiv energia microparticulelor ar putea fi determinată oricît de precis, am putea să măsurăm aceste mărimi înainte și după interacțiunea lor cu cuanta și de aici să obținem valorile determinate pentru impulsul și energia cuantei în contrazicere cu relația (3) și (3′).

Demonstrația de mai sus presupune însă valabilitatea generală a formulei $E = h\omega$ pentru fotoni, ceea ce rezultă abia din electrodinamica cuantică; în mecanica cuantică nerelativistă însă valorile energiei sînt date de valorile proprii ale hamiltonianului sistemului.

De altfel, însăși noțiunea de foton este fondată riguros abia în electrodinamica cuantică. De aici rezultă că și această încercare de demonstrație unitară a relațiilor $p-q$ și $E-T$ în mecanica cuantică nerelativistă nu este satisfăcătoare. Aceasta a fost de altfel ultima încercare de acest gen. De acum încolo divorțul dintre relația $p-q$ și relația $E-T$ este definitiv.

CAP. II. RELAȚIA $E-T$ ȘI PROCESUL DE MĂSURĂ AL STĂRILOR STAȚIONARE

1. *Experiența Stern-Gerlach*

Din cele spuse pînă acum rezultă că problema relației $E-T$ în mecanica cuantică nerelativistă trebuie abordată independent de relația $p-q$. Dezvoltarea mecanicii cuantice a arătat că acest lucru este posibil pe două căi diferite, care pornesc însă ambele de la legătura dintre starea unui sistem și energia sa.

Rezultate importante în acest sens au fost obținute chiar de la începutul dezvoltării mecanicii cuantice în legătură cu experiențele pentru determinarea energiei stărilor staționare. S-a constatat că în aceste experiențe trebuie luate anumite precauții speciale în legătură cu durata procesului de măsură, în fiecare experiență de acest gen apărînd un timp minim, care trebuie depășit pentru ca determinarea să poată avea loc.

Acest timp minim este legat de energia sistemului printr-o relație similară cu (3′). De aceea, după părerea unor fizicieni aceasta trebuie considerată ca o relație $E-T$. Pentru a ne da seama care este situația în acest domeniu, vom analiza cîteva experiențe de acest gen. Vom începe cu experiența Stern-Gerlach. Această experiență duce la determinarea nivelelor de energie a electronilor de valență din atomi într-un cîmp exterior. În cele ce urmează ne vom mărgini la un cîmp magnetic. Se știe că fenomenul de care ne ocupăm este un efect al neomogenității cîmpului aplicat. Se poate însă presupune că cîmpul magnetic $\mathcal{H}$ variază puțin pe distanțe de ordinul dimensiunilor atomilor, ceea ce din punct de vedere matematic se exprimă prin condiția

$$\mathcal{H} >> \left| \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X} a \right|, \left| \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Y} a \right|, \left| \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Z} a \right|, \qquad (\alpha)$$

unde X, Y, Z sînt coordonatele centrului de greutate al atomului și a raza atomului Cîmpurile magnetice macroscopice satisfac cu siguranță această condiție. În acest caz, se poate considera că formula care dă energia atomului în efectul Zeeman, dedusă pentru cîmpuri omogene, rămîne valabilă și aici, admițînd că această energie depinde prin intermediul cîmpului de coordonatele X, Y, Z ca de niște parametri. Vom scrie deci [7]

$$E_{nlm}(X,Y,Z) = E^0_{nlm} + \frac{e\,\mathcal{H}(X,Y,Z)}{2\,\mu\,c}(m \pm 1), \qquad (4)$$

unde E_{nlm} este energia atomului în cîmp magnetic, E^0_{nl} aceeași energie în absența cîmpului μ și e masa și sarcina electronului, c viteza luminii în vid și m numărul cuantic-magnetic orbital. În ipoteza că E^0_{nl} este cunoscut, determinarea lui E_{nlm} se reduce la determinarea lui m.

Mișcarea centrului de greutate al atomului poate fi descrisă în prima aproximație prin mecanica clasică, dat fiind că masa atomului e mare față de masa electronului, iar neomogenitatea cîmpului magnetic este macroscopică. Pentru a determina pe m vom putea deci aplica ecuațiile de mișcare newtoniene.

Se știe că forța care se exercită în cîmp magnetic asupra unui dipol magnetic de moment $\mathfrak{M}$ este

$$\vec{F} = \vec{\mathfrak{M}}\ \text{grad}\ \vec{\mathcal{H}}.$$

Presupunînd axa Oz orientată în direcția cîmpului obținem

$$\vec{F} = \vec{F}_Z = \mathfrak{M}_X \frac{\partial \mathcal{H}_Z}{\partial X} + \mathfrak{M}_Y \frac{\partial \mathcal{H}_Z}{\partial Y} + \mathfrak{M}_Z \frac{\partial \mathcal{H}_Z}{\partial Z}.$$

Însă [8]

$$\vec{\mathfrak{M}}_X = \vec{\mathfrak{M}}_Y = 0.$$

Deci

$$\vec{F} = \mathfrak{M}_Z \frac{\partial \mathcal{H}_Z}{\partial Z}.$$

În ipoteza că atomii se mișcă inițial după Ox cu viteza v, ecuațiile lui Newton ne dau

$$X = vt + X_0,$$

$$Y = Y_0,$$

$$Z_m = -\frac{1}{2M} \frac{\partial E_{nlm}}{\partial Z} t^2 + Z_0, \tag{5}$$

unde M este masa atomului, t intervalul de timp în care atomii se află în cîmp magnetic și X_0, Y_0, Z_0 coordonatele fantei prin care intră atomii în cîmpul magnetic.

Folosind (4), obținem din (5)

$$Z_m - Z_0 = -\frac{1}{2M} \frac{eh}{2\mu c} (m \pm 1) \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Z} \frac{s^2}{v^2}, \tag{6}$$

unde s este distanța parcursă de atom în cîmp. Deci determinînd experimental pe Z_m putem calcula pe m și deci pe E_{nlm}.

Însă în experiența de mai sus, avem și un efect de fantă, care se traduce printr-o lărgire a razei atomice. Acest efect împiedică în anumite condiții citirea lui Z, dat fiind că doi Z care corespund la m diferiți ar putea să se suprapună.

Pentru a ne da seama ce precauții trebuie luate pentru ca determinarea lui E să fie totuși posibilă, trebuie să introducem corecția efectului de fantă în (6). Această corecție este dată de relația $p-q$ unde ΔZ_0 este lărgimea fantei. Din

$$\Delta p_Z \, \Delta Z_0 \geqslant \frac{h}{2},$$

considerînd $\overline{p}_Z = 0$ avem

$$v_Z \geqslant \frac{h}{M \Delta Z_0}$$

Nedeterminarea inițială ΔZ_0 crește în timpul t pînă la

$$\Delta Z = v_{Zt} \geqslant \frac{h\,t}{M \Delta Z_0} \tag{7}$$

Pentru ca acest efect să nu împiedice măsurătoarea trebuie ca

$$|Z_m - Z_{m'}| \geqslant \Delta Z,$$

pentru orice m și m', sau folosind (6) și (7)

$$\left| \frac{\partial E_{nlm'}}{\partial Z} \Delta Z_0 - \frac{\partial E_{nlm}}{\partial Z} \Delta Z_0 \right| t \gg h. \tag{8}$$

Dat fiind însă că neomogenitatea cîmpului nu poate fi prea puternică (vezi relația (α)) avem

$$\left| \frac{\partial E_{nlm'}}{\partial Z} \Delta Z_0 - \frac{\partial E_{nlm}}{\partial Z} \Delta Z_0 \right| < \left| E_{nlm'} - E_{nlm} \right|$$

și deci

$$|E_{nlm'} - E_{nlm}|\, t > h. \tag{9}$$

Aceasta este precauția experimentală pe care o impune efectul de fantă. Ea se traduce deci prin existența unui timp minim care trebuie depășit pentru ca măsurătoarea să poată avea loc.

În ceea ce privește forma relației (9) ea este evident asemănătoare cu (3′); trebuie însă să ținem seama de faptul că aici nu apare o nedeterminare a momentului la care se măsoară energia, ci apare durata procesului de măsură. Aceasta este specificul acestei relații $E-T$.

2. *Experiența Franck-Hertz*

Energiile stărilor staționare pot fi determinate și printr-o altă metodă imaginată de Franck-Hertz. În esență această metodă se reduce la ciocnirea neelastică a atomilor considerați cu electroni accelerați, care cedează din energia lor cinetică atomilor, excitîndu-i. Cunoscînd energia cinetică a electronilor înainte și după ciocnire și cunoscînd energia atomilor de exemplu înainte de ciocnire, putem determina energia atomilor după ciocnire. Și în cazul acestei metode apare un timp minim, respectiv o relație $E-T$ de tipul celei precedente, însă aici situația nu este atît de clară existînd o divergență de păreri asupra căreia vom reveni mai jos.

Se știe din calculul perturbațiilor [1] că probabilitatea de tranziție a unui sistem de la energia E_a la energia E_b sub acțiunea unei perturbații independente de timp, este

$$|A_{ab}|^2 = |W_{ab}|^2 \frac{4 \sin^2 \frac{\omega_{ab}}{2} t}{h^2 \omega_{ab}^2}, \tag{10}$$

unde A_{ab} sînt coeficienții dezvoltării Fourier a funcției de undă a stării perturbate după funcțiile de undă neperturbate, W_{ab} matricea energiei de perturbație $W\omega_{ab} = \frac{E_b - E_a}{h}$

(nu facem nici o ipoteză asupra caracterului continuu sau discret al spectrului de energie al sistemului, indicii a și b referindu-se atît la spectrul discret, cît și la cel continuu). $A_{ab}|^2$ din relația (10) este sensibil diferită de zero pentru

$$\Delta\,(E_b - E_a)\; t > h, \tag{11}$$

unde t este durata perturbației, iar Δ reprezintă variația parantezei respective. În cazul experienței Franck-Hertz, dacă notăm cu E și ε energia atomului respectiv a electronului incident înainte de ciocnire și cu E' și ε' aceleași mărimi după ciocnire, relația (11)devine

$$\Delta\,(E + \varepsilon - E' - \varepsilon')\, t > h \tag{12}$$

(aici rolul perturbației îl joacă interacțiunea dintre electronul incident și atom, iar t este durata ciocnirii).

Dacă ε și ε' sînt cunoscute, rezultă

$$\Delta\,(E - E')\, t > h, \tag{13}$$

iar dacă presupunem în plus că E' este cunoscut, obținem

$$\Delta E \,.\, t > h. \tag{14}$$

ΔE reprezintă o nedeterminare a energiei E. Pentru a putea deduce care este efectiv energia atomului înainte de ciocnire, trebuie ca nedeterminarea energiei să fie mai mică decît diferența energiilor a două nivele oarecare, m și m'. De aici rezultă

$$|E_m - E_{m'}|\, t > h. \tag{9′}$$

Am obținut astfel din nou formula (9) (dedusă la experiența Stern-Gerlach).

După D. Blohințev [1], formula (14) ca și formula (9) exprimă existența unui timp minim al procesului de măsură, sau faptul că « energia nu poate fi măsurată fără o perturbare a valorii sale cu o precizie mai mare decît h/t, unde t este durata procesului de

măsură» Aceasta nu micșorează prin nimic valabilitatea principiului conservării energiei care în mecanica cuantică, în cazul cel mai general, incluzînd sisteme cu energie nedeterminată, are expresia

$$\frac{dw(E,t)}{dt} = 0, \tag{15}$$

unde $w(E,t)$ este probabilitatea ca energia sistemului să aibă la momentul t valoarea E și care presupune deci că energia poate fi determinată la un moment dat fără a o supune unei variații incontrolabile. Într-adevăr energia fiind o integrală primă, măsurătoarea poate fi efectuată într-un timp oricît de lung.

O deosebire însă între prima și a doua experiență o constituie faptul că în cazul primei experiențe starea atomului nu este perturbată de măsurătoare, pe cînd în cazul ciocnirilor neelastice, această stare este perturbată, ceea ce reflectă însuși termenul «neelastic». P a u l i numește din acest punct de vedere experiențe de tipul Stern-Gerlach, măsurători de speța I-a, iar cele de tipul Franck-Hertz măsurători de speța a II-a [7].

După L. L a n d a u și colaboratori [9], [10] relația (12) respectiv (13) este expresia relației de nedeterminare energie-timp în mecanica cuantică, din ea decurgînd în cazul mecanicii cuantice relativiste o relație analogă pentru impuls-timp, la o particulă liberă.

O precizare importantă a valabilității relației (11) și a celorlalte care decurg din ea a fost făcută de L. M a n d e l s t a m m și I. T a m m [11]. Aceștia atrag atenția asupra faptului următor: dacă definim prin $\pi(\delta, t)$ probabilitatea ca diferența $E_a - E_b$ să fie la momentul t mai mare decît un δ dat, din (10) nu rezultă că acest δ tinde spre zero cu creșterea lui t. Doar dacă distingem cazurile A, cînd sistemul rămîne în starea inițială în urma perturbației, de cazurile B cînd sistemul trece în alte stări, se poate spune că odată cu creșterea lui t scade probabilitatea cazurilor A și crește numărul tranzițiilor în stări care satisfac condiția de rezonanță (legea de conservare clasică a energiei).

Esențial în această observație este faptul că trebuie să ținem seama și de cazurile în care sistemul rămîne în starea inițială. Într-adevăr, din (10) nu rezultă de loc că tranzițiile au loc efectiv, ci doar că dacă ele au loc, atunci cele mai probabile sînt cele care satisfac condiția (11). Este clar însă că această observație nu restrînge valabilitatea relației (11) atîta timp cît ne referim la măsurători de speța a II-a, deoarece se poate considera cu o precizie suficient de mare că în acest caz aparatul nu înregistrează decît stările sistemului care diferă de starea inițială și deci se poate spune că măsurătoarea nu are loc decît atunci cînd tranzițiile au loc efectiv [12].

În anumite cazuri particulare relația (13) poate fi dedusă direct fără a face apel la teoria perturbațiilor, cu ajutorul relației $p-q$. Un astfel de exemplu îl constituie măsurarea energiei la o particulă liberă prin ciocnirea ei cu o altă particulă. Acest exemplu se datorește lui N. K r î i o v și V. F o c k [13]. Fie v, p, E, respectiv v', p', E' viteza, impulsul și energia particulei înainte, respectiv după ciocnire. Presupunînd viteza «particulei obiect», înainte și după ciocnire, mică în raport cu viteza «particulei-aparat», rezultă din legea de conservare a impulsului că erorile Δp și $\Delta p'$ înainte și după ciocnire vor fi egale. În schimb, din

$$\Delta E = v \Delta p,$$

rezultă

$$\Delta (E - E') = |v' - v| \Delta p,$$

sau prin înmulțire cu Δt (durata ciocnirii considerată de autori ca durata procesului de măsură)

$$\Delta (E - E') \Delta t = |v' - v| \Delta t \Delta p.$$

Produsul

$$|v' - v| \Delta t = \Delta q^t$$

reprezintă eroarea în determinarea coordonatei particulei care se acumulează în timpul Δt. Într-adevăr, fie q, respectiv q', coordonata înainte, respectiv după ciocnire, și Δq, respectiv $\Delta q'$, erorile corespunzătoare lui q și q', Δv $\Delta v'$ erorile corespunzătoare lui v și v'. Coordonata q' putem s-o evaluăm în două moduri, în funcție de viteza v sau v' pe care o atribuim particulei. Avem astfel

$$q_1' = \Delta_q + (v \pm \Delta v)\,\Delta t$$

și

$$q_2' = \Delta q + (v' \pm \Delta v')\,\Delta t.$$

Diferența $q_2' - q_1'$ reprezintă eroarea căutată. Ținînd seama de

$$\Delta v = \Delta v',$$

obținem

$$\Delta q^t = |v' - v|\,\Delta t,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Vom considera acum $\Delta q << \Delta q^t$, ceea ce nu micșorează prin nimic generalitatea demonstrației deoarece nedeterminarea inițială asupra lui q nu are nici o legătură cu nedeterminarea asupra lui q'. Avem deci

$$\Delta q' = \Delta q + |v' - v|\,\Delta t \approx |v' - v|\,\Delta t.$$

Pe de altă parte

$$\Delta p'\ \Delta q' \geqslant \frac{h}{2}.$$

Deci

$$\Delta (E - E')\,\Delta t \geqslant \frac{h}{2}.$$

3. *Problema măsurătorilor directe și indirecte și relația Bohr*

În lucrarea [13] exemplul de mai jos este citat dintr-un alt punct de vedere decît cel expus acum. Autorii acestei lucrări pornesc de la noțiunile de măsurătoare directă și indirectă introduse de L. Mandelstamm [12]. Măsurătorile directe sînt procese la care se disting două elemente: obiectul supus măsurătorii și aparatul de măsură. Aparatul poate funcționa ca atare numai dacă este lipsit de elementele întîmplării proprii ansamblelor statistice din care fac parte obiectele cercetate de acesta. Deci, el trebuie să se comporte clasic în raport cu obiectele supuse măsurătorii. De aici rezultă că procesul de măsură nu poate fi descris de ecuația Schrödinger, deoarece aceasta descrie numai evoluția și interacțiunea unor obiecte cuantice (de altfel, afirmă Krîlov și Fock, aceasta reiese și din faptul că în timpul măsurătorii obiectul nu rămîne un sistem închis). Există însă și măsurători indirecte, care se deosebesc de primele prin faptul că afară de cele două elemente enumerate mai sus, obiectul și aparatul, intervine și unul sau mai multe elemente intermediare. Aceasta se întîmplă întotdeauna cînd obiectul nu este o particulă liberă, deoarece măsurători directe se pot efectua numai asupra unor particule libere (sau cvasilibere). Aparatul acționează aici asupra ultimului element intermediar, celelalte elemente interacționînd în mod cuantic (inclusiv obiectul). Această interacțiune este descrisă de ecuația Schrödinger.

După Krîlov și Fock relația $E-T$, în care ΔT este durata procesului de măsură, se referă la o măsurătoare directă și deci nu poate fi dedusă cu ajutorul ecuației Schrödinger, așa cum se procedează de exemplu în teoria perturbațiilor. După acești autori aici nu există o demonstrație generală pentru această relație, ea jucînd rolul unui « principiu fizic », dedus de Bohr dintr-o serie de exemple particulare. În acest sens autorii citează exemplul pe care l-am expus mai sus.

Trebuie subliniat de la început, așa cum fac înșiși autorii lucrării [13], că « elaborarea teoriei măsurătorilor indirecte, începută în mod strălucit de acad. L. I. Mandelstamm în lecțiile lui, este departe de a fi completă în prezent ». De aici rezultă că nu se pot prevede în momentul de față toate consecințele pe care le va implica această teorie asupra relației $E-T$. Fără îndoială că în măsura în care relația $E-T$, unde ΔT este durata procesului de măsură, se referă la măsurători directe în sensul în care au fost ele definite mai sus, ea nu poate fi o consecință a ecuației Schrödinger.

Cu aceasta însă nu este încă epuizată problema, deoarece existența relației $E-T$ pentru măsurători directe pe care autorii lucrări [13] o numesc relația Bohr și căreia i se atribuie

rolul unui principiu fizic este foarte discutabilă. În sprijinul acestui punct de vedere menționăm că exemplul considerat mai sus ni se pare un exemplu tipic de măsurătoare *indirectă*, dat fiind că energia « particulei-aparat » trebuie determinată abia la rîndul ei printr-o altă măsurătoare care poate fi de data aceasta directă, ciocnirea dintre « particulă-obiect » și « particulă-aparat » nefiind decît o verigă dintr-un proces de măsură indirectă.

Pe de altă parte, nu este de loc evident că relația $E-T$ se referă numai la măsurători directe (dacă lucrurile ar sta astfel, ea ar avea un domeniu de aplicabilitate extrem de redus, dat fiind că măsurători directe se pot efectua numai asupra unor particule libere sau cvasilibere). După părerea noastră, dacă se acceptă ca punct de plecare diviziunea între măsurători directe și indirecte, există în orice caz o relație $E-T$ pentru măsurători indirecte, cel puțin pentru cele de speța a II-a și anume aceea dedusă din teoria perturbațiilor.

4. *Generalizarea relației* (11)

Se pune întrebarea dacă relația $E-T$ dedusă din teoria perturbațiilor este valabilă pentru orice măsurătoare indirectă. La această întrebare nu se poate da, cel puțin în momentul de față, un răspuns pozitiv și aceasta din două motive: în primul rînd, deși în cazul măsurătorilor indirecte se consideră interacțiuni destul de slabe pentru ca cele două sisteme să mai poată fi diferențiate, există totuși cazuri în care interacțiunea nu poate fi considerată ca o perturbație. În al doilea rînd, nu trebuie să pierdem din vedere faptul că relația (11) a fost dedusă în prima aproximație a calculului perturbațiilor. Or, se poate întîmpla ca în anumite cazuri prima aproximație să nu mai fie suficientă și să fie nevoie de considerarea unor aproximații superioare. Aceasta este în concordanță de altfel și cu observația de la pagina (390) în legătură cu funcționarea aparatului, probabilitatea de tranziție fiind proporțională cu mărimea perturbației. În acest caz însă, valabilitatea relației (11) nu este *a priori* asigurată, deși în ea nu intervine mărimea perturbației.

O încercare interesantă de generalizare a relației (11) în acest sens a fost făcută recent de G. R i d e a u [14], pornind de la teoria difuziei particulelor în reprezentarea interacțiunii, dezvoltată de B. L i p p m a n n și J. S c h w i n g e r [15]. Interesul pe care îl prezintă această lucrare constă tocmai în faptul că își propune să rezolve o problemă legată de relația $E-T$ în mecanica cuantică nerelativistă printr-un formalism care s-a dovedit deosebit de fecund, în special în teoria cuantică a cîmpurilor.

Autorul citat începe prin a dezvolta o metodă pentru studiul perturbațiilor cu durată limitată.

Se consideră un sistem descris de hamiltonianul $\hat{H}_0$ independent de timp și fie $\hat{H}_1$ o perturbație independentă de timp, care acționează asupra sistemului în intervalul de timp (t_1, t_2).

Acțiunea acestei perturbații poate fi descrisă prin operatorul

$$\hat{V}_1(t) = [\eta(t-t_1) - \eta(t-t_2)]\,\hat{H}_1, \tag{16}$$

unde η este primitiva funcției δ a lui Dirac definită prin relația

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 & x > 0. \end{cases} \tag{17}$$

Ecuația lui Schrödinger pentru sistemul considerat se scrie atunci

$$i\,h\frac{\partial \psi'}{\partial t} = (\hat{H}_0 + \hat{V}_1')\,\psi', \tag{18}$$

unde ψ' este funcție de undă care descrie starea sistemului. Conform cu [15] efectuăm transformarea unitară

$$\psi' = e^{-\frac{i}{h}\hat{H}_0 t}\,\psi, \quad \hat{V}_1 = e^{\frac{i}{h}\hat{H}_0 t}\,\hat{V}_1'\,e^{-\frac{i}{h}\hat{H}_0 t}, \tag{19}$$

și (18) devine

$$i\,h\frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{V}_1\,\psi. \tag{20}$$

Aceasta este ecuația Schrödinger în reprezentarea interacțiunii. Este avantajos de a transforma această ecuație diferențială într-o ecuație integrală, deoarece astfel putem face să intervină explicit valoarea inițială a lui ψ. Luînd ca valoare inițială pe Φ_a, care este una din funcțiile proprii ale lui H_0, se obține

$$\psi(t) = \Phi_a - \frac{i}{h}\int_{-\infty}^{\infty} \eta(t-t')\hat{V}_1(t')\,\psi(t')\,dt'. \tag{21}$$

Fie $\hat{\Gamma}\left(t, t', -\frac{i}{h}\right)$ rezolventul ecuației (21) care se scrie atunci

$$\psi(t) = \left[1 - \frac{i}{h}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\Gamma}\left(t, t', -\frac{i}{h}\right) dt'\right]\Phi a \tag{21'}$$

și dacă se pune

$$\hat{\Gamma}\left(t, t' - \frac{i}{h}\right) = \hat{G}\left(t, t', -\frac{i}{h}\right)\hat{V}_1(t'), \tag{22}$$

noua funcție $\hat{G}$ satisface ecuațiile integrale

$$\hat{G}\left(t, t' - \frac{i}{h}\right) = \eta(t-t') - \frac{i}{h}\int_{-\infty}^{\infty} \eta(t-t')\,\hat{V}_1(t')\,\hat{G}\left(t', t' - \frac{i}{h}\right) dt', \tag{23}$$

$$\hat{G}\left(t, t', -\frac{i}{h}\right) = \eta(t-t') - \frac{i}{h}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{G}\left(t, t', -\frac{i}{h}\right)\hat{V}_1(t')\,\eta(t'-t')\,dt'. \tag{24}$$

Pentru $t < t_1$ sistemele nu interacționează. În conformitate cu [15] vom caracteriza această stare prin $\psi(-\infty)$. Pentru $t > t_2$ interacțiunea a încetat și sistemele pot fi din nou separate. Această stare se caracterizează prin $\psi(\infty)$. Ne punem problema de a determina amplitudinea probabilității T_{ba} ca la $t > t_2$, sistemele să se afle în starea Φ_b (unde $H_0\,\Phi_b = E_b\,\Phi_b$ și $\Phi_b \neq \Phi_a$)

$$T_{ba} = (\Phi_b, \psi(\infty)) = -\frac{i}{h}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\Phi_b, \hat{G}\left(\infty, t', -\frac{i}{h}\right)\hat{V}_1(t')\,\Phi_a\right) dt'. \tag{25}$$

Acum se caută să se aducă, $\psi(\infty)$ la o formă cît mai simplă, în care să nu intervină integrări (în aceasta constă de altfel avantajul metodei folosite).

Pentru aceasta observăm în prealabil că scăzînd ecuația (23) din (24) și punînd $t = \infty$, obținem

$$\int_{-\infty}^{\infty}\hat{G}\left(\infty, t', -\frac{i}{h}\right)\hat{V}_1(t')\,dt' = \int_{-\infty}^{\infty}\hat{V}_1(t'_1)\hat{G}\left(t', -\infty, -\frac{i}{h}\right) dt'.$$

Deci

$$T_{ba} = -\frac{i}{h}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\Phi_b, \hat{V}_1(t')\,\hat{G}\left(t', -\infty - \frac{i}{h}\right)\Phi_a\right) dt',$$

sau

$$T_{ba} = -\frac{i}{h}\left[\Phi_b, \hat{H}_1\,\psi_a(E_b)\right], \tag{26}$$

unde

$$\psi_a(E) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(E-\hat{H}_0)\frac{it}{h}} \left[\eta(t-t_1) - \eta(t-t_2)\right] \hat{G}\left(t, -\infty, -\frac{i}{h}\right) \Phi_a \, dt. \tag{27}$$

Vom căuta să determinăm pe $\psi_a(E)$ fără a recurge la integrări. Ținînd seama de (23) avem

$$\psi_a(E) = \int_{-\infty}^{\infty} dt'' \, e^{(E-\hat{H}_0)\frac{it}{h}} \left[\eta(t-t_1) - \eta(t-t_2)\right] \eta(t-t'') \, H_1 \left[\eta(t''-t_1) - \right.$$

$$\left. -\eta(t''-t_2) \, G\left(t'', -\infty, -\frac{i}{h}\right)\right] \Phi_a .$$

Efectuînd integrările se obține

$$(E - \hat{H}_0 - \hat{H}_1)\,\psi_a(E) = ih\, e^{\frac{i}{h}(E-E_a)t_1} \Phi_a - ihe^{\frac{i}{h}(E-\hat{H}_0)t_2} \, G\left(\infty, -\infty, -\frac{i}{h}\right) \Phi_a ,$$

sau

$$(E - \hat{H}_0 - \hat{H}_1)\,\psi_a(E) = 2h \sin\frac{T}{h}(E - E_a)\,\Phi_a - e^{\frac{i}{h}(E-\hat{H}_0)T} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left[(E' - \hat{H}_0)\,\hat{H}_1\,\psi_a(E')\right] dE'. \tag{28}$$

Să dezvoltăm acum pe $\psi_a(E)$ după puterile interacțiunii $\hat{H}_1$

$$\psi_a(E) - \psi_a^0(E) + \psi_a^1(E) + \cdots + \psi_a^n(E) + \cdots \tag{29}$$

Se vede că ψ_a^n satisface formula de recurență

$$\psi_a^n(E) = (E - \hat{H}_0)^{-1}\,\hat{H}_1\,\psi_a^{n-1}(E) - (E - \hat{H}_0)^{-1}\, e^{\frac{i}{h}(E-\hat{H}_0)T} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left[(E' - \hat{H}_0)\,\hat{H}_1\,\psi_a^{n-1}(E')\right] dE', \tag{30}$$

cu

$$\psi_a^0(E) = 2h\,\Phi_a\,(E - E_a)^{-1} \sin\frac{T}{h}(E - Ea). \tag{31}$$

Se constată astfel că aproximația nulă în ψ_a dă prima aproximație pentru probabilitatea de tranziție, iar aproximația de ordinul întîi pentru ψ_a dă aproximația de ordinul doi pentru probabilitatea de tranziție etc. Acesta este iarăși un avantaj al metodei de față. Din forma lui (31) rezultă că ψ_a^1 este sensibil diferit de zero numai în cazul

$$\Delta(E - E_a)\,T > \frac{h}{2} \tag{11'}$$

și am ajuns astfel din nou la relația $E-T$ dedusă în prima aproximație din teoria obișnuită a perturbațiilor.

Reprezentarea interacțiunii permite acum generalizarea acestui rezultat pentru orice grad de aproximație printr-un raționament de inducție completă.

Pentru aceasta se dezvoltă ψ_a^{n-1} după funcțiile Φ_b

$$\psi_a^{n-1}(E) = \sum_e \Phi_b \, t_{ba}^{n-1}(E - E_a, T), \tag{32}$$

unde t_{ba}^{n-1} sînt sensibil diferiți de zero, atunci cînd este satisfăcută relația (11'). În plus, se presupune că modulul lui t_{ba}^{n-1} tinde rapid spre zero atunci cînd E se îndepărtează de E_a. Această ipoteză ne asigură că și pentru ψ_a^{n-1} este îndeplinită condiția (11'), iar din formula de recurență (30) rezultă că ea este satisfăcută și pentru ψ_a^n, ceea ce trebuia demonstrat.

În legătură cu această demonstrație se impune însă o rezervă. Anume, nu este sigur că dezvoltarea (32) cu condiția (11') este totdeauna posibilă. Raționamentul de inducție completă cere numai ca condiția (11') să fie satisfăcută pentru ψ_a^{n-1}, însă aceasta încă nu înseamnă că ea trebuie să fie satisfăcută pentru t_{ba}. Aceasta este iar o problemă deschisă.

Înainte de a încheia acest capitol este de remarcat că un timp minim, respectiv o relație $E-T$ apare la măsurătoarea indirectă a oricărei mărimi (cu condiția aplicabilității teoriei perturbațiilor) deoarece relația (11) este o condiție necesară pentru ca (10) să fie diferit de zero și deci pentru ca măsurătoarea să aibă loc. Aceasta este marea importanță a relației $E-T$ sub forma (11).

CAP. III. RELAȚIA $E-T$ ȘI STĂRILE NESTAȚIONARE (RELAȚIA LUI MANDLSTAMM ȘI TAMM)

Problema legăturii dintre starea unui sistem și energia sa duce evident și la studiul stărilor nestaționare. Calea aceasta a fost abordată cu succes abia în 1945 de L. Mandelstamm și I. Tamm [11].

Pornind de la faptul amintit la începutul acestei lucrări, după care caracterul determinat al energiei unui sistem determină caracterul constant al statisticii oricărei mărimi fizice a sistemului, Mandelstamm și Tamm ajung la concluzia că există o legătură generală între nedeterminarea energiei totale a sistemului și variația în timp a valorilor medii a mărimilor fizice care caracterizează sistemul. Aceasta se poate exprima plastic astfel: numai sistemele cu o energie nedeterminată, deci în stări nestaționare, pot funcționa ca « ceas ». Formularea matematică a acestui fapt o constituie o nouă relație $E-T$. Pentru a stabili legătura amintită mai sus este firesc a se porni de la formula care dă variația în timp a valorii medii a unei mărimi oarecare $\hat{R}$

$$-ih\frac{\partial \overline{R}}{\partial t} = \overline{\left|\hat{H}\hat{R} - \hat{R}\hat{H}\right|}, \tag{33}$$

unde H este hamiltonianul sistemului. Exprimînd partea dreaptă a acestei formule cu ajutorul relației (1) unde am pus $\hat{S} \equiv \hat{H}$, obținem

$$\Delta H \, \Delta R \geqslant \frac{h}{2}\left|\overline{\frac{\partial R}{\partial t}}\right|. \tag{33'}$$

Vom integra această formulă de la t la $t + dt$ ținînd seama de faptul că integrala modulului este cel puțin egală cu modulul integralei și că ΔH nu depinde explicit de timp (ne limităm la sisteme conservative). Obținem

$$\Delta H \, \Delta t \geqslant \frac{h}{2}\frac{R_{t+\Delta t} - R_t}{\Delta \widetilde{R}}, \tag{34}$$

unde $\Delta \widetilde{R}$ este media în intervalul de timp Δt a lui ΔR. Din (34) rezultă că pentru ca o mărime R să varieze în timp este necesar ca nu numai $\Delta H \neq 0$, dar și $\Delta \widetilde{R} \neq 0$, evident în ipoteza că $\Delta H \neq \infty$; această ipoteză este de altfel o condiție necesară pentru vala-

bilitatea tuturor relațiilor deduse în acest capitol. Acesta este un rezultat nou pentru spectrul continuu.

Într-o serie de cazuri este convenabil de a introduce timpul minim ΔT în care R variază cu cantitatea $\widetilde{\Delta R}$. Relația (34) devine atunci

$$\Delta H \, \Delta T \geqslant \frac{h}{2} \, , \tag{35}$$

adică am obținut o nouă relație $E-T$. După cum rezultă din însăși demonstrația acestei relații, ea are o semnificație statistică spre deosebire de relațiile $E-T$ întîlnite pînă acum și care se referă la experiențe individuale și la durata lor.

Aici ΔH este nedeterminarea energiei totale care rămîne constantă în timp, ΔT în schimb are o semnificație destul de abstractă spre deosebire de cazurile precedente, unde reprezintă durata procesului de măsură. Acest caracter abstract este mai accentuat prin faptul că ΔT este legat de variația unei mărimi $\hat{R}$ oarecare ce caracterizează sistemul. Tocmai acest caracter abstract determină înaltul grad de generalitate a formulei (34), respectiv (35), și deci numărul mare de fenomene variate la care se aplică. În aceasta constă de altfel importanța noii relații $E-T$; în plus, în ceea ce privește aspectul matematic al problemei, trebuie menționat că formula (35) are o formă mult mai precisă decît (11).

Înainte de a trece la aplicații se impune o precizare a domeniului de aplicabilitate a relației (35). Este clar că în deducerea lui (35) a intervenit ecuația Schrödinger (prin formula (33)). Aceasta face pe autori să considere că relația (35) este valabilă numai în mecanica cuantică nerelativistă. În legătură cu aceasta trebuie însă menționat că ecuația Schrödinger intervine în (33) fără a face vreo ipoteză asupra formei lui $\hat{H}$. De aici rezultă că (33) și deci și (35) sînt valabile și în cazuri mai generale decît cazul mecanicii cuantice nerelativiste, cum ar fi de exemplu mecanica cuantică relativistă a electronului (teoria lui Dirac). În al doilea rînd, este clar că din aceleași motive ca și în cazul relației (9) sau (11) formula (35) nu este valabilă pentru măsurători directe.

În sfîrșit, autorii demonstrează că formulele de mai sus sînt valabile și pentru un ansamblu mixt. De aici rezultă că relația (35) nu presupune existența unei anumite stări a sistemului, ceea ce o face și din acest punct de vedere foarte generală, depășind cadrul acestui capitol.

Pentru a arăta unde se aplică concret relația (34), respectiv (35), vom menționa o serie de exemple dintre care primele trei sînt date chiar de autorii lucrării [11]. Primul exemplu este în legătură cu trecerea unui pachet de unde, printr-un punct dat. Din relația (35) rezultă că precizia localizării în timp ΔT a acestei treceri este legată de nedeterminarea energiei totale a sistemului ΔH prin relația $\Delta H \Delta T \geqslant \frac{h}{2}$ (pentru a ne convinge de aceasta nu avem decît să considerăm că coordonata centrului de greutate al pachetului este mărimea R, care intervine implicit în (35)).

Într'un alt exemplu se arată că schimbul de energie între două sisteme, care interacționează slab, se face într-un timp care nu poate fi mai mic decît $\frac{h}{2\Delta H}$ (pentru aceasta punem $\hat{H}_1$ sau $\hat{H}_2 = \hat{R}$, unde $\hat{H}_1$ și $\hat{H}_2$ sînt hamiltonienii sistemelor de interacțiune).

O aplicație care ni se pare mult mai interesantă este legată de durata de viață a stărilor. Pentru aceasta se consideră că mărimea $\hat{R}$ este operatorul de proiecție $\hat{L}$ a unei stări ψ_0 definit prin relația

$$\hat{L} = \psi_0 (\ldots \psi_0) \, , \tag{36}$$

unde simbolul $(\ldots \psi_0)$ reprezintă produsul scalar dintre funcția căreia i se aplică $\hat{L}$ și funcția ψ_0. Din relația (36) rezultă imediat că valorile proprii ale lui $\hat{L}$ sînt 0 și 1 și deci că

$$\hat{L}^2 = \hat{L}. \tag{37}$$

Punînd acum $\hat{R} = \hat{L}$ în (33'), obținem

$$\Delta H \sqrt{\overline{L} - (\overline{L})^2} \geqslant \frac{h}{2} \left| \frac{\partial \overline{L}}{\partial t} \right|. \tag{38}$$

Presupunînd $\overline{L}(0) = 1$ (la $t = 0$ sistemul se află în starea (ψ_0), obținem din (38) prin integrare de la 0 la t, ținînd seama de faptul că $\mathrm{d}\hat{L} < 0$

$$\overline{L}(t) \geqslant \cos^2 \left(\frac{\Delta H t}{h} \right). \tag{39}$$

Fie τ semiperioada stării ψ_0, adică $\overline{L}(\tau) = \frac{1}{2}$. În acest caz obținem din (39)

$$\tau \Delta H \geqslant \frac{\pi}{4} h, \tag{40}$$

relație care este bine cunoscută în teoria dezintegrării radioactive (aici ΔH joacă rolul lărgimii nivelului nestaționar). În plus, se calculează în lucrarea [11] din (38) timpul minim t_0 după care este valabilă legea de dezintegrare

$$\overline{L} = e^{-\gamma t}.$$

Acest timp este

$$t_0 = \frac{1}{\gamma} \ln \left[1 + \frac{h^2 \gamma^2}{4 (\Delta H)^2} \right]. \tag{41}$$

Cunoscînd pe γ se poate calcula pe baza unei măsurători a lui t_0, atunci cînd acesta nu este prea mic, ΔH.

Afară de aceste aplicații considerate și în [11], este posibil ca relația (41) să prezinte interes și în probleme de fluorescență. Se știe că dacă se consideră fluorescența ca un proces monomolecular, ea are loc după aceeași lege exponențială ca dezintegrarea radioactivă.

Deci, și în cazul acesta trebuie să existe același timp minim t_0 între începutul excitării și începutul fluorescenței.

În al doilea rînd se poate verifica eventual prin metoda de mai sus mecanismul mono- sau bimolecular, al fluorescenței, măsurînd pe t_0 și comparînd rezultatele obținute cu valoarea calculată teoretic pentru cazul unei dezintegrări exponențiale și hiperbolice (se știe că mecanismul bimolecular de fluorescență duce la o lege hiperbolică pentru intensitatea emisiei fluorescente [16].

Înainte de a încheia, trebuie să menționăm că N. Krîlov și V. Fock [13] contestă relației (40) valabilitatea generală care rezultă din caracterul foarte general al demonstrației, dat fiind că după acești autori nu este sigur că ΔH este în general o mărime caracteristică pentru fenomenul de dezintegrare. Acest fapt este evident în legătură cu inexistența în anumite cazuri a lui ΔH (pentru o distribuție a energiei după o lege de dispersie, de exemplu, $\Delta H = \infty$). Asupra acestei chestiuni am atras de altfel atenția de la început, arătînd că toate considerațiile din acest capitol sînt legate de ipoteza $\Delta H \neq \infty$.

Mandelstamm și Tamm relevă în acest sens interesul pe care-l prezintă generalizarea relației (35) și pentru acest caz. Această problemă este însă deocamdată deschisă. Rezolvarea ei ar putea aduce contribuții importante, nu numai în problema relației $E-T$, ci și în teoria dezintegrării stărilor.

CONCLUZII

1. Se poate considera ca stabilită definitiv existența a două relații $E-T$ care diferă prin semnificația mărimilor ΔE și ΔT care intervin în ele și deci și prin fenomenele la care se aplică, una referindu-se la procesul de măsură al energiei stărilor staționare și cealaltă la stările nestaționare.

2. În mecanica cuantică nerelativistă relațiile $E-T$ diferă atît prin demonstrațiile lor, cît și prin conținutul lor fizic de relația $p-q$.

3. O serie de probleme legate de relația $E-T$ în mecanica cuantică relativistă, cum ar fi teoria măsurătorilor indirecte, valabilitatea generală a relației $E-T$ dedusă din teoria perturbațiilor, generalizarea relației Mandelstamm-Tamm pentru cazul $\Delta H = \infty$, nu sînt rezolvate nici astăzi. Rezolvarea lor va contribui la o cunoaștere mai profundă a unor foarte importante fenomene fizice.

Autorul ține să mulțumească academicianului Șerban Țițeica pentru îndrumările prețioase date în legătură cu această lucrare.

BIBLIOGRAFIE

1. D. Blohințev, *Bazele mecanicii cuantice*. Ed. tehnică, București, 1954.
2. W. Heisenberg, Zs. F. Phys., 1927, t. 43, p. 172.
3. P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*. Oxford, 1930.
4. J. von Neumann, Math. Annalen, 1931, vol. 104, p. 570.
5. — *Die mathematischen Grundlagen der Quantenmechanik*. J.Springer, Berlin, 1932.
6. A. Mercier, Arch. Sciences, 1949, t. II, p. 403.
7. W. Pauli, *Handbuch der Physik*. J. Springer, Berlin, 1933, t. 24, partea I-a.
8. E. Spolski, *Fizica atomică*. Ed. tehnică, București, 1954, t. I.
9. L. Landau i E. Lifschitz, *Kvantovaia Mehanika*. Oghiz, Moscova - Leningrad, 1948.
10. L. Landau u. Peierls, Zs. f. Phys., 1931, t. 69, p. 142.
11. L. Mandelstamm i I. Tamm, IAN, seria fiz., 1945, t. IX, nr. 1—2, p. 122.
12. L. Mandelstamm, Polnoe sobranie socinenii Izd. Akad. Nauk, SSSR, Moscova, 1950, t. V.
13. N. Krîlov i V. Fock, J.E.T.F., 1947, nr. 2.
14. G. Rideau, C. R. Acad. Sci., Paris, 1951, t. 232, p. 1338.
15. B. Lippmann a. J. Schwinger, Phys. Rev., 1950, t. 79, p. 469.
16. P. Pringsheim, *Fluorescence and Phosphorescence*. New York, 1949.

ACTIVITATEA INSTITUTULUI DE FIZICĂ

ŞEDINŢE DE COMUNICĂRI PE INSTITUT ŞI PE SECŢII:

5 OCTOMBRIE 1954

O. Onicescu, *O teoremă fundamentală a mecanicii statistice.* (în colaborare cu Institutul de matematică al Academiei R.P.R.).

20 OCTOMBRIE 1954

E. Friedländer, *Studiul experimental al componenţei nuclear active a radiaţiei cosmice la energii de ~ 25 GeV.*

1 NOIEMBRIE 1954

A. Cişman şi A. Munteanu, *Studiul experimental al potenţialului electrolitic la pături de nichel foarte subţiri.*
M. Borneas şi E. Kalman, *Asupra unui nou aspect al noţiunii de undă-particulă.*

5 NOIEMBRIE 1954

V. Sergiescu, *Asupra stărilor de suprafaţă ale dielectricilor cristalini.*

10 NOIEMBRIE 1954

I. Agîrbiceanu, *Contribuţii la problema extincţiei fluorescenţei soluţiilor.*

24 NOIEMBRIE 1954

N. Vasilescu Karpen, *Mecanismul presiunii osmotice.*

27 NOIEMBRIE 1954

I. Davidescu, *Rolul cercetărilor în societatea socialistă.*

2 DECEMBRIE 1954

M. Nachman şi A. Georgescu, *O metodă de inducţie pentru măsurarea intensităţii cîmpului magnetic.*
M. Nachman şi M. Oncescu, *Evaporarea metalelor în vid la temperatură cunoscută.*

11 DECEMBRIE 1954

E. Friedländer, *Studiul reacţiilor nucleare de foarte mare energie prin metoda de compensaţie.*
E. şi J. Friedländer, *Contribuţii la problema naturii particulelor* θ^0.
C. Bercea, *Contribuţii la problema naturii particulelor care generează « stele » în emulsii nucleare.*

11 IANUARIE 1955

S. Grosu, *Contribuții la studiul emisiei electronice prin suprafețe metalice.*

SEMINARUL DE TEORIA CUANTICĂ A CÎMPURILOR

În cadrul acestui seminar s-au ținut următoarele referate:

Ș. Țițeica, *Matricea S în mecanica cuantică.*

M. Mayer, *Tratarea spațio-temporală a mecanicii cuantice nerelativiste după R. Feynman.*

D. Bogdan, *Teoria pozitronilor după R. Feynman.*

SEMINARUL DE FIZICA SOLIDELOR

În cadrul acestui seminar s-au ținut în continuare următoarele referate:

V. Sergiescu, *Transformări de fază de ordinul I* — 2 ședințe — *Transformări de fază de ordinul II.*

D. Bally, *Fenomene de ordine și dezordine* — 2 ședințe.

A. Corciovei, *Feromagnetismul monodomeniului.*

A. Corciovei, *Teoria clasică a feromagnetismului unui monodomeniu.*

A. Corciovei, *Teoria semiclasică a feromagnetismului unui singur domeniu. Introducere în teoria cuantică.*

V. G. LEVICI, *Introducere în fizica statistică*. Editura tehnică 1954, p. 467

Acest manual, tradus de curînd din limba rusă, este prima lucrare tipărită de fizică statistică, existentă la noi.

Mersul expunerii este, în esență, următorul:

Se discută întîi obiectul acestei discipline și modurile posibile de a o prezenta. Se arată că mecanica statistică și cea cuantică alcătuiesc un complex a cărui expunere pentru studenți se face de obicei în trei etape. Se începe cu un studiu statistic aproximativ al sistemelor, admițînd că subsistemele constitutive ascultă de legile mecanicii clasice. Cu această ocazie, studenții se acomodează cu metoda și cu noțiunile caracteristice oricărui studiu statistic. Folosind baza creată astfel, se face apoi o expunere riguroasă a legilor cuantice care guvernează microsistemele individuale. Și, în sfîrșit, se reia studiul statistic al sistemelor compuse, într-o tratare de data aceasta riguroasă, pornindu-se de la o comportare a subsistemelor conformă cu legile cuantice.

O asemenea expunere în etape sfîrșește prin a da o imagine totodată completă și riguroasă asupra acestui domeniu al fizicii, însă ocupă desigur un volum foarte mare și constituie material pentru un timp de studiu relativ lung. De aceea, V. G. Levici preferă o altă soluție, care sacrifică într-o anumită măsură rigurozitatea, însă are avantajul că permite o primă asimilare — este adevărat schematică — însă mult mai rapidă, a acestui complex alcătuit de mecanica statistică și cea cuantică. Această soluție se bazează pe observația că, pentru a obține rezultate mult mai exacte decît cele la care conduce o teorie statistică clasică, nu este necesar, pentru majoritatea macrosistemelor, să se țină seama de toate proprietățile cuantice ale subsistemelor constitutive. Este suficient pentru aceasta să se ia în considerare numai cîteva dintre aceste proprietăți (cuantificarea stărilor, identitatea particulelor elementare etc.) care sînt cele mai caracteristice și care pot fi exprimate matematic foarte scurt și foarte simplu. În rest, se pot păstra noțiunile intuitive ale mecanicii clasice. Cu alte cuvinte, atît prea marea inexactitate a rezultatelor, legată de un studiu statistic pur clasic, cît și lungimile și complicațiile inerente unui studiu complet și riguros, sînt evitate în același timp, într-o prezentare cvasiclasică a teoriei statistice a sistemelor. Aceasta este soluția adoptată de V. G. Levici. Ea acordă un rol cu totul preponderent problemelor statistice propriu-zise, cum este și normal dacă se ține seama de titlul manualului.

Odată stabilit acest punct de vedere, expunerea continuă astfel:

Deoarece se va porni de la o descriere cvasiclasică a comportării subsistemelor, spre a se ajunge apoi, prin intermediul unor raționamente probabilistice, la legile fenomenologice ale sistemului total, se dau întîi, foarte pe scurt, noțiunile necesare de mecanică cuantică cvasiclasică și noțiunile de probabilitate și se face o recapitulare a legilor fenomenologice la care trebuie să se ajungă (în această recapitulare nu se menționează însă decît legile privitoare la proprietățile termice ale sistemelor).

Cu aceasta, preliminariile sînt încheiate și se intră în materia propriu-zisă a cursului. Se începe cu studiul statistic al proprietăților termice ale gazului ideal monoatomic. Cu ajutorul acestui caz particular extrem de simplu, cititorul poate urmări esența mecanismului logic ce conduce de la legi individuale la legi de ansamblu; poate înțelege clar ce înseamnă o funcție de distribuție a unei mărimi date ce caracterizează un subsistem, cum se pune și cum se rezolvă problema formei unei asemenea funcții, cum permite ea apoi calculul valorii medii a mărimii considerate și cum depinde relația dintre această valoare medie și valoarea reală a aceleiași mărimi — referitoare însă la sistemul total — de numărul de subsisteme, adică în ce constă problema fluctuațiilor relative.

După ce s-a trasat astfel schema unei teorii statistice, folosindu-se pentru o primă acomodare un caz particular, se trece la tratarea, desigur mult mai abstractă, a cazului

general al unui sistem oarecare, constituit din subsisteme cvasiindependente oarecare, supuse legilor mecanicii cuantice într-o aproximație cvasiclasică. Se stabilește funcția de distribuție canonică a stărilor sistemului și se definește temperatura statistică și echilibrul statistic. Apoi se pune problema legăturii dintre rezultatele statistice obținute și noțiunile, principiile și legile fenomenologice din termodinamică. Se arată că între mărimile termodinamice și mărimile statistice medii ce caracterizează un sistem macroscopic, există o coincidență cu atît mai bună cu cît este mai mare numărul de subsisteme constitutive. Deci, în limita acestei aproximații determinate de numărul subsistemelor, mărimile termodinamice pot fi exprimate în funcție de mărimi ce caracterizează subsistemele. Prin urmare, toate principiile și legile termodinamice, care nu sînt decît relații între mărimile termodinamice, pot fi formulate ca relații între mărimi ce caracterizează subsistemele. Cu alte cuvinte, se arată că ceea ce s-a obținut, este, după cum se și urmărea, o teorie statistică a termodinamicii sistemelor. Noțiunile și relațiile termodinamice capătă astfel un sens nou, un fel de conținut logic, care le face cu mult mai satisfăcătoare. Și totodată, ceea ce are o extremă însemnătate de principiu, în formularea lor statistică se vede în ce măsură relațiile termodinamice sînt pur și simplu adevărate, cum se admitea, sau numai foarte probabile.

Cu această discuție, teoria generală este încheiată. Restul manualului nu conține altceva decît aplicări ale acestei teorii la studiul concret al unor sisteme particulare. Fac excepție doar două capitole. Unul constă într-o rectificare de principiu, relativ la modul cum trebuie ținut seama de identitatea particulelor elementare, și în explicitarea consecințelor pe care le introduce această rectificare în forma funcției de distribuție a stărilor subsistemelor; se obțin astfel distribuțiile Fermi-Dirac și Bose-Einstein. În celălalt capitol se face o teorie mai amănunțită a fluctuațiilor.

În capitolele de aplicații se studiază statistic proprietățile termice, magnetice și electrice ale sistemelor, fenomenele de radiație, reacțiile nucleare și proprietățile heliului II lichid.

Aceste capitole sînt tratate, în linii mari, după un același plan. Se pune întîi problema și se stabilesc termenii și condițiile specifice pentru cazul particular considerat; se face apoi teoria statistică propriu-zisă și, în sfîrșit, se dau expresiile statistice ale mărimilor și relațiilor fenomenologice pentru care se urmărea de la început să se găsească o fundamentare statistică.

Acesta este conținutul lucrării.

După cum se vede, linia de expunere ce se degajă este logică și în același timp pedagogică; se definește obiectul, se adoptă un punct de vedere, se dau cunoștințele necesare pentru pornirea raționamentelor care constituie teoria, se face teoria generală și apoi se consolidează mentalitatea creată, aplicînd teoria abstractă la cazuri concrete, grupate într-un anumit mod. Autorul are o suficientă elasticitate de spirit, spre a face anumite abateri de la cerințele logice stricte, atunci cînd acest lucru ușurează mult înțelegerea. De pildă, gazul ideal monoatomic a fost scos din categoria cazurilor particulare care urmează și ilustrează teoria generală, pentru a-l trata înaintea ei, ca un exemplu simplu pregătitor; iar problema fluctuațiilor și aceea a identității particulelor elementare, deși constituie chestiuni de principiu, nu au fost analizate în amănunt decît în momentul cînd, prin discuția diferitelor cazuri particulare, s-a creat totodată baza și necesitatea unei asemenea analize. Aceasta ar fi de spus referitor la modul cum este concepută linia generală de expunere.

Cît privește tratarea propriu-zisă a diferitelor chestiuni, pentru a face aprecieri asupra ei trebuie ținut seama de scopul pe care-l urmărește autorul. Acest scop este de a expune problemele fundamentale ale fizicii statistice într-o formă cît mai accesibilă și fără prea mari pretenții de rigurozitate. Judecînd în raport cu acest scop, expunerea are mari calități, însă are și unele puncte slabe, care ar putea fi clasificate astfel:

1. Nu se folosesc unele noțiuni și nu se stabilesc unele proprietăți care ar clarifica mult intuiția, fără a îngreuia de loc expunerea. Astfel, de exemplu, nu se vorbește nimic despre colective virtuale, despre traiectoriile în spațiul fazelor ale punctelor reprezentative ale stărilor unui sistem, sau despre proprietățile exprimate prin teorema lui Liouville.

2. Schema raționamentelor nu este destul de evidentă pentru un cititor care ia pentru prima oară contact cu fizica statistică prin intermediul acestui manual. Nu există o distincție destul de marcată între premise și rezultate, între general și particular, între esențial și secundar. Din acest punct de vedere, prezentarea este uneori amorfă.

3. S-au strecurat unele neglijențe de limbaj de un tip ce trebuie evitat în mod special într-un manual de fizică statistică. De exemplu, la p. 55 jos, se spune: « Din experiență rezultă însă că într-un gaz închis într-un recipient și nesupus nici unei acțiuni dinafară, formarea unui flux continuu de gaz este imposibilă ». Or, una dintre ideile cele mai carac-

teristice implicate în mentalitatea statistică este aceea că imposibilitatea unui proces macroscopic nu poate decurge din experienţa macroscopică, sau din legile fenomenologice, care descriu această experienţă, ci numai dintr-o teorie microscopică statistică. De altfel, o asemenea teorie conduce la concluzia că procesul particular la care se referă citatul nu este imposibil, ci doar foarte puţin probabil.

Se mai pot cita şi alte exprimări de acest fel, care fac parte din limbajul propriu pentru disciplinele fenomenologice, dar care sînt în dezacord cu concepţia statistică şi îngreuiază asimilarea ei.

Aceste scăderi sînt însă compensate din plin de faptul că expunerile sînt foarte amănunţite şi complete şi totodată uşor de urmărit din punct de vedere matematic. Aşa încît, dacă se face bilanţul, manualul lui V. G. Levici este un manual reuşit, iar existenţa lui în limba romînă constituie fără îndoială un mare progres.

Traducerea este, în general, bună. În ceea ce priveşte tiparul, numărul de greşeli este mare, iar erata foarte lacunară.

M. Mugur

M. A. LEONTOVICI, *Introducere în termodinamică*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1954

Această carte, apărută de curînd în limba romînă, a fost tradusă după cea de a doua ediţie a originalului sovietic. Ea cuprinde o sintetizare a lecţiilor ţinute de autor la universitate. Deşi nu cuprinde decît termodinamica fenomenologică, autorul s-a străduit să prezinte astfel materialul, încît să-l pregătească pe cititor pentru trecerea la studiul termodinamicii statistice.

Lucrarea este împărţită în trei părţi mari:

a) Concepţiile şi legile fundamentale ale termodinamicii.

b) Termodinamica proceselor cvasistatice şi stările de echilibru.

c) Stările de neechilibru.

Chiar de la primele pagini cititorul poate constata rigurozitatea şi claritatea care se manifestă de-a lungul întregii lucrări. Introducîndu-se de la început (deşi cam succint) distincţia dintre parametrii interni şi externi ai sistemului, se trece în primele paragrafe la definirea riguroasă a cantităţii de căldură şi la enunţarea primului principiu al termodinamicii. Pentru aceasta se introduc noţiunile de înveliş adiabatic şi sistem izolat adiabatic, ceea ce permite să se dea un prim enunţ primului principiu şi anume un enunţ limitat la sistemele izolate adiabatic. Luarea în considerare a cazului general cînd sistemul nu mai este izolat adiabatic, conduce ca în bilanţul variaţiei energiei sistemului să se ţină seama şi de variaţia datorită interacţiei cu mediul înconjurător, neînsoţită de executarea vreunui lucru exterior. Această variaţie de energie se defineşte drept cantitate de căldură primită de sistem. Introducînd noţiunea de echilibru termodinamic, drept noţiunea ce indică starea în care toţi parametrii interni ai sistemului sînt funcţii de parametrii externi şi de energie, autorul trece la demonstrarea existenţei temperaturii ca mărime fizică indicată de experienţă şi care se referă la distribuţia energiei sistemului asupra părţilor sale componente în stare de echilibru. Se demonstrează existenţa unei funcţii $\Phi = \Phi(a, E)$, pentru fiecare sistem care are una şi aceeaşi valoare pentru toate sistemele ce se găsesc în echilibru, la punerea lor în contact (unde a reprezintă parametrii externi ai sistemului şi E energia sa). Aşadar, pentru sistemele 1, 2, 3 puse în contact, avem la echilibru

$$\Phi_1(a_1, E_1) = \Phi_2(a_2, E_2) = \dots$$

Această funcţie se numeşte temperatura sistemului. Se arată de asemenea că egalitatea de mai sus nu se schimbă dacă luăm în loc de Φ_1, Φ_2

$$\varphi_1 = \Omega_1[\Phi(a_1, E_1)],\ \varphi_2 = \Omega[\Phi_2(a_2, E_2)], \dots,$$

unde Ω este o funcţie monoton crescătoare. Astfel rezultă că temperatura nu este univoc determinată şi se poate vorbi de diferite scări de temperatură.

Enunţînd al doilea principiu al termodinamicii prin imposibilitatea existenţei unui perpetuum mobile de speţa a doua, autorul deduce imediat şi simplu două consecinţe importante pentru un sistem termic omogen:

1. Dacă sistemul descrie un proces ciclic izoterm şi revine prin urmare în starea iniţială, atunci lucrul total nu poate fi pozitiv.

2. Există stări ale unui sistem termic omogen care nu pot fi atinse plecînd dintr-o stare dată, printr-un proces adiabatic.

În special cea de a doua concluzie este folosită în formularea matematică a celui de al doilea principiu. Pentru aceasta autorul îşi propune să demonstreze că pentru procesele reversibile ale unui sistem termic omogen, cel de al doilea principiu este echivalent cu

afirmația « există totdeauna un factor integrant pentru cantitatea de căldură dQ_{rev} primită de sistem într-un proces reversibil oarecare, iar printre factorii integranți ai lui dQ_{rev} există unul care depinde numai de temperatura sistemului ». Pentru demonstrarea acestui lucru, autorul folosește metoda axiomatică a lui C a r a t h e o d o r y (1909), dar printr-un mod de prezentare propriu, simplu și elegant evită dificultățile matematice legate de aplicarea acestei metode la formele Pfaff cu mai mult de trei variabile. Utilizînd și consecința a doua a principiului al doilea, consecință pe care am arătat-o mai sus, el demonstrează afirmația propusă, arătînd că dacă T este o funcție universală numai de temperatura ϑ, atunci $\frac{1}{T}$ este un facor integrant al lui dQ astfel încît

$$dQ_{\text{rev}} = T\,dS\,(a_i, \vartheta) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Mărimea S, funcție uniformă de starea sistemului a cărui diferențială totală este $\frac{dQ_{\text{rev}}}{T}$ se numește *entropia* sistemului, iar mărimea T se numește temperatura în scara termodinamică absolută a lui Kelvin. În cazul unui proces adiabatic reversibil $dQ_{\text{rev}} = 0$, ceea ce implică $S\,(a_i, \vartheta) = \text{const.}$, care reprezintă o familie de suprafețe în spațiul cu $(n+1)$ dimensiuni al coordonatelor a_i, ϑ $(i = 1, \ldots, n)$. Într-un asemenea proces, punctul reprezentativ al stării sistemului se va mișca pe una din aceste suprafețe, fără a o putea părăsi. Dacă ar părăsi-o s-ar distruge adiabaticitatea. Aceasta reprezintă expresia matematică a existenței unor stări adiabatic inaccesibile.

O caracteristică a cărții o constituie și unele aplicații ale termodinamicii la variate și importante domenii ale fizicii, cum ar fi de exemplu la radiația de echilibru, cît și aplicații moderne la răcirea prin demagnetizarea adiabatică (în partea a doua a cărții) sau tranzițiile de fază de speța a doua (în cea de a treia parte a cărții).

De asemenea, majoritatea paragrafelor sînt însoțite de probleme interesante și instructive, însoțite de rezolvarea lor.

Procesele ireversibile sînt studiate abia în ultima parte a cărții. Aici, se subliniază de la început că, pentru stările de neechilibru, funcțiile de stare trebuie definite din nou, deoarece în cazul neechilibrului starea nu mai este caracterizată numai prin parametrii externi și energie, ci și prin unul sau mai mulți parametri interni. Interesant este cum autorul redefinește aceste funcții caracteristice. Astfel, în cazul entropiei autorul se folosește de exemplul unui gaz închis într-un vas, în absența oricărui cîmp exterior. Starea de neechilibru a gazului va fi o stare cu o distribuție neuniformă a densității, în care centrul de greutate al gazului nu va coincide cu centrul geometric al vasului. Dacă se creează acum un cîmp gravitațional convenabil, această stare de distribuție neuniformă va fi o stare de echilibru. Prin definiție se consideră ca entropie a stării de neechilibru de distribuție neuniformă a densității, entropia stării de echilibru cu aceeași distribuție de densitate în prezența cîmpului exterior, creat printr-un proces cvasistatic. Dacă se ține seama că prin introducerea cîmpului suplimentar energia sistemului se schimbă, iar starea sistemului în afară de parametrii externi a_i este caracterizată și de parametrii externi x_k care determină cîmpul, iar dacă ξ_k sînt forțele generalizate corespunzătoare parametrilor x_k, atunci funcția $S\,(E, a_i, \xi_k)$ va satisface relația

$$T\,dS = dE + \sum_i A_i\,da_i - \sum x_k\,d\xi_k,$$

unde $\sum_i A_i\,da_i$ reprezintă lucrul mecanic. Așadar, noua definiție se bazează pe faptul că pentru variația entropiei la trecerea într-o stare de neechilibru, *cînd trecerea se face în mod cvasistatic*, rămîne valabilă tot vechea ecuație, valabilă pentru stările de echilibru

$$T\,dS = dE + d\mathfrak{L}.$$

Într-un mod analog se definește și energia liberă.

Lipsesc din lucrare principiul al treilea și termodinamica chimică.

Trebuie subliniate încă o dată, atît nivelul teoretic ridicat al lucrării, cît și claritatea expunerii, care nu micșorează rigurozitatea științifică. Din aceste motive, apariția în limba romînă a acestei cărți va umple un gol în literatura noastră de specialitate.

În ceea ce privește execuția tehnică, aici avem de remarcat lipsuri serioase. Erata de la sfîrșitul cărții nu cuprinde nici pe departe toate greșelile din cuprinsul cărții. De pildă, la pagina 49 este omisă chiar o bună parte din text. De asemenea, deși hîrtia este de calitate corespunzătoare, totuși cerneala este de calitate proastă.

Ar trebui ca Editura tehnică să dea mai multă atenție execuției tehnice a lucrărilor.

Bogdan Dragoș

ÎNTREPRINDEREA
POLIGRAFICĂ nr. 4
BUCUREŞTI

ABONAMENTELE SE FAC LA OFICIILE POŞTALE,
PRIN FACTORII POŞTALI ŞI DIFUZORII VOLUNTARI
DIN ÎNTREPRINDERI ŞI INSTITUŢII

Preţul Lei 5